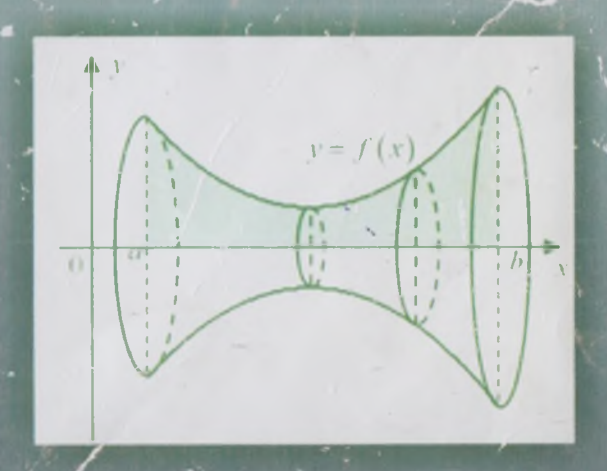
И.П. Рустюмова
С.Т. Рустюмова

ПОСОБИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ

ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЕДИНОМУ НАЦИОНАЛЬНОМУ ТЕСТИРОВАНИЮ (ЕНТ)



Часть 1

ИЗДАНИЕ ПЕРВОЕ

И.П. Рустюмова
С.Т. Рустюмова

Пособие для подготовки к единому национальному тестированию (ЕНТ) по математике

Издание первое

Часть 1

Алматы
2013

ББК 22.1я7
Р88

Рекомендовано Учебно-методическим советом
Казахской академии образования им. Ы. Алтынсарина
от 20.12.2004

Рецензенты:

КАН Анатолий Андреевич – заслуженный учитель Казахстана

КАСАТКИН Владимир Борисович – учитель высшей категории

Корректор:

СУББОТИНА Людмила Петровна

Рустюмова И.П., Рустюмова С.Т.

Р88 Пособие для подготовки к единому национальному тестированию (ЕНТ) по математике. В 2 ч. Учебно-методическое пособие. Издание первое. – Алматы, 2013. - 616 с.

ISBN 9965-07-369-4

В данной книге авторы обобщили свой многолетний опыт подготовки учащихся к сдаче ЕНТ по математике. Пособие включает все темы школьного курса математики и соответствует современным образовательным стандартам и требованиям ЕНТ. Наличие теории и большого количества подробно разобранных задач дает возможность читателю самостоятельно ликвидировать пробелы, повторить теорию и научиться решать задачи.

Пособие может быть полезным для всех желающих в кратчайшие сроки систематизировать свои знания по основным вопросам математики.

Все права защищены. Никакая часть данной книги не может быть воспроизведена в какой бы то ни было форме без письменного разрешения владельцев авторских прав.

$Р\dfrac{1602000000}{407(05)-05}$

ББК 22.1я7

ISBN 9965-07-369-4

© Рустюмова И.П.
Главы 1, 2, 4, 5.
2007
© Рустюмова С.Т.
Глава 3.
2007

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данная книга адресована в первую очередь тем, кто желает успешно подготовиться к единому национальному тестированию (ЕНТ) по математике.

Результаты, показанные абитуриентами в ЕНТ, являются бесспорной оценкой уровня и качества системы среднего образования в Казахстане.

К сожалению, приходится констатировать, что за последние годы результаты тестирования демонстрируют тенденцию по снижению уровня математической подготовки у выпускников средних школ. Статистика показывает, что абитуриенты решают всего 30% тестовых задач по математике.

Большинство учащихся плохо владеют простейшей техникой тождественных преобразований, не умеют строить графики элементарных функций, не обладают пространственным воображением и имеют низкие навыки логического мышления.

Тому есть много причин, но основная из них состоит в том, что материал изложения разделов школьной математики растянут на много лет. В 7-ом и 8-ом классах изучаются текстовые задачи и тождественные преобразования алгебраических выражений. В 11-ом классе учащиеся заканчивают изучение стереометрии, проходят основы высшей математики. При этом повторению пройденных разделов математики уделяется мало времени, поэтому приобретенные знания и навыки постепенно забываются даже у сильных учеников.

Цель данного пособия в том, чтобы ознакомить учащихся с типовыми методами решения часто встречающихся задач в ЕНТ по математике, а также научить их избегать стандартных ошибок, допускаемых поступающими в ВУЗы РК при решении математических задач.

Для достижения этой цели были взяты контрольно-измерительные материалы по математике, которые были использованы в ЕНТ предыдущих лет, проанализированы и систематизированы методы их решения. На основе полученных материалов была создана рациональная методология освоения методов решения типовых задач ЕНТ учащимися средних школ.

Настоящее пособие предназначено в первую очередь для старшеклассников, готовящихся к сдаче ЕНТ. Оно дает возможность учащимся за короткий срок ликвидировать имеющиеся пробелы в знаниях по математике из курса школьной программы.

Пособие имеет следующую структуру.

Первая часть содержит материал по следующим основным темам: алгебра и элементарные функции, последовательности, решение текстовых задач. Обсуждаются методы решения уравнений, систем и неравенств.

Во второй части разбираются методы решения задач по геометрии, тригонометрии и началам анализа.

Каждая часть состоит из нескольких глав, разбитых на разделы, в каждом из которых приводятся необходимые теоретические сведения, разбираются примеры решения задач всего спектра сложности от элементарных до сложных. Примеры подобраны с тем расчетом, чтобы в каждом разделе книги был представлен набор ключевых задач и методов их решения.

Третья часть - «тренажер» - содержит тематические подборки тренировочных заданий. Задачи подобраны согласно перечню вопросов содержания пособия. Ко всем задачам даны ответы. Для удобства пользования книгой ответы приводятся сразу после каждого блока. Задания для самостоятельной работы разбиты на блоки, в каждом из которых представлены задачи на применение одного метода. Большое количество разнообразных задач дает возможность преподавателю легко подбирать материал для составления самостоятельных работ.

По мнению авторов, книга может быть использована как для самостоятельной подготовки к централизованному тестированию, так и в качестве справочного и дидактического материалов при организации учебного процесса.

Работа над пособием окажется особенно эффективной, если учащийся сначала попытается самостоятельно решить разобранный в тексте пример, а затем сравнить свое решение с тем, которое представлено в книге. Авторы не всегда предлагают наиболее рациональное решение задачи, иногда отдавая предпочтение универсальным методам решения целого класса задач, что позволяет учащимся охватить большее количество решаемых задач, не изучая многочисленные «нестандартные» приемы - что важно при сжатых сроках подготовки.

Новое издание пособия является полностью переработанным по замечаниям наших читателей и дополненным некоторыми новыми разделами.

Авторы будут благодарны за все замечания, которые просим присылать по адресу:

svrustjumova@mail.ru; irina.rust@mail.ru.

Желаем Вам Удачи!

ГЛАВА I. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

§1. ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЧИСЛОВЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

Приведем основные формулы, необходимые для преобразований числовых выражений.

Формулы сокращенного умножения

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ – *квадрат суммы*

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ – *квадрат разности*

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ – *разность квадратов*

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$ – *куб суммы*

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$ – *куб разности*

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ – *сумма кубов*

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ – *разность кубов*

Степени

Степень с натуральным показателем	$a^1=a$ $a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{ раз}}$, $a\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$
Степень с целым показателем	$a^0=1$ $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$, $a\in\mathbb{R}$, $a\neq0$, $n\in\mathbb{N}$
Степень с рациональным показателем для неотрицательного числа a	$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$, $m\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{N}$

Свойства степеней	$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ $\quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$ $a^x : a^y = a^{x-y}$ $\left(a^x\right)^y = a^{x \cdot y}$ $\quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-x} = \left(\frac{b}{a}\right)^x$ $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$

Арифметический корень

Определение. ***Арифметическим корнем*** степени n $(n \in \mathbb{N},\ n > 1)$ из неотрицательного числа a называется неотрицательное число b такое, что $b^n = a$.

Обозначается $\sqrt[n]{a} = b$.

<u>Тождества</u>. Если $\sqrt[n]{a}$ существует, то:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a \qquad \sqrt[2n-1]{a^{2n-1}} = a,\ a \in \mathbb{R}$$

$$\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|,\ a \in \mathbb{R} \qquad \sqrt[2n-1]{-a^{2n-1}} = -a,\ a \in \mathbb{R}$$

<u>Основные свойства:</u>

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b},\quad a \geq 0,\ b \geq 0 \qquad \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m},\quad a \geq 0$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},\quad a \geq 0,\ b > 0 \qquad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a},\quad a \geq 0$$

$$\sqrt[n \cdot m]{a^m} = \sqrt[n]{a},\quad a \geq 0$$

В настоящей главе мы сделаем некоторые замечания общего характера по ряду разделов алгебры и арифметики, касающиеся вопросов, зачастую ускользающих из поля зрения поступающих, а также разберем некоторые примеры.

Обращение периодической десятичной дроби в обыкновенную дробь

1. *Формула записи чистой периодической десятичной дроби в виде обыкновенной дроби*:

$$0,(a_1 a_2 a_3 ... a_n) = \frac{\overline{a_1 a_2 a_3 ... a_n}}{\underbrace{999...9}_{n \text{ девяток}}}$$

Например: $0,(17) = \frac{17}{99}$; $0,(45) = \frac{45}{99} = \frac{5}{11}$.

В случае смешанной периодической дроби поступают следующим образом:

$$0,2(1) = \frac{2,(1)}{10} = \frac{2+0,(1)}{10} = \frac{2+\frac{1}{9}}{10} = \frac{19}{90}$$

$$0,2(19) = \frac{2,(19)}{10} = \frac{2+0,(19)}{10} = \frac{2+\frac{19}{99}}{10} = \frac{217}{990}$$

$$2,08(3) = \frac{208,(3)}{100} = \frac{208+0,(3)}{100} = \frac{208+\frac{3}{9}}{100} = \frac{625}{300} = \frac{25}{12}$$

2. *Обращение периодической десятичной дроби в обыкновенную можно выполнить другим способом.*

Рассмотрим обращение чистой и смешанной периодических десятичных дробей в обыкновенные.

а) Обратим в обыкновенную дробь число $0,(13)$.

***Решение*:**

Пусть $x = 0,(13) = 0,1313...$

Умножим чистую периодическую дробь x на такое число, чтобы запятая переместилась ровно на период вправо. Поскольку в периоде две цифры, надо перенести запятую на две цифры вправо, а для этого достаточно умножить число x на 100.

$$x = 0,131313... = 0,(13) \quad | \cdot 100$$

$$100x = 13,1313... = 13,(13).$$

Теперь вычтем из второго соотношения первое:

$100x - x = 13,(13) - 0,(13)$

$99x = 13$

$x = \frac{13}{99}$. **Ответ:** $\frac{13}{99}$.

б) Обратим в обыкновенную дробь число $x = 0,2(54)$.

Решение:

Перенесем в данной смешанной периодической дроби запятую вправо так, чтобы получилась чистая периодическая дробь. Для этого достаточно число x умножить на 10, получим:

$10x = 2,(54)$

Обратим чистую периодическую дробь в обыкновенную так, как мы сделали это в предыдущем примере.

$10x = 2,(54) \quad |\cdot 100$

$1000x = 254,(54)$

$1000x - 10x = 254,(54) - 2,(54)$

$990x = 252$

$x = \frac{252}{990} = \frac{28}{110} = \frac{14}{55}$. **Ответ:** $\frac{14}{55}$.

1.1. Обратите в обыкновенную дробь число:

1) $0,11(7)$ 2) $1,(36)$ 3) $0,2(7)$

Решение:

1) $x = 0,11(7) \quad | \cdot 100$

$100x = 11,(7) \quad | \cdot 10$

$1000x = 117,(7)$

$1000x - 100x = 106$

$900x = 106$

$x = \frac{106}{900} = \frac{53}{450}$.

2) $x = 1,(36) \quad | \cdot 100$

$100x = 136,(36)$

$100x - x = 135$

$99x = 135$

$x = \frac{135}{99} = \frac{15}{11}$.

3) $x = 0,2(7) \quad | \cdot 10$

$10x = 2,(7) \quad | \cdot 10$

$100x = 27,(7)$

$100x - 10x = 25$

$90x = 25$

$x = \frac{25}{90} = \frac{5}{18}$.

3. Можно обратить периодическую десятичную дробь в обыкновенную, используя формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

а) Представим число $5,(4)$ в виде обыкновенной дроби.

Решение:

Запишем данную периодическую дробь в следующем виде:

$$5,(4)=5,444...=5+\frac{4}{10}+\frac{4}{100}+\frac{4}{1000}+...=5+4\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+...\right).$$

В скобках записана сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q=\frac{1}{10}$ и первым членом $b_1=\frac{1}{10}$.

$$S=\frac{b_1}{1-q}=\frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{1}{10}\div\frac{9}{10}=\frac{1}{9}.$$

Получаем: $5,(4)=5+4\cdot\frac{1}{9}=\frac{49}{9}$.

Ответ: $5\frac{4}{9}$.

б) Запишем периодическую дробь $1,2(3)$ в виде обыкновенной.

Решение:

$$1,2(3)=1,2333...=1+\frac{2}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\frac{3}{10000}+...=$$

$$=1+\frac{2}{10}+3\left(\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^4}+...\right)$$

$$S=\frac{b_1}{1-q}=\frac{\frac{1}{10^2}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{1}{100}\div\frac{9}{10}=\frac{1}{90}$$

$$1,2(3)=1+\frac{2}{10}+3\cdot\frac{1}{90}=1+\frac{2}{10}+\frac{1}{30}=\frac{37}{30}.$$

Ответ: $\frac{37}{30}$.

1.2. Вычислите: $\left(\dfrac{0{,}1}{0{,}(4)}+1{,}17\right):\left(1{,}17+\dfrac{0{,}01}{0{,}0(44)}\right)$.

Решение:

$$0{,}(4)=\frac{4}{9}; \qquad 0{,}0(44)=\frac{0{,}(4)}{10}=\frac{4}{90}$$

$$\left(\frac{0{,}1}{\frac{4}{9}}+1{,}17\right):\left(1{,}17+\frac{0{,}01}{\frac{4}{90}}\right)=\left(\frac{9}{40}+1{,}17\right):\left(1{,}17+\frac{9}{40}\right)=1.$$

Ответ: 1.

1.3. Вычислите: $\dfrac{0{,}23(7)+\dfrac{43}{450}}{0{,}5(61)-\dfrac{113}{495}}$.

Решение:

$$0{,}23(7)=\frac{23{,}(7)}{100}=\frac{23+0{,}(7)}{100}=\frac{23+\frac{7}{9}}{100}=\frac{214}{900}=\frac{107}{450}$$

$$0{,}5(61)=\frac{5{,}(61)}{10}=\frac{5+0{,}(61)}{10}=\frac{5+\frac{61}{99}}{10}=\frac{556}{990}=\frac{278}{495}$$

$$\left(\frac{107}{450}+\frac{43}{450}\right):\left(\frac{278}{495}-\frac{113}{495}\right)=\frac{150}{450}:\frac{165}{495}=\frac{1}{3}:\frac{1}{3}=1.$$

Ответ: 1.

1.4. Определите значение x из соотношения: $\dfrac{0{,}1(6)+0{,}(3)}{0{,}(3)+1{,}1(6)}\cdot x=10$.

Решение:

$$0{,}1(6)=\frac{1{,}(6)}{10}=\frac{1+0{,}(6)}{10}=\frac{1+\frac{6}{9}}{10}=\frac{1}{6}; \qquad 0{,}(3)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$$

$$1{,}1(6)=1+0{,}1(6)=1+\frac{1}{6}=\frac{7}{6}$$

Подставим полученные обыкновенные дроби в исходное выражение и найдем значение x:

$$\frac{\frac{1}{6}+\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{7}{6}}\cdot x=10; \qquad \left(\frac{3}{6}:\frac{9}{6}\right)\cdot x=10; \qquad \frac{3}{9}x=10; \qquad x=30$$

Ответ: 30.

Вычисление числовых выражений

При вычислении числовых выражений часто бывает полезным сначала упростить выражение, путем вынесения общего множителя за скобки или с помощью сокращения дробей, и только после этого выполнить непосредственные вычисления.

1.5. Вычислите:

1) $\dfrac{195\cdot 41+5\cdot 41}{465\cdot 82-245\cdot 82}$

2) $\dfrac{3\frac{5}{11}\cdot 6\frac{3}{4}}{3\frac{5}{11}\cdot 6\frac{3}{4}+3\frac{5}{11}\cdot 1\frac{1}{2}}$

3) $\dfrac{8:2\frac{2}{5}}{5\frac{1}{4}:7}:\dfrac{2\frac{1}{7}:\frac{5}{7}}{4:\frac{8}{9}}$

4) $\left(\dfrac{3\left(\frac{17}{90}-0{,}125:1\frac{1}{8}\right):480}{\left(7:1{,}8-2\frac{1}{3}:1{,}5\right):2\frac{2}{3}}\right)^{-1}$

5) $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 6}+\dfrac{1}{6\cdot 7}+\dfrac{1}{7\cdot 8}$

6) $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\dfrac{1}{99\cdot 101}$

7) $7521^2-7522\cdot 7520$

8) $\dfrac{199\cdot 201+299\cdot 301+2}{1999\cdot 2001+2999\cdot 3001+2}$

9) $\dfrac{254\cdot 399-145}{254+399\cdot 253}$

Решение:

1) $$\frac{195\cdot 41+5\cdot 41}{465\cdot 82-245\cdot 82}=\frac{41(195+5)}{82(465-245)}=\frac{41\cdot 200}{82\cdot 220}=\frac{1\cdot 10}{2\cdot 11}=\frac{5}{11}$$

2) $$\frac{3\frac{5}{11}\cdot 6\frac{3}{4}}{3\frac{5}{11}\cdot 6\frac{3}{4}+3\frac{5}{11}\cdot 1\frac{1}{2}}=\frac{3\frac{5}{11}\cdot 6\frac{3}{4}}{3\frac{5}{11}\left(6\frac{3}{4}+1\frac{1}{2}\right)}=6\frac{3}{4}:8\frac{1}{4}=\frac{27}{4}\cdot\frac{4}{33}=\frac{9}{11}$$

3) $\dfrac{8:2\frac{2}{5}}{5\frac{1}{4}:7}:\dfrac{2\frac{1}{7}:\frac{5}{7}}{4:\frac{8}{9}}=\dfrac{8\cdot\frac{5}{12}}{\frac{21}{4}\cdot\frac{1}{7}}\cdot\dfrac{4\cdot\frac{9}{8}}{\frac{15}{7}\cdot\frac{7}{5}}=\left(\frac{10}{3}:\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{9}{2}:\frac{3}{1}\right)=\frac{10}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{20}{3}=6\frac{2}{3}$

4) $\left(\dfrac{3\left(\frac{17}{90}-0{,}125:1\frac{1}{8}\right):480}{\left(7:1{,}8-2\frac{1}{3}:1{,}5\right):2\frac{2}{3}}\right)^{-1}=\left(\dfrac{3\left(\frac{17}{90}-\frac{1}{8}\cdot\frac{8}{9}\right)\cdot\frac{1}{480}}{\left(7\cdot\frac{5}{9}-\frac{7}{3}\cdot\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{3}{8}}\right)^{-1}=\left(\dfrac{3\cdot\frac{17-10}{90}\cdot\frac{1}{480}}{\frac{7(5-2)}{9}\cdot\frac{3}{8}}\right)^{-1}=$

$=\left(\dfrac{3\cdot7\cdot9\cdot8}{7\cdot3\cdot3\cdot90\cdot480}\right)^{-1}=\dfrac{3\cdot480\cdot10}{8}=1800$

5) $\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot4}+\dfrac{1}{4\cdot5}+\dfrac{1}{5\cdot6}+\dfrac{1}{6\cdot7}+\dfrac{1}{7\cdot8}=$

$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{8}\right)=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$

6) $\dfrac{1}{1\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot5}+\dfrac{1}{5\cdot7}+\ldots+\dfrac{1}{99\cdot101}=$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\ldots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{101}\right)=$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{99}-\frac{1}{101}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{101}\right)=\frac{50}{101}$

При преобразовании числовых выражений часто используют введение новой переменной. Это позволяет сделать выражение более компактным.

7) $7521^2-7522\cdot7520=\left|\,7521=x\,\right|=x^2-(x+1)(x-1)=x^2-x^2+1=1$

8) $\dfrac{199\cdot201+299\cdot301+2}{1999\cdot2\,001+2\,999\cdot3\,001+2}=\begin{vmatrix}x=200\\y=300\end{vmatrix}=$

$=\dfrac{(x-1)(x+1)+(y-1)(y+1)+2}{(10x-1)(10x+1)+(10y-1)(10y+1)+2}=\dfrac{x^2+y^2}{100x^2+100y^2}=\dfrac{1}{100}=0{,}01$

9) $\dfrac{254\cdot399-145}{254+399\cdot253}=\dfrac{(253+1)\cdot399-145}{254+399\cdot253}=\dfrac{253\cdot399+399-145}{254+399\cdot253}=$

$=\dfrac{253\cdot399+254}{254+399\cdot253}=1.$

Наибольший общий делитель, Наименьшее общее кратное

Наибольшим общим делителем (НОД) нескольких чисел называется наибольшее число, на которое все данные числа делятся без остатка.

Наименьшим общим кратным (НОК) нескольких чисел называется наименьшее число, которое делится на каждое из данных чисел без остатка.

Для любых натуральных чисел a и b справедливо равенство:

$$\text{НОД}(a;b)\cdot\text{НОК}(a;b)=a\cdot b$$

Примеры:

а) $42=2\cdot3\cdot7$; $\quad 140=2^2\cdot5\cdot7$; $\quad 882=2\cdot3^2\cdot7^2$.

$\text{НОД}(42;140;882)=2\cdot7=14$

$\text{НОК}(42;140;882)=\underbrace{2\cdot3^2\cdot7^2}_{882}\cdot2\cdot5=882\cdot10=8820$

б) $126=2\cdot3^2\cdot7$; $\quad 540=2^2\cdot3^3\cdot5$; $\quad 630=2\cdot3^2\cdot5\cdot7$.

$\text{НОД}(126;540;630)=2\cdot3^2=18$

$\text{НОК}(126;540;630)=\underbrace{2\cdot3^2\cdot5\cdot7}_{630}\cdot2\cdot3=630\cdot6=3780$

в) Известно, что $\text{НОД}(38;b)=2$, а $\text{НОК}(38;b)=1216$. Найдите b.

Решение:

$\text{НОД}(38;b)\cdot\text{НОК}(38;b)=38\cdot b$

$2\cdot1216=38\cdot b$

$b=\dfrac{2\cdot1216}{38}=\dfrac{1216}{19}=64$.

Ответ: 64.

Применение формул сокращенного умножения

Формулы сокращенного умножения часто применяются для упрощения числовых выражений.

1.6. Вычислите:

1) $\sqrt{\dfrac{149^2-76^2}{457^2-384^2}}$ $\qquad$ 2) $\dfrac{71^2-23^2+94\cdot42}{62^2-32^2}$

3) $\sqrt{9^2\cdot 5{,}3^2-25{,}2^2}$

4) $0{,}3\sqrt{\frac{115^2-15^2}{130}}+\frac{1}{17}\sqrt{\frac{273^2-16^2}{257}}$

5) $\sqrt{\frac{\left(\sqrt{11}\right)^3-\left(\sqrt{7}\right)^3}{\sqrt{11}-\sqrt{7}}+\sqrt{77}}\cdot\left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right)$

6) $\frac{27\cdot\left(1{,}7^3-1{,}5^3\right)}{5{,}1^2+5{,}1\cdot 4{,}5+4{,}5^2}$

7) $\left(\frac{\sqrt{561^2-459^2}}{4\frac{2}{7}\cdot 0{,}15+4\frac{2}{7}:\frac{20}{3}}+4\sqrt{10}\right):\frac{1}{3}\sqrt{40}$

8) $0{,}125\cdot\left(2{,}1^3+12\cdot 2{,}1\cdot 1{,}9+1{,}9^3\right)$

9) $0{,}298^3+3\cdot 0{,}298\cdot 0{,}702+0{,}702^3$

10) $27^5-25\cdot 26\cdot 27\cdot 28\cdot 29-15\cdot 81^2$

11) $3\cdot 5\cdot\left(4^2+1\right)\left(4^4+1\right)\left(4^8+1\right)-16^8-4$

Решение:

1) $\sqrt{\frac{149^2-76^2}{457^2-384^2}}=\sqrt{\frac{(149-76)(149+76)}{(457-384)(457+384)}}=\sqrt{\frac{73\cdot 225}{73\cdot 841}}=\sqrt{\frac{225}{841}}=\frac{15}{29}$

2) $\frac{71^2-23^2+94\cdot 42}{62^2-32^2}=\frac{(71-23)(71+23)+94\cdot 42}{(62-32)(62+32)}=\frac{48\cdot 94+94\cdot 42}{30\cdot 94}=$

$=\frac{94(48+42)}{94\cdot 30}=3$

3) $\sqrt{9^2\cdot 5{,}3^2-25{,}2^2}=\sqrt{9^2\cdot 5{,}3^2-9^2\cdot 2{,}8^2}=\sqrt{9^2\cdot\left(5{,}3^2-2{,}8^2\right)}=$

$=\sqrt{9^2\cdot(5{,}3-2{,}8)(5{,}3+2{,}8)}=9\sqrt{2{,}5\cdot 8{,}1}=9\sqrt{\frac{25\cdot 81}{100}}=\frac{9\cdot 5\cdot 9}{10}=40{,}5$

4) $0{,}3\sqrt{\frac{115^2-15^2}{130}}+\frac{1}{17}\sqrt{\frac{273^2-16^2}{257}}=0{,}3\sqrt{\frac{100\cdot 130}{130}}+\frac{1}{17}\sqrt{\frac{257\cdot 289}{257}}=$

$=0{,}3\cdot 10+\frac{1}{17}\cdot 17=4$

5) $\sqrt{\frac{\left(\sqrt{11}\right)^3-\left(\sqrt{7}\right)^3}{\sqrt{11}-\sqrt{7}}+\sqrt{77}}\cdot\left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right)=\sqrt{\frac{\left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right)\left(11+\sqrt{77}+7\right)}{\sqrt{11}-\sqrt{7}}+\sqrt{77}}\times$

$$\times\left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right)=\sqrt{11+2\sqrt{77}+7}\cdot\left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right)=\sqrt{\left(\sqrt{11}+\sqrt{7}\right)^2}\cdot\left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right)=$$

$$=\left(\sqrt{11}+\sqrt{7}\right)\cdot\left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right)=4$$

6) $$\frac{27\cdot\left(1,7^3-1,5^3\right)}{5,1^2+5,1\cdot4,5+4,5^2}=\frac{27\cdot\left(1,7^3-1,5^3\right)}{3^2\left(1,7^2+1,7\cdot1,5+1,5^2\right)}=$$

$$=\frac{3(1,7-1,5)\left(1,7^2+1,7\cdot1,5+1,5^2\right)}{1,7^2+1,7\cdot1,5+1,5^2}=3\cdot0,2=0,6$$

7) $$\left(\frac{\sqrt{561^2-459^2}}{4\frac{2}{7}\cdot0,15+4\frac{2}{7}:\frac{20}{3}}+4\sqrt{10}\right):\frac{1}{3}\sqrt{40}=\left(\frac{\sqrt{102\cdot1020}}{4\frac{2}{7}(0,15+0,15)}+4\sqrt{10}\right):\frac{2}{3}\sqrt{10}=$$

$$=\left(\frac{102\sqrt{10}}{\frac{30}{7}\cdot\frac{3}{10}}+4\sqrt{10}\right)\cdot\frac{3}{2\sqrt{10}}=\left(\frac{238\sqrt{10}}{3}+4\sqrt{10}\right)\cdot\frac{3}{2\sqrt{10}}=\frac{250\sqrt{10}}{3}\cdot\frac{3}{2\sqrt{10}}=125$$

8) $$0,125\cdot\left(2,1^3+12\cdot2,1\cdot1,9+1,9^3\right)=\left|\,a^3+3ab(a+b)+b^3=(a+b)^3\,\right|=$$

$$=0,125\cdot\left(2,1^3+3\cdot2,1\cdot1,9\cdot\underbrace{(2,1+1,9)}_{=4}+1,9^3\right)=\frac{1}{8}(2,1+1,9)^3=\frac{1}{8}\cdot4^3=8$$

9) $$0,298^3+3\cdot0,298\cdot0,702+0,702^3=\left|\,(a+b)^3=a^3+3ab(a+b)+b^3\,\right|=$$

$$=0,298^3+3\cdot0,298\cdot0,702\cdot\underbrace{(0,298+0,702)}_{=1}+0,702^3=(0,298+0,702)^3=1$$

10) $$27^5-25\cdot26\cdot27\cdot28\cdot29-15\cdot81^2=|27=x|=x^5-(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)-$$

$$-15\cdot3^2\cdot x^2=x^5-x\left(x^2-4\right)\left(x^2-1\right)-15\cdot9x^2=x^5-x^5+5x^3-4x-15\cdot9x^2=$$

$$=5\cdot27^3-4\cdot27-3\cdot5\cdot9\cdot27^2=5\cdot3^9-108-5\cdot3^9=-108$$

11) Умножим и разделим выражение $3\cdot 5\cdot(4^2+1)(4^4+1)(4^8+1)$ на разность (4^2-1), и "свернем" по формуле сокращенного умножения:

$$3\cdot 5\cdot(4^2+1)(4^4+1)(4^8+1)\cdot\frac{(4^2-1)}{(4^2-1)}-16^8-4=\frac{15\cdot(4^2-1)(4^2+1)(4^4+1)(4^8+1)}{(4^2-1)}-$$

$$-16^8-4=\frac{15\cdot(4^4-1)(4^4+1)(4^8+1)}{15}-16^8-4=(4^8-1)(4^8+1)-16^8-4=$$

$$=4^{16}-1-16^8-4=4^{16}-1-4^{16}-4=-5.$$

Сокращение дробей

Сократить дробь – значит разделить числитель и знаменатель дроби на одно и то же число или выражение.

1.7. Сократите дробь:

1) $\dfrac{21^8\cdot 4^6}{3^{21}\cdot 7^5}:\dfrac{8^5\cdot 49^3}{14^4\cdot 9^5}$

2) $\dfrac{7^8\cdot 49^{-2}\cdot 5^4+49\cdot 125\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}}{(7\cdot 5)^4\cdot 7^{-3}}$

3) $\dfrac{\sqrt{21}+\sqrt{14}}{\sqrt{7}}$

4) $\dfrac{2\sqrt{10}+4-2\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}-1}$

5) $\dfrac{2\sqrt{10}-5}{4-\sqrt{10}}$

6) $\dfrac{9-2\sqrt{3}}{3\sqrt{6}-2\sqrt{2}}$

7) $\dfrac{(\sqrt{10}-1)^2-3}{\sqrt{10}+\sqrt{3}-1}$

8) $\dfrac{\sqrt[8]{9}\cdot\sqrt[3]{40}\cdot\sqrt[4]{4}}{\sqrt[6]{25}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{3}}$

9) $\dfrac{(\sqrt{5}-\sqrt{11})(\sqrt{33}+\sqrt{15}-\sqrt{22}-\sqrt{10})}{\sqrt{75}-\sqrt{50}}$

10) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}-1}{\sqrt{6}+2\sqrt{3}-\sqrt{2}-2}$

11) $\dfrac{6^{3+\sqrt{5}}}{3^{2+\sqrt{5}}\cdot 2^{1+\sqrt{5}}}$

12) $\dfrac{100^n}{2^{2n+1}\cdot 5^{2n-2}}$, $n\in\mathbb{N}$

13) $\dfrac{4\cdot 18^n}{3^{2n-1}\cdot 2^{n+1}}$, $n\in\mathbb{N}$

14) $\dfrac{(8^{k+1}+8^k)^2}{(4^k-4^{k-1})^3}$, $k\in\mathbb{N}$

Решение:

1) $\dfrac{21^8\cdot 4^6}{3^{21}\cdot 7^5}:\dfrac{8^5\cdot 49^3}{14^4\cdot 9^5}=\dfrac{3^8\cdot 7^8\cdot 2^{12}\cdot 7^4\cdot 2^4\cdot 3^{10}}{3^{21}\cdot 7^5\cdot 2^{15}\cdot 7^6}=\dfrac{2^{16}\cdot 3^{18}\cdot 7^{12}}{2^{15}\cdot 3^{21}\cdot 7^{11}}=2\cdot 3^{-3}\cdot 7=\dfrac{14}{27}$

2) $\dfrac{7^8\cdot 49^{-2}\cdot 5^4+49\cdot 125\cdot\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-1}}{(7\cdot 5)^4\cdot 7^{-3}}=\dfrac{7^8\cdot 7^{-4}\cdot 5^4+7^2\cdot 5^3\cdot 5}{7^4\cdot 5^4\cdot 7^{-3}}=\dfrac{7^4\cdot 5^4+7^2\cdot 5^4}{7\cdot 5^4}=$

$=\dfrac{7^2\cdot 5^4\cdot\left(7^2+1\right)}{7\cdot 5^4}=7\cdot 50=350$

3) $\dfrac{\sqrt{21}+\sqrt{14}}{\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{7}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{7}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$

4) $\dfrac{2\sqrt{10}+4-2\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}-1}=\dfrac{2\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}+2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}-2\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}-1}=\dfrac{2\sqrt{2}\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}-1\right)}{\sqrt{5}+\sqrt{2}-1}=2\sqrt{2}$

5) $\dfrac{2\sqrt{10}-5}{4-\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{5}\cdot\left(2\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)}{\sqrt{2}\cdot\left(2\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)}=\sqrt{\dfrac{5}{2}}$

6) $\dfrac{9-2\sqrt{3}}{3\sqrt{6}-2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}\cdot\left(3\sqrt{3}-2\right)}{\sqrt{2}\cdot\left(3\sqrt{3}-2\right)}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}$

7) $\dfrac{\left(\sqrt{10}-1\right)^2-3}{\sqrt{10}+\sqrt{3}-1}=\dfrac{\left(\sqrt{10}-1\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}{\sqrt{10}+\sqrt{3}-1}=\dfrac{\left(\sqrt{10}-1+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{10}-1-\sqrt{3}\right)}{\sqrt{10}+\sqrt{3}-1}=$

$=\sqrt{10}-1-\sqrt{3}$

8) $\dfrac{\sqrt[8]{9}\cdot\sqrt[3]{40}\cdot\sqrt[4]{4}}{\sqrt[6]{25}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{3}}=\dfrac{\sqrt[8]{3^2}\cdot\sqrt[3]{2^3\cdot 5}\cdot\sqrt[4]{2^2}}{\sqrt[6]{5^2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{3}}=\dfrac{\sqrt[4]{3}\cdot 2\cdot\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{3}}=2$

9) $\dfrac{\left(\sqrt{5}-\sqrt{11}\right)\left(\sqrt{3\cdot 11}+\sqrt{3\cdot 5}-\sqrt{2\cdot 11}-\sqrt{2\cdot 5}\right)}{\sqrt{25\cdot 3}-\sqrt{25\cdot 2}}=$

$=\dfrac{\left(\sqrt{5}-\sqrt{11}\right)\left(\sqrt{3}\left(\sqrt{11}+\sqrt{5}\right)-\sqrt{2}\left(\sqrt{11}+\sqrt{5}\right)\right)}{5\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}=$

$$=\frac{\left(\sqrt{5}-\sqrt{11}\right)\left(\sqrt{11}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{5\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}=\frac{5-11}{5}=-\frac{6}{5}=-1,2$$

10) $$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}-1}{\sqrt{6}+2\sqrt{3}-\sqrt{2}-2}=\frac{\sqrt{3\cdot 2}+\sqrt{3}-\sqrt{2}-1}{\sqrt{3\cdot 2}-\sqrt{2}+2\sqrt{3}-2}=\frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{2}+1\right)-\left(\sqrt{2}+1\right)}{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)+2\left(\sqrt{3}-1\right)}=$$

$$\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{2}+2\right)}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+2}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

11) $$\frac{6^{3+\sqrt{5}}}{3^{2+\sqrt{5}}\cdot 2^{1+\sqrt{5}}}=\frac{6^2\cdot 6^{1+\sqrt{5}}}{3\cdot 3^{1+\sqrt{5}}\cdot 2^{1+\sqrt{5}}}=\frac{36\cdot 6^{1+\sqrt{5}}}{3\cdot 6^{1+\sqrt{5}}}=12$$

12) $$\frac{100^n}{2^{2n+1}\cdot 5^{2n-2}}=\frac{\left(2^2\cdot 5^2\right)^n}{2^{2n+1}\cdot 5^{2n-2}}=2^{2n-2n-1}\cdot 5^{2n-2n+2}=2^{-1}\cdot 5^2=\frac{25}{2}$$

13) $$\frac{4\cdot 18^n}{3^{2n-1}\cdot 2^{n+1}}=\frac{2^{n+2}\cdot 3^{2n}}{2^{n+1}\cdot 3^{2n-1}}=2^{n+2-n-1}\cdot 3^{2n-2n+1}=2\cdot 3=6$$

14) $$\frac{\left(8^{k+1}+8^k\right)^2}{\left(4^k-4^{k-1}\right)^3}=\frac{\left(8^k(8+1)\right)^2}{\left(4^{k-1}(4-1)\right)^3}=\frac{8^{2k}\cdot 9^2}{4^{3(k-1)}\cdot 3^3}=\frac{3\cdot 2^{6k}}{2^{6k}\cdot 2^{-6}}=\frac{3}{2^{-6}}=3\cdot 64=192.$$

Освобождение от иррациональности

<u>**Определение**</u>. Замена дроби, знаменатель которой – иррациональное выражение, тождественно равной ей дробью, знаменатель которой – рациональное выражение, называется освобождением от иррациональности в знаменателе.

Аналогично определяется освобождение от иррациональности в числителе.

Приведем примеры такого преобразования числовых иррациональных выражений.

1.8. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

1) $\frac{4}{\sqrt{10}+\sqrt{2}}$ 2) $\frac{17}{3\sqrt{5}-2\sqrt{7}}$ 3) $\frac{7}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

4) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}}$ 5) $\dfrac{4}{2-3\sqrt[3]{2}}$ 6) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}$

7) $\dfrac{1}{1-\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}$ 8) $\dfrac{1}{\sqrt{10}-\sqrt{15}+\sqrt{14}-\sqrt{21}}$

Решение:

Используем основное свойство дроби, то есть подбираем такой множитель, чтобы при умножении на него в знаменателе дроби не оказалось корней.

1) $\dfrac{4}{\sqrt{10}+\sqrt{2}}$

Числитель и знаменатель дроби следует умножить на сопряженное выражение $\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)$ и применить формулу сокращенного умножения для разности квадратов двух чисел:

$$\frac{4\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{10}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)}=\frac{4\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{10}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{4\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)}{8}=\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}$$

2) $$\frac{17}{3\sqrt{5}-2\sqrt{7}}=\frac{17\cdot\left(3\sqrt{5}+2\sqrt{7}\right)}{\left(3\sqrt{5}-2\sqrt{7}\right)\cdot\left(3\sqrt{5}+2\sqrt{7}\right)}=\frac{17\cdot\left(3\sqrt{5}+2\sqrt{7}\right)}{45-28}=3\sqrt{5}+2\sqrt{7}$$

3) $$\frac{7}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}=\frac{7\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}}=7\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

4) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}}$

Умножим числитель и знаменатель дроби на выражение, дополняющее знаменатель до *разности кубов*, то есть на соответствующий неполный квадрат суммы чисел $\sqrt[3]{5}$ и $\sqrt[3]{2}$:

$$\frac{\sqrt[3]{5^2}+\sqrt[3]{5\cdot 2}+\sqrt[3]{2^2}}{\left(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt[3]{5^2}+\sqrt[3]{5\cdot 2}+\sqrt[3]{2^2}\right)}=\frac{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}}{\left(\sqrt[3]{5}\right)^3-\left(\sqrt[3]{2}\right)^3}=\frac{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}}{3}$$

5) $\frac{4}{2-3\sqrt[3]{2}}=\frac{4\cdot\left(4+6\sqrt[3]{2}+9\sqrt[3]{4}\right)}{\left(2-3\sqrt[3]{2}\right)\cdot\left(4+6\sqrt[3]{2}+9\sqrt[3]{4}\right)}=\frac{4\cdot\left(4+6\sqrt[3]{2}+9\sqrt[3]{4}\right)}{8-54}=$

$=\frac{-2\left(4+6\sqrt[3]{2}+9\sqrt[3]{4}\right)}{23}$

6) $\frac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}=\frac{1}{\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3\cdot 2}+\sqrt[3]{2^2}}$

Можно заметить, что знаменатель дроби представляет собой неполный квадрат суммы чисел $\sqrt[3]{3}$ и $\sqrt[3]{2}$. Умножим числитель и знаменатель дроби на разность этих чисел и "свернем" выражение в знаменателе по формуле разности кубов двух чисел:

$$\frac{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}{\left(\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3\cdot 2}+\sqrt[3]{2^2}\right)\left(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}\right)}=\frac{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}{\left(\sqrt[3]{3}\right)^3-\left(\sqrt[3]{2}\right)^3}=\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}$$

7) $\frac{1}{1-\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}=\frac{1+\sqrt[3]{3}}{\left(1-\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}\right)\left(1+\sqrt[3]{3}\right)}=\frac{1+\sqrt[3]{3}}{1+\left(\sqrt[3]{3}\right)^3}=\frac{\sqrt[3]{3}+1}{4}$

8) $\frac{1}{\sqrt{10}-\sqrt{15}+\sqrt{14}-\sqrt{21}}$

Разложим знаменатель дроби на множители:

$$\frac{1}{\sqrt{5}\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)+\sqrt{7}\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}=\frac{1}{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)}$$

Умножим числитель и знаменатель дроби на выражения, сопряженные знаменателю:

$$\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{7}\right)}{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{7}\right)}=\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{7}\right)}{\left(\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2\right)\left(\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2\right)}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{7}\right)}{2}.$$

В более сложных случаях освобождаются от иррациональности не сразу, а в несколько приемов.

1.9. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

1) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt[4]{3}}$ 2) $\frac{1}{\sqrt[4]{7}+\sqrt[4]{2}}$ 3) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}}$

4) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ 5) $\frac{12}{3+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

Решение:

1) Дважды умножим и числитель, и знаменатель дроби на выражения, сопряженные знаменателю:

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt[4]{3}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt[4]{3}}{\left(\sqrt{2}+\sqrt[4]{3}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt[4]{3}\right)}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt[4]{3}}{\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt[4]{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt[4]{3}}{2-\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{2}-\sqrt[4]{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}=\left(\sqrt{2}-\sqrt[4]{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)$$

2) $$\frac{1}{\sqrt[4]{7}+\sqrt[4]{2}}=\frac{\sqrt[4]{7}-\sqrt[4]{2}}{\left(\sqrt[4]{7}+\sqrt[4]{2}\right)\left(\sqrt[4]{7}-\sqrt[4]{2}\right)}=\frac{\sqrt[4]{7}-\sqrt[4]{2}}{\left(\sqrt[4]{7}\right)^2-\left(\sqrt[4]{2}\right)^2}=\frac{\sqrt[4]{7}-\sqrt[4]{2}}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt[4]{7}-\sqrt[4]{2}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{7}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{2}\right)}=\frac{\left(\sqrt[4]{7}-\sqrt[4]{2}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{7}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{\left(\sqrt[4]{7}-\sqrt[4]{2}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{2}\right)}{5}$$

3) $$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}}{\left(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}\right)}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}}{\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt[3]{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}}{2-\sqrt[3]{9}}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}\right)\left(4+2\cdot\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{81}\right)}{\left(2-\sqrt[3]{9}\right)\left(4+2\cdot\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{81}\right)}=\frac{\left(\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}\right)\left(4+2\cdot\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{81}\right)}{(2)^3-\left(\sqrt[3]{9}\right)^3}=$$

$$=\left(\sqrt[3]{3}-\sqrt{2}\right)\left(4+2\cdot\sqrt[3]{9}+3\cdot\sqrt[3]{3}\right)$$

4) $$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\frac{1}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)}{12}=$$

$$=\frac{\sqrt{12}+\sqrt{18}-\sqrt{30}}{12}=\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12}$$

5) Умножим числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное знаменателю. После упрощения в полученной дроби сделаем то же самое. Получим:

$$\frac{12}{\left(3+\sqrt{2}\right)-\sqrt{3}}=\frac{12\left(3+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{\left(3+\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(3+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}=\frac{12\left(3+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{\left(3+\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=$$

$$=\frac{12\left(3+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{8+6\sqrt{2}}=\frac{6\left(3+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{4+3\sqrt{2}}=\frac{6\left(3+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(4-3\sqrt{2}\right)}{\left(4+3\sqrt{2}\right)\left(4-3\sqrt{2}\right)}=$$

$$=\frac{6\left(3+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(4-3\sqrt{2}\right)}{-2}=3\left(3+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(3\sqrt{2}-4\right)=$$

$$=3\left(9\sqrt{2}-12+6-4\sqrt{2}+3\sqrt{6}-4\sqrt{3}\right)=3\left(5\sqrt{2}-6+3\sqrt{6}-4\sqrt{3}\right).$$

1.10. Вычислите:

1) $\dfrac{9}{5-\sqrt{7}}-\dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}+\dfrac{22}{7+\sqrt{5}}$

2) $\left(\dfrac{12}{\sqrt{5}-1}-\dfrac{71}{3+4\sqrt{5}}\right)\cdot\left(\dfrac{8}{\sqrt{5}-1}+\dfrac{11}{4+\sqrt{5}}\right)$

3) $\dfrac{\sqrt[3]{\left(6-\sqrt{35}\right)^2}}{\sqrt[3]{6+\sqrt{35}}}+\sqrt{35}$

Решение:

Предварительно освободимся от иррациональности в знаменателе каждой дроби.

1) $$\frac{9}{5-\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}+\frac{22}{7+\sqrt{5}}=\frac{9\left(5+\sqrt{7}\right)}{\left(5-\sqrt{7}\right)\left(5+\sqrt{7}\right)}-\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)}+$$

$$+\frac{22\left(7-\sqrt{5}\right)}{\left(7+\sqrt{5}\right)\left(7-\sqrt{5}\right)}=\frac{9\left(5+\sqrt{7}\right)}{18}-\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}+\frac{22\left(7-\sqrt{5}\right)}{44}=$$

$$=\frac{5+\sqrt{7}}{2}-\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}+\frac{7-\sqrt{5}}{2}=\frac{1}{2}\left(5+\sqrt{7}-\sqrt{7}+\sqrt{5}+7-\sqrt{5}\right)=6$$

2) $$\left(\frac{12}{\sqrt{5}-1}-\frac{71}{3+4\sqrt{5}}\right)\cdot\left(\frac{8}{\sqrt{5}-1}+\frac{11}{4+\sqrt{5}}\right)=\left(\frac{12\left(\sqrt{5}+1\right)}{\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)}-\frac{71\left(3-4\sqrt{5}\right)}{\left(3+4\sqrt{5}\right)\left(3-4\sqrt{5}\right)}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{8(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}+\frac{11(4-\sqrt{5})}{(4+\sqrt{5})(4-\sqrt{5})}\right)=\left(\frac{12(\sqrt{5}+1)}{4}-\frac{71(3-4\sqrt{5})}{-71}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{8(\sqrt{5}+1)}{4}+\frac{11(4-\sqrt{5})}{11}\right)=\left(3\sqrt{5}+3+3-4\sqrt{5}\right)\cdot\left(2\sqrt{5}+2+4-\sqrt{5}\right)=$$

$$=\left(6-\sqrt{5}\right)\cdot\left(6+\sqrt{5}\right)=31$$

3) $$\frac{\sqrt[3]{\left(6-\sqrt{35}\right)^2}}{\sqrt[3]{6+\sqrt{35}}}+\sqrt{35}=\sqrt[3]{\frac{\left(6-\sqrt{35}\right)^2\cdot\left(6-\sqrt{35}\right)}{\left(6+\sqrt{35}\right)\cdot\left(6-\sqrt{35}\right)}}+\sqrt{35}=\sqrt[3]{\frac{\left(6-\sqrt{35}\right)^3}{36-35}}+\sqrt{35}=$$

$$=6-\sqrt{35}+\sqrt{35}=6.$$

Преобразование двойных радикалов

Выражение вида $\sqrt{a+b\sqrt{c}}$, где a, b и c – некоторые числа, называется двойным или сложным радикалом.

При преобразовании выражений, содержащих двойные радикалы, часто оказывается удобным освободиться в двойном радикале от внешнего радикала.

Если подкоренное выражение представляет собой полный квадрат, то освободиться от внешнего радикала можно с помощью тождества:

$$\sqrt{a^2}=|a|.$$

1.11. Освободитесь от внешнего радикала, представив подкоренное выражение в виде квадрата:

1) $\sqrt{17+2\sqrt{30}}$
2) $\sqrt{19-2\sqrt{34}}$

3) $\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}$
4) $\sqrt{17-4\sqrt{9+4\sqrt{5}}}$

5) $\sqrt[4]{7+\sqrt{48}}$
6) $\sqrt{\left(3-2\sqrt{3}\right)^2}+3$

7) $\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt{\left(3-\sqrt{5}\right)^2}$
8) $\sqrt{28-10\sqrt{3}}\cdot\left(5+\sqrt{3}\right)$

9) $\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2$

10) $\sqrt{16+\sqrt{31}}\cdot\sqrt{16-\sqrt{31}}$

11) $\sqrt[3]{12-\sqrt{80}}\cdot\left(12+80^{0,5}\right)^{\frac{1}{3}}$

12) $\left(\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\right)\cdot\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$

13) $\left(\sqrt{7+2\sqrt{10}}-\sqrt{7-2\sqrt{10}}\right)\cdot 3\sqrt{50}$

14) $\sqrt[3]{\left(\sqrt{3}-2\right)^3}-\sqrt{7-4\sqrt{3}}$

15) Вычислите 50% от числа $A=\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}$

Решение:

1) $\sqrt{17+2\sqrt{30}}=\sqrt{15+2+2\sqrt{15\cdot 2}}=\sqrt{\left(\sqrt{15}+\sqrt{2}\right)^2}=\left|\sqrt{15}+\sqrt{2}\right|=\sqrt{15}+\sqrt{2}$

2) $\sqrt{19-2\sqrt{34}}=\sqrt{2+17-2\sqrt{2\cdot 17}}=\sqrt{\left(\sqrt{2}-\sqrt{17}\right)^2}=\left|\sqrt{2}-\sqrt{17}\right|=$

$=-\left(\sqrt{2}-\sqrt{17}\right)=\sqrt{17}-\sqrt{2}$

3) $\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}=\sqrt{2+\sqrt{8+1+4\sqrt{2}}}=\sqrt{2+\sqrt{\left(2\sqrt{2}+1\right)^2}}=\sqrt{2+2\sqrt{2}+1}=$

$=\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}=\left|\sqrt{2}+1\right|=\sqrt{2}+1$

4) $\sqrt{17-4\sqrt{9+4\sqrt{5}}}=\sqrt{17-4\sqrt{5+4\sqrt{5}+4}}=\sqrt{17-4\sqrt{\left(\sqrt{5}+2\right)^2}}=$

$=\sqrt{17-4\left|\sqrt{5}+2\right|}=\sqrt{9-4\sqrt{5}}=\sqrt{5-4\sqrt{5}+4}=\sqrt{\left(\sqrt{5}-2\right)^2}=$

$=\left|\sqrt{5}-2\right|=\sqrt{5}-2$

5) $\sqrt[4]{7+\sqrt{48}}=\sqrt[4]{7+4\sqrt{3}}=\sqrt[4]{4+3+4\sqrt{3}}=\sqrt[4]{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{2+\sqrt{3}}=$

$=\sqrt{\frac{1}{2}\left(4+2\sqrt{3}\right)}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(3+1+2\sqrt{3}\right)}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+1\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left|\sqrt{3}+1\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{3}+1\right)$

6) $\sqrt{\left(3-2\sqrt{3}\right)^2}+3=\left|3-2\sqrt{3}\right|+3=-\left(3-2\sqrt{3}\right)+3=-3+2\sqrt{3}+3=2\sqrt{3}$,

так как $3-2\sqrt{3}\approx-0,46<0$

7) $\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt{\left(3-\sqrt{5}\right)^2}=\left|2-\sqrt{5}\right|+\left|3-\sqrt{5}\right|=-\left(2-\sqrt{5}\right)+\left(3-\sqrt{5}\right)=1$,

так как $2-\sqrt{5}<0$; $3-\sqrt{5}>0$.

8) $\sqrt{28-10\sqrt{3}}\cdot\left(5+\sqrt{3}\right)=\sqrt{25+3-2\cdot5\cdot\sqrt{3}}\cdot\left(5+\sqrt{3}\right)=$

$=\sqrt{\left(\sqrt{3}-5\right)^2}\cdot\left(5+\sqrt{3}\right)=\left|\sqrt{3}-5\right|\cdot\left(5+\sqrt{3}\right)=\left(5-\sqrt{3}\right)\cdot\left(5+\sqrt{3}\right)=25-3=22$

9) $\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2=\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)^2+2\sqrt{\left(3+\sqrt{5}\right)\left(3-\sqrt{5}\right)}+\left(\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2=$

$=3+\sqrt{5}+2\sqrt{4}+3-\sqrt{5}=10$

10) $\sqrt{16+\sqrt{31}}\cdot\sqrt{16-\sqrt{31}}=\sqrt{\left(16+\sqrt{31}\right)\left(16-\sqrt{31}\right)}=\sqrt{16^2-31}=\sqrt{225}=15$

11) $\sqrt[3]{12-\sqrt{80}}\cdot\sqrt[3]{12+\sqrt{80}}=\sqrt[3]{\left(12-\sqrt{80}\right)\left(12+\sqrt{80}\right)}=\sqrt[3]{144-80}=\sqrt[3]{64}=4$

12) $\left(\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\right)\cdot\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}=\left(\sqrt[6]{\left(2+\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\right)\cdot\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}=$

$=\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\right)\cdot\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}=2\cdot\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}=$

$=2\cdot\sqrt[3]{\left(\sqrt{5}-2\right)\left(\sqrt{5}+2\right)}=2\cdot\sqrt[3]{5-4}=2$

13) $\left(\sqrt{7+2\sqrt{10}}-\sqrt{7-2\sqrt{10}}\right)\cdot3\sqrt{50}=\left(\sqrt{\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2}\right)\cdot15\sqrt{2}=$

$=\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}-\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\right)\cdot15\sqrt{2}=2\sqrt{2}\cdot15\sqrt{2}=60$

14) $\sqrt[3]{\left(\sqrt{3}-2\right)^3}-\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\sqrt[3]{\left(\sqrt{3}-2\right)^3}-\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{3}-2-\left|2-\sqrt{3}\right|=$

$=\sqrt{3}-2-\left(2-\sqrt{3}\right)=2\sqrt{3}-4$

15) $A=\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}-\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}=\left|1+\sqrt{3}\right|-\left|1-\sqrt{3}\right|=$

$=1+\sqrt{3}-\left(\sqrt{3}-1\right)=2$

50% от числа A составляет: $\dfrac{A}{100\%}\cdot50\%=\dfrac{2}{100}\cdot50=1$.

1.12. Вычислите:

1) $\sqrt[3]{2\sqrt{2\cdot\sqrt[3]{2}}}$

2) $\dfrac{\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[4]{2}}{\sqrt[6]{6}}$

3) $\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{27}\cdot\sqrt[3]{9}-\sqrt[5]{2}:\sqrt[5]{-64}$

4) $\sqrt{150}-\sqrt{96}-\sqrt{\dfrac{2}{3}}-\dfrac{1}{\sqrt{6}}$

5) $2\sqrt{32}-\dfrac{1}{3}\sqrt{18}-\dfrac{1}{2}\sqrt{50}-\dfrac{1}{2}\sqrt{2}+3\sqrt{8}$

6) $4\cdot\sqrt{7\dfrac{1}{2}}-\dfrac{2\sqrt{10}}{2\sqrt{3}-\sqrt{10}}$

7) $\dfrac{\left(\sqrt{75}+\sqrt{50}\right)\left(5-2\sqrt{6}\right)}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

8) $\sqrt{\dfrac{2}{5}}+\sqrt{\dfrac{5}{2}}+\sqrt{10}$

9) $\left(6\cdot\sqrt[3]{500}-5\cdot\sqrt[3]{108}\right):\sqrt[5]{8\cdot\sqrt[3]{2}}$

10) $3\sqrt{15\sqrt{75}}-7\sqrt{6\sqrt{12}}$

11) $\sqrt[3]{54\cdot32}-\sqrt[4]{8\cdot162}+\sqrt[3]{42\dfrac{7}{8}}$

12) $\sqrt{\sqrt{55}\cdot\sqrt{275}\cdot\sqrt{605}}$

Решение:

1) $\sqrt[3]{2\sqrt{2\cdot\sqrt[3]{2}}}=\sqrt[3]{2\sqrt{\sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{2}}}=\sqrt[3]{2\sqrt{\sqrt[3]{2^3\cdot2}}}=\sqrt[3]{2\sqrt{\sqrt[3]{2^4}}}=\sqrt[3]{2\cdot\sqrt[6]{2^4}}=$

$=\sqrt[3]{2\cdot\sqrt[3]{2^2}}=\sqrt[3]{\sqrt[3]{2^3\cdot2^2}}=\sqrt[3]{\sqrt[3]{2^5}}=\sqrt[9]{2^5}=\sqrt[9]{32}$

2) Приведем радикалы к одному показателю:

$$\frac{\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[4]{2}}{\sqrt[6]{6}}=\frac{\sqrt[12]{3^4}\ \sqrt[12]{2^3}}{\sqrt[12]{6^2}}=\sqrt[12]{\frac{3^4\cdot2^3}{3^2\cdot2^2}}=\sqrt[12]{3^2\cdot2}=\sqrt[12]{18}$$

3) $\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{27}\cdot\sqrt[3]{9}-\sqrt[5]{2}:\sqrt[5]{-64}=3\cdot\sqrt[3]{27}-\sqrt[5]{-\dfrac{2}{64}}=9-\sqrt[5]{-\dfrac{1}{32}}=9-\left(-\dfrac{1}{2}\right)=9{,}5$

4) Вынесем из-под знака радикала множители, из которых можно извлечь корень, а в знаменателях дробей освободимся от иррациональности:

$$\sqrt{150}-\sqrt{96}-\sqrt{\frac{2}{3}}-\frac{1}{\sqrt{6}}=\sqrt{25\cdot 6}-\sqrt{16\cdot 6}-\frac{\sqrt{6}}{3}-\frac{\sqrt{6}}{6}=$$

$$=5\sqrt{6}-4\sqrt{6}-\frac{1}{2}\sqrt{6}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

5) $2\sqrt{32}-\frac{1}{3}\sqrt{18}-\frac{1}{2}\sqrt{50}-\frac{1}{2}\sqrt{2}+3\sqrt{8}=8\sqrt{2}-\sqrt{2}-\frac{5}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}+6\sqrt{2}=10\sqrt{2}$

6) $4\cdot\sqrt{7\frac{1}{2}}-\frac{2\sqrt{10}}{2\sqrt{3}-\sqrt{10}}=\sqrt{\frac{16\cdot 15}{2}}-\frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{2}\left(\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)}=\sqrt{120}-\frac{2\sqrt{5}\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)}=$

$$=2\sqrt{30}-2\sqrt{5}\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)=2\sqrt{30}-2\sqrt{30}-10=-10$$

7) $\frac{\left(\sqrt{75}+\sqrt{50}\right)\left(5-2\sqrt{6}\right)}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{5\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(5-2\sqrt{6}\right)}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{5\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=$

$$=5\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)=5$$

8) $\sqrt{\frac{2}{5}}+\sqrt{\frac{5}{2}}+\sqrt{10}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}+\sqrt{10}=\frac{\sqrt{10}}{5}+\frac{\sqrt{10}}{2}+\sqrt{10}=\frac{17\sqrt{10}}{10}=1{,}7\sqrt{10}$

9) $\left(6\cdot\sqrt[3]{500}-5\cdot\sqrt[3]{108}\right):\sqrt[5]{8\cdot\sqrt[3]{2}}=\left(6\cdot\sqrt[3]{125\cdot 4}-5\cdot\sqrt[3]{27\cdot 4}\right):\sqrt[5]{\sqrt[3]{2^9\cdot 2}}=$

$$=\left(30\cdot\sqrt[3]{4}-15\cdot\sqrt[3]{4}\right):\sqrt[15]{2^{10}}=15\cdot\sqrt[3]{4}:\sqrt[3]{4}=15$$

10) $3\sqrt{15\sqrt{75}}-7\sqrt{6\sqrt{12}}=3\sqrt{15\sqrt{25\cdot 3}}-7\sqrt{6\sqrt{4\cdot 3}}=3\sqrt{75\sqrt{3}}-7\sqrt{12\sqrt{3}}=$

$$=15\sqrt{3\sqrt{3}}-14\sqrt{3\sqrt{3}}=\sqrt{3\sqrt{3}}=\sqrt[4]{27}$$

11) $\sqrt[3]{54\cdot 32}-\sqrt[4]{8\cdot 162}+\sqrt[3]{42\frac{7}{8}}=\sqrt[3]{27\cdot 2\cdot 32}-\sqrt[4]{8\cdot 81\cdot 2}+\sqrt[3]{\frac{343}{8}}=$

$$=3\cdot 4-3\cdot 2+\frac{7}{2}=9{,}5$$

12) $\sqrt{\sqrt{55}\cdot\sqrt{275}\cdot\sqrt{605}}=\sqrt{\sqrt{55\cdot 55\cdot 5\cdot 55\cdot 11}}=\sqrt{55\cdot 55}=55$.

Преобразование выражений, содержащих степени с целыми показателями

1.13. Вычислите:

1) $\dfrac{2^{-2}\cdot5^{3}\cdot10^{-4}}{2^{-3}\cdot5^{2}\cdot10^{-5}}$

2) $\dfrac{\left(2\cdot(-3)^{-2}\right)^{-1}\cdot(-3)^{-2}}{4^{-1}\cdot(-3)^{-1}\cdot\left((-3)^{-2}\right)^{-1}}$

3) $\dfrac{(1,5)^{-3}\cdot(3,375)^{-1}}{(2,25)^{-2}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-1}}$

4) $\dfrac{(0,26)^{0}-(0,2)^{-1}}{\left(8:5^{3}\right)^{-1}\cdot(0,4)^{3}+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-1}}$

5) $\dfrac{40^{4}}{5^{2}\cdot2^{11}}+0,2^{6}\cdot5^{6}$

6) $12^{6}\cdot27^{-3}\cdot\left(\dfrac{1}{18}\right)^{-2}\cdot4^{-5}$

7) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-10}\cdot27^{-3}+0,2^{-4}\cdot25^{-2}+\left(64^{-\frac{1}{9}}\right)^{-3}$

8) $0,3^{-3}+\left(\dfrac{3}{7}\right)^{-1}+(-0,5)^{-2}\cdot\dfrac{3}{4}+(-1)^{8}\cdot6$

9) $\dfrac{128\cdot8^{-1}\cdot3^{6}+6^{8}}{4^{2}\cdot9^{3}\cdot\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-1}}:\left(\dfrac{1}{29}\right)^{-1}$

10) $\dfrac{6\cdot\left(\dfrac{1}{15}\right)^{-1}}{\left(2^{-3}\right)^{2}\cdot\left(\dfrac{1}{8}\right)^{-4}\cdot\sqrt{16^{-1}}+243\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{5}}$

Решение:

1) $\dfrac{2^{-2}\cdot5^{3}\cdot10^{-4}}{2^{-3}\cdot5^{2}\cdot10^{-5}}=2^{-2+3}\cdot5^{3-2}\cdot10^{-4+5}=2\cdot5\cdot10=100$

2) $\dfrac{\left(2\cdot(-3)^{-2}\right)^{-1}\cdot(-3)^{-2}}{4^{-1}\cdot(-3)^{-1}\cdot\left((-3)^{-2}\right)^{-1}}=\dfrac{2^{-1}\cdot(-3)^{2}\cdot(-3)^{-2}}{2^{-2}\cdot(-3)^{-1}\cdot(-3)^{2}}=\dfrac{2^{-1}}{2^{-2}\cdot(-3)}=2\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{2}{3}$

3) $\dfrac{(1,5)^{-3}\cdot(3,375)^{-1}}{(2,25)^{-2}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-1}}=\dfrac{\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-3}\cdot\left(3\dfrac{3}{8}\right)^{-1}}{\left(2\dfrac{1}{4}\right)^{-2}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-1}}=\dfrac{\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-3}\cdot\left(\dfrac{27}{8}\right)^{-1}}{\left(\dfrac{9}{4}\right)^{-2}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-1}}=\dfrac{\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-3}\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-3}}{\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-4}\cdot\dfrac{3}{2}}=$

$$=\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}=\left(\frac{2}{3}\right)^{3}=\frac{8}{27}$$

4) $$\frac{(0,26)^0-(0,2)^{-1}}{(8:5^3)^{-1}\cdot(0,4)^3+\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}}=\frac{1-5}{\frac{125}{8}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^3+(-2)}=\frac{-4}{\frac{125}{8}\cdot\frac{8}{125}-2}=\frac{-4}{1-2}=4$$

5) $$\frac{40^4}{5^2\cdot2^{11}}+0,2^6\cdot5^6=\frac{(2^3\cdot5)^4}{5^2\cdot2^{11}}+(0,2\cdot5)^6=\frac{2^{12}\cdot5^4}{5^2\cdot2^{11}}+1^6=2\cdot5^2+1=51$$

6) $$12^6\cdot27^{-3}\cdot\left(\frac{1}{18}\right)^{-2}\cdot4^{-5}=(2^2\cdot3)^6\cdot(3^3)^{-3}\cdot(2\cdot3^2)^2\cdot(2^2)^{-5}=$$

$$=2^{12}\cdot3^6\cdot3^{-9}\cdot2^2\cdot3^4\cdot2^{-10}=2^4\cdot3=48$$

7) $$\left(\frac{1}{3}\right)^{-10}\cdot27^{-3}+0,2^{-4}\cdot25^{-2}+\left(64^{-\frac{1}{9}}\right)^{-3}=3^{10}\cdot3^{-9}+5^4\cdot5^{-4}+(2^6)^{\frac{1}{3}}=$$

$$=3+5^0+2^2=8$$

8) $$0,3^{-3}+\left(\frac{3}{7}\right)^{-1}+(-0,5)^{-2}\cdot\frac{3}{4}+(-1)^8\cdot6=\frac{1000}{27}+\frac{7}{3}+4\cdot\frac{3}{4}+6=$$

$$=37\frac{1}{27}+2\frac{1}{3}+9=48\frac{10}{27}$$

9) $$\frac{128\cdot8^{-1}\cdot3^6+6^8}{4^2\cdot9^3\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}}:\left(\frac{1}{29}\right)^{-1}=\frac{2^7\cdot2^{-3}\cdot3^6+(2\cdot3)^8}{2^4\cdot3^6\cdot5}:29=\frac{2^4\cdot3^6+2^8\cdot3^8}{2^4\cdot3^6\cdot5}\cdot\frac{1}{29}=$$

$$=\frac{2^4\cdot3^6(1+2^4\cdot3^2)}{2^4\cdot3^6\cdot5}\cdot\frac{1}{29}=\frac{1+16\cdot9}{5\cdot29}=\frac{145}{145}=1$$

10) $$\frac{6\cdot\left(\frac{1}{15}\right)^{-1}}{(2^{-3})^2\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^{-4}\cdot\sqrt{16^{-1}}+243\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^5}=\frac{6\cdot15}{2^{-6}\cdot2^{12}\cdot2^{-2}+3^5\cdot(-3)^{-5}}=\frac{90}{2^4-3^0}=$$

$$=\frac{90}{16-1}=6.$$

1.14. Вычислите:

1) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$

2) $\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{11}{10}} : \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{6}{5}} \cdot \sqrt[5]{27^3}$

3) $0{,}0016^{-\frac{3}{4}} + 0{,}04^{-\frac{1}{2}} - 0{,}216^{-\frac{2}{3}} \cdot 9$

4) $64^{-\frac{5}{6}} - (0{,}125)^{-\frac{1}{3}} - 32 \cdot 2^{-4} \cdot 16^{-1\frac{1}{2}} + \left(3^0\right)^4 \cdot 4$

5) $81^{0,75} \cdot 32^{-0,4} - 8^{-\frac{2}{3}} \cdot 27^{\frac{1}{3}} + 256^{0,5}$

6) $1000^{-\frac{2}{3}} + \left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{4}{3}} - 625^{-0.75}$

7) $\left(\sqrt[4]{32 \cdot \sqrt[3]{4}} + \sqrt[4]{64 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2}}} - 3 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot \sqrt[4]{2}}\right) \cdot \frac{3}{\sqrt[12]{2^5}}$

8) $\frac{1}{\sqrt{2}-1} - 2^{0,2} \cdot \frac{1-2^{0,5}}{2^{-0,3}}$

9) $\left(\frac{15 \cdot 5^{\frac{1}{2}}}{125^{-\frac{1}{3}}} - 2 \cdot 7^{\frac{1}{2}} \cdot 49^{\frac{1}{4}}\right) \cdot \left(\left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{1}{4}} + 45^{\frac{1}{2}}\right) - 183\sqrt{5}$.

10) $\left(15 \cdot 4^{-2} + \frac{2^{-4} \cdot \sqrt{11}}{121^{0,25}}\right) \cdot \left(\frac{\left(1+9^{0,25}\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}\right)^{-1}$

Решение:

1) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \left(3^{-\frac{1}{2}}\right)^3 \cdot 3^{\frac{1}{4}} \cdot \left(3^{-1}\right)^2 = 3^{-\frac{3}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{-2} = 3^{-\frac{13}{4}} = 3^{-3,25}$

2) $\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{11}{10}} : \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{6}{5}} \cdot \sqrt[5]{27^3} = \left(3^{-2}\right)^{\frac{11}{10}} : \left(3^{-2}\right)^{\frac{6}{5}} \cdot 3^{\frac{9}{5}} = 3^{-\frac{11}{5}+\frac{12}{5}+\frac{9}{5}} = 3^2 = 9$

3) $0{,}0016^{-\frac{3}{4}} + 0{,}04^{-\frac{1}{2}} - 0{,}216^{-\frac{2}{3}} \cdot 9 = \left(0{,}2^4\right)^{-\frac{3}{4}} + \left(0{,}2^2\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(0{,}6^3\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot 9 =$

$= 0{,}2^{-3} + 0{,}2^{-1} - 0{,}6^{-2} \cdot 9 = 125 + 5 - \frac{25}{9} \cdot 9 = 105$

4) $64^{-\frac{5}{6}} - (0{,}125)^{-\frac{1}{3}} - 32 \cdot 2^{-4} \cdot 16^{-1\frac{1}{2}} + \left(3^0\right)^4 \cdot 4 = \left(2^6\right)^{-\frac{5}{6}} - \left(2^{-3}\right)^{-\frac{1}{3}} -$

$-2^5\cdot 2^{-4}\cdot\left(2^4\right)^{-\frac{3}{2}}+1\cdot 4=2^{-5}-2-2^{-5}+4=2$

5) $81^{0,75}\cdot 32^{-0,4}-8^{-\frac{2}{3}}\cdot 27^{\frac{1}{3}}+256^{0,5}=\left(3^4\right)^{0,75}\cdot\left(2^5\right)^{-0,4}-\left(2^3\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(3^3\right)^{\frac{1}{3}}+$

$+\sqrt{256}=3^3\cdot 2^{-2}-\left(2^{-2}\right)\cdot 3+16=\frac{27}{4}-\frac{3}{4}+16=22$

6) $1000^{-\frac{2}{3}}+\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{4}{3}}-625^{-0,75}=\left(10^3\right)^{-\frac{2}{3}}+\left(3^{-3}\right)^{-\frac{4}{3}}-\left(5^4\right)^{-0,75}=$

$=10^{-2}+3^4-5^{-3}=0,01+81-0,008=81,002$

7) $\left(\sqrt[4]{32\cdot\sqrt[3]{4}}+\sqrt[4]{64\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{2}}}-3\cdot\sqrt[3]{2\cdot\sqrt[4]{2}}\right)\cdot\frac{3}{\sqrt[12]{2^5}}=\left(2^{\frac{5}{4}}\cdot 2^{\frac{2}{12}}+2^{\frac{6}{4}}\cdot 2^{-\frac{1}{12}}-3\cdot 2^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{12}}\right)\cdot\frac{3}{2^{\frac{5}{12}}}=$

$=\left(2^{\frac{17}{12}}+2^{\frac{17}{12}}-3\cdot 2^{\frac{5}{12}}\right)\cdot 3\cdot 2^{-\frac{5}{12}}=2^{\frac{5}{12}}(2+2-3)\cdot 3\cdot 2^{-\frac{5}{12}}=3$

8) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}-2^{0,2}\cdot\frac{1-2^{0,5}}{2^{-0,3}}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}-2^{0,5}\left(1-2^{0,5}\right)=\frac{\sqrt{2}+1}{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}-2^{0,5}+2=$

$=2^{0,5}+1-2^{0,5}+2=3$

9) $\left(\frac{15\cdot 5^{\frac{1}{2}}}{125^{-\frac{1}{3}}}-2\cdot 7^{\frac{1}{2}}\cdot 49^{\frac{1}{4}}\right)\cdot\left(\left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{1}{4}}+45^{\frac{1}{2}}\right)-183\sqrt{5}=\left(\frac{3\cdot 5^{\frac{3}{2}}}{\left(5^3\right)^{-\frac{1}{3}}}-2\cdot 7^{\frac{1}{2}}\cdot 7^{\frac{1}{2}}\right)\times$

$\times\left(\left(3^{-4}\right)^{-\frac{1}{4}}+3\sqrt{5}\right)-183\sqrt{5}=\left(3\cdot 5\sqrt{5}\cdot 5-2\cdot 7\right)\left(3+3\sqrt{5}\right)-183\sqrt{5}=$

$=\left(75\sqrt{5}-14\right)\left(3+3\sqrt{5}\right)-183\sqrt{5}=225\sqrt{5}-42+1125-42\sqrt{5}-183\sqrt{5}=1083$

10) $\left(15\cdot 4^{-2}+\frac{2^{-4}\cdot\sqrt{11}}{121^{0,25}}\right)\cdot\left(\frac{\left(1+9^{0,25}\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}\right)^{-1}=$

$=\left(\frac{15}{16}+\frac{1\cdot\sqrt{11}}{16\cdot\sqrt{11}}\right)\cdot\left(\frac{4}{\left(1+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}\right)=\left(\frac{15}{16}+\frac{1}{16}\right)\left(\frac{4}{\left(\sqrt{3}\right)^2-1^2}\right)=\frac{4}{2}=2.$

§2. ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАЦИОНАЛЬНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Для преобразования алгебраических выражений необходимо уметь группировать слагаемые, приводить подобные члены, выносить за скобки общие множители, сокращать дроби, грамотно использовать формулы сокращенного умножения, владеть приемами разложения многочленов на множители.

Техника алгебраических преобразований является вспомогательным, но очень важным моментом в решении задач самых разных типов.

Тождественные алгебраические преобразования широко используют при доказательстве теорем, при исследовании функций, при решении уравнений и неравенств, а также в приложениях алгебры в геометрии, физике и других предметах.

Напомним основные виды преобразований и рассмотрим соответствующие примеры:

- Разложение многочленов на множители.
- Преобразование дробных выражений.
- Преобразование алгебраических выражений, содержащих модули.
- Преобразование выражений, содержащих степени с целыми показателями.

Разложение многочленов на множители

Разложение многочленов на множители применяется при решении алгебраических уравнений, для упрощения выражений, для доказательства справедливости равенств и в других случаях.

Разложение многочленов на множители выполняется чаще всего одним из следующих основных способов:

- вынесение общего множителя за скобки и способ группировки;
- использование формул сокращенного умножения;
- разложение квадратного трехчлена на линейные множители;
- выделение полного квадрата из трехчлена.

В более сложных примерах приходится применять разные способы.

Рассмотрим данные способы разложения многочленов на множители на примерах.

Вынесение общего множителя за скобки и способ группировки

Этот способ основан на применении распределительного свойства умножения.

2.1. Разложите на множители выражение:

1) $x(x+y-z)+y(x+y-z)-z(x+y-z)$

2) $x^3-3x^2+5x-15$

3) $a^2-2bc+2ac-ab$

4) $2a+ac^2-a^2c-2c$ и найдите его значение при $a=-\dfrac{8}{21}$, $c=-5\dfrac{1}{4}$.

5) $xyz+x^2y^2+3x^4y^5+3x^3y^4z-xy-z$

6) $ax+bx+cx+ay+by+cy$

7) $6x^2(x-2y)^2-9x(2y-x)^3$

8) $6x^3+12y^2-9x^2y-8xy$

Решение:

1) $x(x+y-z)+y(x+y-z)-z(x+y-z)=(x+y-z)(x+y-z)=(x+y-z)^2$

2) $x^3-3x^2+5x-15=(x^3-3x^2)+(5x-15)=x^2(x-3)+5(x-3)\quad(x-3)(x^2+5)$

3) $a^2-2bc+2ac-ab=(a^2-ab)+(2ac-2bc)=a(a-b)+2c(a-b)=$
$=(a-b)(a+2c)$

4) $2a+ac^2-a^2c-2c=(2a-2c)-(a^2c-ac^2)=2(a-c)-ac(a-c)=$
$=(a-c)(2-ac)=\left(-\dfrac{8}{21}+5\dfrac{1}{4}\right)\cdot\left(2-\dfrac{8}{21}\cdot\dfrac{21}{4}\right)=0$

5) $xyz+x^2y^2+3x^4y^5+3x^3y^4z-xy-z=(xyz+x^2y^2)+(3x^4y^5+3x^3y^4z)-$
$-(xy+z)=xy(z+xy)+3x^3y^4(xy+z)-(xy+z)=(xy+z)(xy+3x^3y^4-1)$

6) $ax+bx+cx+ay+by+cy=x(a+b+c)+y(a+b+c)=(x+y)(a+b+c)$

7) $6x^2(x-2y)^2-9x(2y-x)^3=6x^2(2y-x)^2-9x(2y-x)^3=$

$= (2y-x)^2(6x^2-9x(2y-x)) = 3x(2y-x)^2(2x-6y+3x) = 3x(2y-x)^2(5x-6y)$

8) $6x^3+12y^2-9x^2y-8xy = 6x^3-9x^2y+12y^2-8xy = 3x^2(2x-3y)+4y(3y-2x) =$

$= (2x-3y)(3x^2-4y)$.

Использование формул сокращенного умножения

С помощью формул сокращенного умножения значительно упрощается разложение на множители.

..2. Разложите на множители:

1) x^6-1

2) $x^3-x+2x+2$

3) y^3-3y^2+6y-8

4) $a^4-2a^3+a^2-1$

5) $a^2-2ab+b^2-z^2$

6) $a-3b+9b^2-a^2$

7) $64(2-5a)^2-25(6a-5)^2$

8) $a^2b+b^2c+ac^2-ab^2-bc^2-a^2c$

9) $4x^2-4x^3+12x^2y-9y^2-9xy^2$

10) $27c^3-3c^2+2c-8$

Решение:

1) $x^6-1 = (x^3)^2-1 = (x^3-1)(x^3+1) = (x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

2) $x^3-x+2x+2 = (x^3-x)+(2x+2) = x(x-1)(x+1)+2(x+1) =$

$= (x+1)(x(x-1)+2) = (x+1)(x^2-x+2)$

3) $y^3-3y^2+6y-8 = (y^3-8)+(6y-3y^2) = (y-2)(y^2+2y+4)-3y(y-2) =$

$= (y-2)(y^2-y+4)$

4) $a^4-2a^3+a^2-1 = a^2(a^2-2a+1)-1 = a^2(a-1)^2-1 =$

$= (a(a-1)-1)(a(a-1)+1) = (a^2-a-1)(a^2-a+1)$

5) $a^2-2ab+b^2-z^2 = (a-b)^2-z^2 = (a-b-z)(a-b+z)$

6) $a-3b+9b^2-a^2 = (a-3b)-(a-3b)(a+3b) = (a-3b)(1-a-3b)$

7) $64(2-5a)^2-25(6a-5)^2=(8(2-5a))^2-(5(6a-5))^2=$
$=(8(2-5a)+5(6a-5))(8(2-5a)-5(6a-5))=(-9-10a)(-70a+41)=$
$=(10a+9)(70a-41)$

8) $a^2b+b^2c+ac^2-ab^2-bc^2-a^2c=(a^2b-a^2c)+(b^2c-bc^2)+(ac^2-ab^2)=$
$=a^2(b-c)+bc(b-c)-a(b-c)(b+c)=(b-c)(a^2+bc-ab-ac)=$
$=(b-c)(a(a-c)-b(a-c))=(b-c)(a-c)(a-b)$

9) $4x^2-4x^3+12x^2y-9y^2-9xy^2=(4x^2-9y^2)-(4x^3-12x^2y+9xy^2)=$
$=(2x-3y)(2x+3y)-x(2x-3y)^2=(2x-3y)(2x+3y-2x^2+3xy)$

10) $27c^3-3c^2+2c-8=(27c^3-8)-(3c^2-2c)=(3c-2)(9c^2+6c+4)-c(3c-2)=$
$=(3c-2)(9c^2+5c+4)$.

Разложение квадратного трехчлена на линейные множители

Если x_1 и x_2 – корни квадратного трехчлена ax^2+bx+c, то $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

Эта формула применяется для разложения квадратного трехчле на множители.

2.3. Разложите на множители:

1) $6x^2-x-2$ 2) $x^3-x-2x-2$ 3) $4-7x-2x^2$

4) $9x^2-30xy+24y^2$ 5) a^4+a^2-2

Решение:

1) Решим уравнение:

$6x^2-x-2=0$

$x_1=\frac{2}{3},\ x_2=-\frac{1}{2}$

$6x^2-x-2=6\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)=3\left(x-\frac{2}{3}\right)\cdot 2\left(x+\frac{1}{2}\right)=(3x-2)(2x+1)$

2) $x^3-x-2x-2=\left(x^3-x\right)-(2x+2)=x\left(x^2-1\right)-2(x+1)=$

$=x(x-1)(x+1)-2(x+1)=(x+1)\left(x^2-x-2\right)=(x+1)(x+1)(x-2)=$

$=(x+1)^2(x-2)$

так как $x^2-x-2=0$; $x_1=2$, $x_2=-1$.

3) $4-7x-2x^2=-\left(2x^2+7x-4\right)=\left|\begin{array}{l}2x^2+7x-4=0\\ x_1=-4;\ x_2=\dfrac{1}{2}\end{array}\right|=-2(x+4)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)=$

$=(x+4)(1-2x)$

4) $9x^2-30xy+24y^2$

Решим уравнение $9x^2-30xy+24y^2=0$ относительно переменной x:

$a=9$, $b=-30y$, $c=24y^2$

$D=b^2-4ac=(-30y)^2-4\cdot9\cdot24y^2=900y^2-864y^2=36y^2$

$x_{1,2}=\dfrac{30y\pm6y}{18}$

$x_1=2y$, $x_2=\dfrac{4}{3}y$

$9x^2-30xy+24y^2=9(x-2y)\left(x-\dfrac{4}{3}y\right)=(x-2y)\cdot9\left(x-\dfrac{4}{3}y\right)=$

$=(x-2y)(9x-12y)$

5) $a^4+a^2-2=\left|\begin{array}{l}a^2=x\\ x^2+x-2=0\\ x_1=-2,\ x_2=1\end{array}\right|=(x+2)(x-1)=\left(a^2+2\right)\left(a^2-1\right)=$

$=\left(a^2+2\right)(a-1)(a+1)$.

Выделение полного квадрата из трехчлена

Рассмотрим примеры, в которых многочлен можно разложить на множители путем предварительного преобразования: добавить и вычесть одночлен, представив тем самым многочлен в виде разности квадратов или в виде разности, или суммы кубов.

2.4. Разложите на множители:

1) $4x^2-12xy+8y^2$ 2) x^4+4 3) x^4+x^2+1 4) $81x^4+4$

Решение:

1) $4x^2-12xy+8y^2=4x^2-12xy+\overbrace{9y^2-9y^2}^{=0}+8y^2=(2x-3y)^2-y^2=$

$=(2x-3y-y)(2x-3y+y)=(2x-4y)(2x-2y)=4(x-2y)(x-y)$

2) $x^4+4=x^4+4x^2+4-4x^2=\left(x^2+2\right)^2-(2x)^2=\left(x^2-2x+2\right)\left(x^2+2x+2\right)$

3) $x^4+x^2+1=x^4+2x^2+1-x^2=\left(x^2+1\right)^2-x^2=\left(x^2-x+1\right)\left(x^2+x+1\right)$

4) $81x^4+4=81x^4+4+36x^2-36x^2=\left(9x^2+2\right)^2-36x^2=$

$=\left(9x^2+6x+2\right)\left(9x^2-6x+2\right).$

Отметим, что при разложении многочлена на множители, помимо основных способов, часто используют следующие приемы:

- *представление некоторого слагаемого в виде суммы двух слагаемых.*

Например:

1) $x^3-3x+2=x^3-2x-x+2=\left(x^3-x\right)+(-2x+2)=x\left(x^2-1\right)-2(x-1)=$

$=x(x-1)(x+1)-2(x-1)=(x-1)\left(x^2+x-2\right)=(x-1)\left(x^2+2x-x-2\right)=$

$=(x-1)\left(x(x+2)-(x+2)\right)=(x-1)(x+2)(x-1)=(x-1)^2(x+2)$,

2) $y^3+y-2=y^3+2y-y-2=y\left(y^2-1\right)+2(y-1)=(y-1)\left(y(y+1)+2\right)=$

$=(y-1)\left(y^2+y+2\right)$;

3) $5x^2y-4xy^2-y^3=y\left(5x^2-4xy-y^2\right)=y\left(5x^2\underbrace{-5xy+xy}_{-4xy}-y^2\right)=$

$=y\left(5x(x-y)+y(x-y)\right)=y(x-y)(5x+y).$

- *введение новой переменной.*

Например:

1) $\left(x^2+x+1\right)\left(x^2+x+2\right)-12=\left|\begin{array}{l}\textit{Замена}:\\ x^2+x+1=a\end{array}\right|=a(a+1)-12=a^2+a-12=$

$=a^2+4a-3a-12=a(a+4)-3(a+4)=(a+4)(a-3)=$

$=\left(x^2+x+1+4\right)\left(x^2+x+1-3\right)=\left(x^2+x+5\right)\left(x^2+x-2\right)=$

$=\left(x^2+x+5\right)\left(x^2+2x-x-2\right)=\left(x^2+x+5\right)\left(x(x+2)-(x+2)\right)=$

$=\left(x^2+x+5\right)(x+2)(x-1)$;

2) $(x+2y+1)(x+2y-5)-(x-2y)(x-2y+4)+5=\left|\begin{array}{l}\textit{Замена}:\\ x+2y=a\\ x-2y=b\end{array}\right|=$

$=(a+1)(a-5)-b(b+4)+5=a^2+a-5a-5-b^2-4b+5=a^2-4a-b^2-4b=$

$=\left(a^2-b^2\right)-(4a+4b)=(a-b)(a+b)-4(a+b)=(a+b)(a-b-4)=$

$=(x+2y+x-2y)(x+2y-x+2y-4)=2x(4y-4)=8x(y-1)$;

3) $\left(x^2-3x\right)\left(x^2-3x-2\right)-8=\left|\begin{array}{l}\textit{Замена}:\\ x^2-3x=a\end{array}\right|=a(a-2)-8=a^2-2a-8=$

$=(a-4)(a+2)=\left(x^2-3x-4\right)\left(x^2-3x+2\right)=(x-4)(x+1)(x-1)(x-2).$

2.5. Найдите наименьшее значение выражения:

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+10.$$

Решение:

В выражении $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ умножим первую скобку на четвертую, а вторую скобку на третью:

$\left[(x-1)\cdot(x-4)\right]\cdot\left[(x-2)\cdot(x-3)\right]+10=\left(x^2-5x+4\right)\cdot\left(x^2-5x+6\right)+10$

Введением новой переменной $a=x^2-5x+4$ получаем квадратный трехчлен:

$a(a+2)+10=a^2+2a+1+9=(a+1)^2+9.$

$(a+1)^2 \ge 0$, следовательно $(a+1)^2+9 \ge 9$

Таким образом, наименьшее значение исходного выражения 9.

Ответ: 9.

Используя разложение на множители, удобно вычислять значение некоторых выражений.

2.6. Найдите значение выражения $x^3+x^2y-xy^2-y^3$ при $x=3{,}6$; $y=-2{,}6$.

Решение:

$$x^3+x^2y-xy^2-y^3=\left(x^3+x^2y\right)-\left(xy^2+y^3\right)=x^2(x+y)-y^2(x+y)=$$

$$=(x+y)\left(x^2-y^2\right)=(x+y)^2(x-y)=(3{,}6-2{,}6)^2\cdot(3{,}6+2{,}6)=6{,}2.$$

Ответ: 6,2.

2.7. Найдите значение выражения $\dfrac{x^3+y^3-(x+y)^3}{x^2-y^2}$, если $x=\dfrac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}$; $y=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{3}$.

Решение:

Упростим исходное выражение:

$$\frac{x^3+y^3-(x+y)^3}{x^2-y^2}=\frac{x^3+y^3-x^3-3x^2y-3xy^2-y^3}{x^2-y^2}=\frac{-3xy(x+y)}{(x-y)(x+y)}=\frac{3xy}{y-x}.$$

$$x=\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{3},\quad y=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{3}.$$

$$xy=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{3}=\frac{6-3}{9}=\frac{1}{3}.$$

$$y-x=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{6}-\sqrt{3}}{3}=\frac{-2\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{3xy}{y-x}=\left(3\cdot\frac{1}{3}\right):\left(\frac{-2\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

2.8. Найдите значение функции, заданной формулой $y=x^3-11x^2-41x+9$ при $x=14$.

Решение:

1) Для упрощения вычислений следует сгруппировать три первых члена и вынести переменную x за скобки:

$y=\left(x^2-11x-41\right)x+9$.

2) Многочлен $x^2-11x-41$ преобразуем аналогичным образом:

$y=\left((x-11)x-41\right)x+9$.

Получаем: $y(14)=(3\cdot14-41)\cdot14+9=14+9=23$.

Ответ: 23.

Преобразование дробных выражений

Одна из важных и часто встречающихся операций в преобразовании рациональных дробей – это *сокращение дроби*. Чтобы сократить дробь, нужно ее числитель и знаменатель разложить на множители, а затем разделить их на общий множитель.

Рассмотрим некоторые приемы, которые могут быть полезны при сокращении дробей.

2.9. Сократите дробь:

1) $\dfrac{3x-xy+2y-6}{xy-3x+2y-6}$

2) $\dfrac{x^{14}+x^7+1}{x^{21}-1}$

3) $\dfrac{a^{33}+1}{a^{11}-a^{22}+a^{33}}$

4) $\dfrac{a^4-16}{a^4-4a^3+8a^2-16a+16}$

5) $\dfrac{x^4+x^2y^2+y^4}{x^2-xy+y^2}$

6) $\dfrac{x^2-9x+14}{-x^2+10x-16}$

7) $\dfrac{7x^2y^4+7x^4y^2}{x^6+y^6}$

8) $\dfrac{x(x+2)-y(y-2)}{x-y+2}$ (найдите значение дроби при $x=\dfrac{4}{15}$, $y=0,4$)

9) $\dfrac{x^3+2x^2+4x+3}{x^2+7x+6}$

10) $\dfrac{(2x-1)^2+2(4x^2-1)+(2x+1)^2}{(2x^2+1)^2-(2x^2-1)^2}$

11) Определите x из пропорции $\dfrac{9-4a^2-4ab-b^2}{4a^2+2ab+3b-9}=\dfrac{3+2a+b}{x}$

12) $\dfrac{(x^2-x-5)(x^2-x-2)+2}{(x^2-x-5)(x^2-x-1)+4}$

Решение:

1) $\dfrac{3x-xy+2y-6}{xy-3x+2y-6}=\dfrac{(3x-xy)+(2y-6)}{(xy-3x)+(2y-6)}=\dfrac{-x(y-3)+2(y-3)}{x(y-3)+2(y-3)}=$

$=\dfrac{(y-3)(2-x)}{(y-3)(x+2)}=\dfrac{2-x}{x+2}$

2) $\dfrac{x^{14}+x^7+1}{x^{21}-1}=\dfrac{x^{14}+x^7+1}{(x^7)^3-1}=\dfrac{x^{14}+x^7+1}{(x^7-1)(x^{14}+x^7+1)}=\dfrac{1}{x^7-1}$

3) $\dfrac{a^{33}+1}{a^{11}-a^{22}+a^{33}}=\dfrac{(a^{11})^3+1}{a^{11}(1-a^{11}+a^{22})}=\dfrac{(a^{11}+1)(a^{22}-a^{11}+1)}{a^{11}(a^{22}-a^{11}+1)}=\dfrac{a^{11}+1}{a^{11}}$

4) $\dfrac{a^4-16}{a^4-4a^3+8a^2-16a+16}=\dfrac{(a^2)^2-4^2}{(a^4+8a^2+16)-(4a^3+16a)}=$

$=\dfrac{(a^2-4)(a^2+4)}{(a^2+4)^2-4a(a^2+4)}=\dfrac{(a-2)(a+2)(a^2+4)}{(a^2+4)(a^2+4-4a)}=\dfrac{(a-2)(a+2)}{(a-2)^2}=\dfrac{a+2}{a-2}$

5) $\dfrac{x^4+x^2y^2+y^4}{x^2-xy+y^2}=\dfrac{x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2}{x^2-xy+y^2}=\dfrac{(x^2+y^2)^2-(xy)^2}{x^2-xy+y^2}=$

$=\dfrac{(x^2+y^2-xy)(x^2+y^2+xy)}{x^2-xy+y^2}=x^2+xy+y^2$

6) $\dfrac{x^2-9x+14}{-x^2+10x-16}=-\dfrac{x^2-9x+14}{x^2-10x+16}=\left|\begin{matrix} x^2-9x+14=0; & x^2-10x+16=0 \\ x_1=2,\ \ x_2=7; & x_1=2,\ \ x_2=8\end{matrix}\right|=$

$$=-\frac{(x-2)(x-7)}{(x-2)(x-8)}=\frac{x-7}{8-x}$$

7) $$\frac{7x^2y^4+7x^4y^2}{x^6+y^6}=\frac{7x^2y^2\left(y^2+x^2\right)}{\left(x^2\right)^3+\left(y^2\right)^3}=\frac{7x^2y^2\left(y^2+x^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)\left(x^4-x^2y^2+y^4\right)}=\frac{7x^2y^2}{x^4-x^2y^2+y^4}$$

8) $$\frac{x(x+2)-y(y-2)}{x-y+2}=\frac{x^2+2x-y^2+2y}{x-y+2}=\frac{\left(x^2-y^2\right)+2(x+y)}{x-y+2}=$$

$$=\frac{(x+y)(x-y+2)}{x-y+2}=x+y=\frac{4}{15}+\frac{2}{5}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$$

9) $$\frac{x^3+2x^2+4x+3}{x^2+7x+6}=\left|\begin{matrix}x^2+7x+6=0\\ x_1=-1,\ x_2=-6\end{matrix}\right|=\frac{x^3+\overbrace{x^2+x^2}^{2x^2}+\overbrace{x+3x}^{4x}+3}{(x+1)(x+6)}=$$

$$=\frac{\left(x^3+x^2\right)+\left(x^2+x\right)+(3x+3)}{(x+1)(x+6)}=\frac{x^2(x+1)+x(x+1)+3(x+1)}{(x+1)(x+6)}=$$

$$=\frac{(x+1)\overbrace{\left(x^2+x+3\right)}^{D<0}}{(x+1)(x+6)}=\frac{x^2+x+3}{x+6}$$

10) $$\frac{(2x-1)^2+2\left(4x^2-1\right)+(2x+1)^2}{\left(2x^2+1\right)^2-\left(2x^2-1\right)^2}=\frac{(2x-1)^2+2(2x-1)(2x+1)+(2x+1)^2}{\left(2x^2+1-2x^2+1\right)\left(2x^2+1+2x^2-1\right)}=$$

$$=\frac{(2x-1+2x+1)^2}{2\cdot 4x^2}=\frac{16x^2}{8x^2}=2$$

11) $$\frac{9-4a^2-4ab-b^2}{4a^2+2ab+3b-9}=\frac{3+2a+b}{x}$$

$$\frac{9-(2a+b)^2}{\left(4a^2-9\right)+(2ab+3b)}=\frac{3+2a+b}{x}$$

$$\frac{(3-2a-b)(3+2a+b)}{(2a-3)(2a+3)+b(2a+3)}=\frac{3+2a+b}{x}$$

$$\frac{(3-2a-b)(3+2a+b)}{(2a+3)(2a-3+b)}=\frac{3+2a+b}{x}$$

$$\frac{-(2a+b-3)(3+2a+b)}{(2a+3)(2a+b-3)}=\frac{3+2a+b}{x}$$

$$\frac{-(3+2a+b)}{(2a+3)}=\frac{3+2a+b}{x}$$

$$x=-\frac{(2a+3)(3+2a+b)}{(3+2a+b)}$$

$$x=-2a-3$$

12) Сделаем замену $a=x^2-x-5$, тогда:

$$x^2-x-2=x^2-x-5+3=a+3;$$
$$x^2-x-1=x^2-x-5+4=a+4.$$

$$\frac{(x^2-x-5)(x^2-x-2)+2}{(x^2-x-5)(x^2-x-1)+4}=\frac{a(a+3)+2}{a(a+4)+4}=\frac{a^2+3a+2}{a^2+4a+4}=\frac{(a+1)(a+2)}{(a+2)^2}=$$

$$=\frac{a+1}{a+2}=\frac{x^2-x-4}{x^2-x-3}.$$

Действия с алгебраическими дробями

Порядок выполнения действий над алгебраическими дробями такой же, как для действий над числами:

– сначала выполняют возведение в степень,
– затем умножение и деление
– и, наконец, сложение и вычитание.

При наличии скобок, прежде всего выполняют действия в скобках.

Рассмотрим примеры на действия с алгебраическими дробями.

2.10. Упростите выражение $\left(\frac{x-y}{x+y}+\frac{x+y}{x-y}\right)\cdot\left(\frac{x^2+y^2}{2xy}+1\right):\frac{x^2+y^2}{xy}$.

Решение:

1) $\frac{x-y}{x+y}^{\backslash x-y}+\frac{x+y}{x-y}^{\backslash x+y}=\frac{x^2-2xy+y^2+x^2+2xy+y^2}{(x+y)(x-y)}=\frac{2(x^2+y^2)}{(x+y)(x-y)}$

2) $\frac{x^2+y^2}{2xy}+1^{\backslash 2xy}=\frac{x^2+y^2+2xy}{2xy}=\frac{(x+y)^2}{2xy}$

3) $\frac{2(x^2+y^2)}{(x+y)(x-y)}\cdot\frac{(x+y)^2}{2xy}:\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{2(x^2+y^2)(x+y)^2\cdot xy}{(x+y)(x-y)\cdot 2xy\cdot(x^2+y^2)}=\frac{x+y}{x-y}$.

Ответ: $\frac{x+y}{x-y}$.

2.11. Упростите выражение: $\left(\frac{2}{2a-b}+\frac{6b}{b^2-4a^2}-\frac{4}{2a+b}\right):\left(1+\frac{4a^2+b^2}{4a^2-b^2}\right)$.

Решение:

1) $\frac{2}{2a-b}+\frac{6b}{b^2-4a^2}-\frac{4}{2a+b}=\frac{2}{2a-b}^{\backslash 2a+b}-\frac{6b}{(2a-b)(2a+b)}-\frac{4}{2a+b}^{\backslash 2a-b}=$

$=\frac{4a+2b-6b-8a+4b}{(2a-b)(2a+b)}=-\frac{4a}{4a^2-b^2}$

2) $\frac{1}{1}^{\backslash 4a^2-b^2}+\frac{4a^2+b^2}{4a^2-b^2}=\frac{4a^2-b^2+4a^2+b^2}{4a^2-b^2}=\frac{8a^2}{4a^2-b^2}$

3) $-\frac{4a}{4a^2-b^2}:\frac{8a^2}{4a^2-b^2}=-\frac{4a\cdot(4a^2-b^2)}{(4a^2-b^2)\cdot 8a^2}=-\frac{1}{2a}$.

Ответ: $-\frac{1}{2a}$.

.12. Упростите выражение:

1) $\frac{x^2}{x-5}+\frac{25}{5-x}$ 2) $\frac{x^2}{(x-2)^2}-\frac{4}{(2-x)^2}$ 3) $\frac{x^2+4}{(x-2)^3}+\frac{4x}{(2-x)^3}$

Решение:

1) $\frac{x^2}{x-5}+\frac{25}{5-x}=\frac{x^2}{x-5}-\frac{25}{x-5}=\frac{x^2-25}{x-5}=\frac{(x-5)(x+5)}{(x-5)}=x+5$

2) $\frac{x^2}{(x-2)^2}-\frac{4}{(2-x)^2}=\frac{x^2}{(x-2)^2}-\frac{4}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4}{(x-2)^2}=\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)^2}=\frac{x+2}{x-2}$

3) $\dfrac{x^2+4}{(x-2)^3}+\dfrac{4x}{(2-x)^3}=\dfrac{x^2+4}{(x-2)^3}-\dfrac{4x}{(x-2)^3}=\dfrac{x^2+4-4x}{(x-2)^3}=\dfrac{(x-2)^2}{(x-2)^3}=\dfrac{1}{x-2}$.

2.13. Упростите выражение: $\left(\dfrac{3}{x-4}+\dfrac{4x-6}{x^2-3x-4}+\dfrac{2x}{x+1}\right)\cdot\dfrac{x}{2x-3}$.

Решение:

1) $\dfrac{3}{x-4}+\dfrac{4x-6}{x^2-3x-4}+\dfrac{2x}{x+1}=\dfrac{3}{x-4}^{\backslash x+1}+\dfrac{4x-6}{(x+1)(x-4)}+\dfrac{2x}{x+1}^{\backslash x-4}=$

$=\dfrac{3x+3+4x-6+2x^2-8x}{(x+1)(x-4)}=\dfrac{2x^2-x-3}{(x+1)(x-4)}=\dfrac{(2x-3)(x+1)}{(x+1)(x-4)}=\dfrac{2x-3}{x-4}$

2) $\dfrac{2x-3}{x-4}\cdot\dfrac{x}{2x-3}=\dfrac{(2x-3)\cdot x}{(x-4)(2x-3)}=\dfrac{x}{x-4}$.

Ответ: $\dfrac{x}{x-4}$.

Приемы рационального выполнения тождественных преобразований:

1) Для упрощения дробных рациональных выражений нецелесообразно приведение слагаемых к общему знаменателю без предварительного сокращения дроби. Это следует иметь в виду и в дальнейшем: *перед приведением дробей к общему знаменателю следует проанализировать, можно ли эти дроби предварительно сократить*.

2.14. Упростите выражение:

1) $\dfrac{1+a^2+a}{1-a^3}+\dfrac{a-a^2}{(1-a)^3}$ 2) $\dfrac{a^2(a-b)}{a^3-b^3}+\dfrac{b^2+ab}{a^2+ab+b^2}$ 3) $\dfrac{a^3+b^3}{b(a^2-ab+b^2)}-\dfrac{a}{b}$

Решение:

1) $\dfrac{1+a^2+a}{1-a^3}+\dfrac{a-a^2}{(1-a)^3}=\dfrac{1+a^2+a}{(1-a)(1+a^2+a)}+\dfrac{a(1-a)}{(1-a)^3}=\dfrac{1}{1-a}+\dfrac{a}{(1-a)^2}=$

$=\dfrac{1-a+a}{(1-a)^2}=\dfrac{1}{(1-a)^2}$

2) $\dfrac{a^2(a-b)}{a^3-b^3}+\dfrac{b^2+ab}{a^2+ab+b^2}=\dfrac{a^2(a-b)}{(a-b)(a^2+ab+b^2)}+\dfrac{b^2+ab}{a^2+ab+b^2}=$

$=\dfrac{a^2}{a^2+ab+b^2}+\dfrac{b^2+ab}{a^2+ab+b^2}=\dfrac{a^2+ab+b^2}{a^2+ab+b^2}=1$

3) $\dfrac{a^3+b^3}{b(a^2-ab+b^2)}-\dfrac{a}{b}=\dfrac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{b(a^2-ab+b^2)}-\dfrac{a}{b}=\dfrac{a+b}{b}-\dfrac{a}{b}=\dfrac{a+b-a}{b}=1.$

2) При выполнении преобразований выражений вида $(a+b)\cdot c$ иногда бывает более рациональным не выполнять действия в скобках, а *воспользоваться распределительным свойством умножения*.

2.15. Упростите выражение:

1) $\left(\dfrac{1}{(a-b)^2}-\dfrac{1}{(a+b)^2}\right)\cdot(a^2-b^2)^2$ 2) $(a^2-x^2)\left(\dfrac{1}{a+x}+\dfrac{1}{a^2-x^2}-\dfrac{1}{a-x}\right)$

3) $\dfrac{\left(\dfrac{1}{(x-y)^2}+\dfrac{2}{x^2-y^2}+\dfrac{1}{(x+y)^2}\right)\cdot(x^2-y^2)^2}{(x+y)^2+2(x^2-y^2)+(x-y)^2}$

Решение:

1) $\left(\dfrac{1}{(a-b)^2}-\dfrac{1}{(a+b)^2}\right)\cdot(a^2-b^2)^2=\left(\dfrac{1}{(a-b)^2}-\dfrac{1}{(a+b)^2}\right)\cdot(a-b)^2\cdot(a+b)^2=$

$=\dfrac{(a-b)^2\cdot(a+b)^2}{(a-b)^2}-\dfrac{(a-b)^2\cdot(a+b)^2}{(a+b)^2}=(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$

2) $(a^2-x^2)\left(\dfrac{1}{a+x}+\dfrac{1}{a^2-x^2}-\dfrac{1}{a-x}\right)=\dfrac{(a-x)(a+x)}{a+x}+\dfrac{a^2-x^2}{a^2-x^2}-\dfrac{(a-x)(a+x)}{a-x}=$

$=a-x+1-a-x=1-2x$

$$3)\ \frac{\left(\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{2}{x^2-y^2}+\frac{1}{(x+y)^2}\right)\cdot\left(x^2-y^2\right)^2}{(x+y)^2+2\left(x^2-y^2\right)+(x-y)^2}=\frac{\left(\frac{1}{x-y}+\frac{1}{x+y}\right)^2\cdot\left(x^2-y^2\right)^2}{(x+y+x-y)^2}=$$

$$=\frac{\left(\frac{(x-y)(x+y)}{x-y}+\frac{(x-y)(x+y)}{x+y}\right)^2}{4x^2}=\frac{(x+y+x-y)^2}{4x^2}=1.$$

3) Рассмотрим преобразования дробей, числитель и знаменатель которых являются дробными выражениями.

Такие дроби обычно называют ***сложными дробями***.

2.16. Упростите выражение:

1) $\frac{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2}$ 2) $\frac{1-\frac{1}{x}}{x+\frac{1}{x}-2}$

Решение:

1) Используя основное свойство дроби, умножим числитель и знаменатель дроби на выражение xy.

$$\frac{\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)xy}{\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2\right)xy}=\frac{\frac{x}{y}\cdot xy-\frac{y}{x}\cdot xy}{\frac{x}{y}\cdot xy+\frac{y}{x}\cdot xy-2xy}=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2-2xy}=\frac{(x-y)(x+y)}{(x-y)^2}=\frac{x+y}{x-y}$$

2) Умножим числитель и знаменатель дроби на переменную x.

$$\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)\cdot x}{\left(x+\frac{1}{x}-2\right)\cdot x}=\frac{x-1}{x^2+1-2x}=\frac{x-1}{(x-1)^2}=\frac{1}{x-1}.$$

2.17. Представьте в виде дроби сумму:

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\frac{1}{(x+3)(x+4)}.$$

Решение:

Заметим, что $\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$.

Тогда: $\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\frac{1}{(x+3)(x+4)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}+$

$+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+4}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+4}=\frac{3}{(x+1)(x+4)}$.

Ответ: $\frac{3}{(x+1)(x+4)}$.

2.18. Упростите выражение: $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2}+\frac{2x}{x^2+4}+\frac{4x^3}{x^4+16}$.

Решение:

В этом случае рационально будет сложение выполнять последовательно:
– сначала сложить две первые дроби,
– затем к полученной сумме прибавить третью дробь
– и, наконец, к сумме первых трех дробей прибавить четвертую дробь.

Имеем: $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2}+\frac{2x}{x^2+4}+\frac{4x^3}{x^4+16}=\frac{2x}{x^2-4}+\frac{2x}{x^2+4}+\frac{4x^3}{x^4+16}=$

$=\frac{4x^3}{x^4-16}+\frac{4x^3}{x^4+16}=\frac{8x^7}{x^8-256}$.

Ответ: $\frac{8x^7}{x^8-256}$.

2.19. Упростите: $\frac{x^4-(x-1)^2}{(x^2+1)^2-x^2}+\frac{x^2-(x^2-1)^2}{x^2(x+1)^2-1}+\frac{x^2(x-1)^2-1}{x^4-(x+1)^2}$.

Решение:

$$\frac{x^4-(x-1)^2}{(x^2+1)^2-x^2}+\frac{x^2-(x^2-1)^2}{x^2(x+1)^2-1}+\frac{x^2(x-1)^2-1}{x^4-(x+1)^2}=$$

$$=\frac{(x^2-x+1)(x^2+x-1)}{(x^2+1-x)(x^2+1+x)}+\frac{(x-x^2+1)(x+x^2-1)}{(x^2+x-1)(x^2+x+1)}+\frac{(x^2-x-1)(x^2-x+1)}{(x^2-x-1)(x^2+x+1)}=$$

$$=\frac{x^2+x-1}{x^2+x+1}+\frac{x-x^2+1}{x^2+x+1}+\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}=\frac{x^2+x-1+x-x^2+1+x^2-x+1}{x^2+x+1}=$$

$$=\frac{x^2+x+1}{x^2+x+1}=1.$$

Ответ: 1.

2.20. Упростите: $\frac{x^2+x-20}{x-4}-\frac{2x^2-5x+3}{2x-3}-\frac{4-8x-5x^2}{x+2}$.

Решение:

$$\frac{x^2+x-20}{x-4}-\frac{2x^2-5x+3}{2x-3}+\frac{5x^2+8x-4}{x+2}=\frac{(x+5)(x-4)}{x-4}-\frac{2(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right)}{2x-3}+$$

$$+\frac{5(x+2)\left(x-\frac{2}{5}\right)}{x+2}=\frac{(x+5)(x-4)}{x-4}-\frac{(x-1)(2x-3)}{2x-3}+\frac{(x+2)(5x-2)}{x+2}=$$

$$=x+5-(x-1)+5x-2=5x+4.$$

Ответ: $5x+4$.

2.21. Вычислите: $\frac{(1-x)(x+2)}{x^2(x+1)^2}$, если $x=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

Решение:

$$\frac{(1-x)(x+2)}{x^2(x+1)^2}=\frac{\left(1-\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}+2\right)}{\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{4}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}+1\right)^2}=\frac{\frac{3-\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{3+\sqrt{3}}{2}}{\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{4}\cdot\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{4}}=\frac{\frac{9-3}{4}}{\frac{(3-1)^2}{16}}=$$

$$=\frac{6\cdot 16}{4\cdot 4}=6.$$

Ответ: 6.

Преобразования алгебраических выражений, содержащих модули

Чтобы хорошо овладеть методикой решения уравнений и неравенств с модулем, нужно сначала научиться раскрывать модуль.

В этом случае используют определение модуля:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0, \\ -a, & \text{если } a < 0; \end{cases}$$

и метод промежутков.

Для этого:

1) приравнивают к нулю выражения, стоящие под знаком модуля, и отмечают полученные значения переменной на числовой оси;

2) исследуют алгебраическое выражение в каждом из полученных промежутков.

Рассмотрим несколько примеров на раскрытие модуля.

2.22. Запишите без знака модуля следующее выражение:

$y = |x| + |2-x| + 3|x-3|$, если $2 < x < 3$.

Решение:

$2 < x < 3$

$$y = |\overset{+}{x}| + |\overset{-}{2-x}| + 3|\overset{-}{x-3}| = x - (2-x) - 3(x-3) = x - 2 + x - 3x + 9 = -x + 7.$$

Ответ: $-x+7$.

2.23. Запишите без знака модуля выражение $y = |x+2| - 3x$.

Решение:

$$y = |x+2| - 3x = \begin{cases} x+2-3x, & \text{если } x+2 \geq 0; \\ -(x+2)-3x, & \text{если } x+2 < 0; \end{cases} = \begin{cases} 2-2x, & \text{если } x \geq -2; \\ -2-4x, & \text{если } x < -2. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} 2-2x, & \text{если } x \geq -2; \\ -2-4x, & \text{если } x < -2. \end{cases}$

2.24. Освободитесь от знака модуля в выражении $y = x+1+|x+5|-|x-3|$.

Решение:

1) Определим точки, в которых выражения, стоящие под знаком модуля, равны нулю.

$x+5=0$ $x=-5$	$x-3=0$ $x=3$

2) Нанесем данные точки на числовую ось и определим знак каждого выражения, стоящего под знаком модуля, на полученных промежутках.

		-5		3		
$x+5$	$-$		$+$		$+$	x
$x-3$	$-$		$-$		$+$	

3) Полученные комбинации знаков используем при раскрытии модуля.

Если $x<-5$, то $y=x+1-(x+5)+(x-3)=x+1-x-5+x-3=x-7$;

если $-5\le x\le 3$, то $y=x+1+(x+5)+(x-3)=x+1+x+5+x-3=3x+3$;

если $x>3$, то $y=x+1+(x+5)-(x-3)=x+1+x+5-x+3=x+9$.

Ответ: $y=\begin{cases} x-7, & \text{если } x<-5; \\ 3x+3, & \text{если } -5\le x\le 3; \\ x+9, & \text{если } x>3. \end{cases}$

2.25. Запишите без знака модуля выражение $y=|2x+3|+|x-7|-5$.

Решение:

		$-1{,}5$		7		
$2x+3$	$-$		$+$		$+$	x
$x-7$	$-$		$-$		$+$	

Если $x<-1{,}5$, то $y=-(2x+3)-(x-7)-5=-2x-3-x+7-5=-3x-1$;

если $-1{,}5\le x\le 7$, то $y=(2x+3)-(x-7)-5=2x+3-x+7-5=x+5$;

если $x>7$, то $y=(2x+3)+(x-7)-5=2x+3+x-7-5=3x-9$.

Ответ: $y=\begin{cases} -3x-1, & \text{если } x<-1{,}5; \\ x+5, & \text{если } -1{,}5\le x\le 7; \\ 3x-9, & \text{если } x>7. \end{cases}$

Рассмотрим, как раскрытие модуля позволяет сократить дроби.

2.26. Сократите дробь: $y=\dfrac{x|x-3|}{x^2-x-6}$.

Решение:

Разложим знаменатель на линейные множители: $y=\dfrac{x|x-3|}{(x-3)(x+2)}$.

При $x=3$ и $x=-2$ дробь не определена.

Раскроем модуль и сократим дробь:

Если $x-3<0$ имеем: $y=\dfrac{-x(x-3)}{(x-3)(x+2)}=\dfrac{-x}{x+2}$;

если $x-3>0$ имеем: $y=\dfrac{x(x-3)}{(x-3)(x+2)}=\dfrac{x}{x+2}$.

Ответ: $y=\begin{cases}-\dfrac{x}{x+2}, & \text{если } x<3, \quad x\neq -2;\\ \dfrac{x}{x+2}, & \text{если } x>3.\end{cases}$

2.27. Сократите дробь: $y=\dfrac{3x-x^2-2}{|2-x|}$.

Решение:

$$y=\frac{3x-x^2-2}{|2-x|}=\frac{-(x^2-3x+2)}{|2-x|}=\frac{-(x-1)(x-2)}{|2-x|}$$

Если $2-x>0$: $y=\dfrac{-(x-1)(x-2)}{2-x}=\dfrac{(x-1)(x-2)}{x-2}=x-1$;

если $2-x<0$: $y=\dfrac{-(x-1)(x-2)}{-(2-x)}=\dfrac{-(x-1)(x-2)}{x-2}=1-x$.

Ответ: $y=\begin{cases}x-1, & \text{если } x<2;\\ 1-x, & \text{если } x>2.\end{cases}$

2.28. Упростите: $\left(a^4\right)^{\frac{1}{4}}+\left(b^{\frac{1}{8}}\right)^4$, если $a=-1{,}5$ и $b=2{,}25$.

Решение:

$$\left(a^4\right)^{\frac{1}{4}}+\left(b^{\frac{1}{8}}\right)^4=\sqrt[4]{a^4}+\left(\sqrt[8]{b}\right)^4=|a|+\sqrt{b}=|-1{,}5|+\sqrt{2{,}25}=1{,}5+1{,}5=3.$$

Ответ: 3.

2.29. Вычислите: $\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}+\sqrt{a-2\sqrt{a-1}}$, если $1<a<2$.

Решение:

Введем замену: $t=\sqrt{a-1}$. Тогда: $a=t^2+1$.

По условию $1<a<2$, значит:

$0<a-1<1$; $0<\sqrt{a-1}<1$; $0<t<1$.

Получаем:

$$\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}+\sqrt{a-2\sqrt{a-1}}=\sqrt{t^2+1+2t}+\sqrt{t^2+1-2t}=\sqrt{(t+1)^2}+\sqrt{(t-1)^2}=$$

$$=|t+1|+|t-1|=t+1-(t-1)=2.$$

Ответ: 2.

2.30. Упростите: $\dfrac{a^3+a^2-2a}{a|a+2|-a^2+4}$ при $a\in(-\infty;-2)$.

Решение:

При $a\in(-\infty;-2)$: $|a+2|=-a-2$.

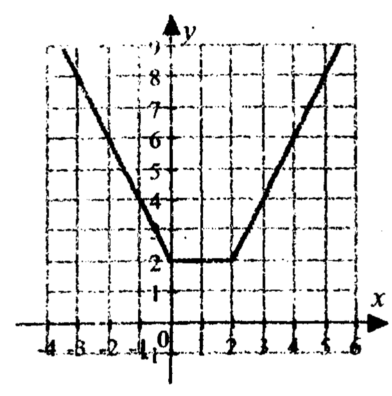
$$\frac{a^3+a^2-2a}{a|a+2|-a^2+4}=\frac{a^3+a^2-2a}{a(-a-2)-a^2+4}=\frac{a\left(a^2+a-2\right)}{-2a^2-2a+4}=\frac{a\left(a^2+a-2\right)}{-2\left(a^2+a-2\right)}=-\frac{a}{2}.$$

Ответ: $-\dfrac{a}{2}$.

2.31. Укажите наименьшее значение функции $y(x)=|x|+|x-2|$.

Решение:

$$y(x)=\begin{cases}-x-(x-2), & \text{при} \quad x<0;\\ x-(x-2), & \text{при} \quad 0\le x\le 2;\\ x+x-2, & \text{при} \quad x>2;\end{cases}=\begin{cases}-2x+2, & \text{при} \quad x<0;\\ 2, & \text{при} \quad 0\le x\le 2;\\ 2x-2, & \text{при} \quad x>2.\end{cases}$$



Из построенного графика функции следует, что искомое минимальное значение – $y=2$.

Ответ: $y=2$.

2.32. Упростите: $\dfrac{\sqrt{a^4-6a^3+9a^2}+\sqrt{4a^4-4a^3+a^2}}{\sqrt{a^2+4a+4}}$, если $\dfrac{1}{2}<a<3$.

Решение:

$$\frac{\sqrt{a^4-6a^3+9a^2}+\sqrt{4a^4-4a^3+a^2}}{\sqrt{a^2+4a+4}}=\frac{\sqrt{a^2(a-3)^2}+\sqrt{a^2(2a-1)^2}}{\sqrt{(a+2)^2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{(a-3)^2}+\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{(2a-1)^2}}{\sqrt{(a+2)^2}}=\frac{|a|\cdot|a-3|+|a|\cdot|2a-1|}{|a+2|}$$

При $\dfrac{1}{2}<a<3$: $\dfrac{\overset{+}{|a|}\cdot\overset{-}{|a-3|}+\overset{+}{|a|}\cdot\overset{+}{|2a-1|}}{\underset{+}{|a+2|}}=\dfrac{a(3-a)+a(2a-1)}{a+2}=\dfrac{a^2+2a}{a+2}=a$.

Ответ: a.

Преобразование выражений, содержащих степени с целыми показателями

Алгебраическое выражение называется рациональным, если оно содержит переменные, над которыми производятся только операции сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в целую степень.

Определение. Если $a \neq 0$ и n – натуральное число, то $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

Выражение 0^{-n} не имеет смысла.

Действия над степенями с целыми показателями выполняются по тем же правилам, что и действия над степенями с натуральными показателями.

Рассмотрим примеры преобразований рациональных выражений, которые содержат степени с целыми показателями.

2.33. Выполните действия:

1) $\left(\dfrac{c^4}{6x^2y^{-5}}\right)^{-2} \cdot \left(\dfrac{1}{3}c^2x^3y^{-2}\right)^4$

2) $\left(\dfrac{1}{4}m^2n\right)^3 \cdot \left(-32m^2n\right)$

3) $\dfrac{2a^4b^{-3}}{3x^4y^{-3}} \cdot \dfrac{6a^{-4}b^4}{5x^{-5}y^3}$

4) $\left(\dfrac{a^{-3}b^2}{9^{-1}c^{-2}}\right)^{-2} : \left(\dfrac{a^2b^3}{6c^3}\right)^2$

Решение:

1) $\left(\dfrac{c^4}{6x^2y^{-5}}\right)^{-2} \cdot \left(\dfrac{1}{3}c^2x^3y^{-2}\right)^4 = \dfrac{36x^4y^{-10}}{c^8} \cdot \dfrac{1}{81}c^8x^{12}y^{-8} = \dfrac{4}{9}x^{16}y^{-18} = \dfrac{4x^{16}}{9y^{18}}$

2) $\left(\dfrac{1}{4}m^2n\right)^3 \cdot \left(-32m^2n\right) = \dfrac{1}{64}m^6n^3 \cdot \left(-32m^2n\right) = -\dfrac{1}{2}m^8n^4$

3) $\dfrac{2a^4b^{-3}}{3x^4y^{-3}} \cdot \dfrac{6a^{-4}b^4}{5x^{-5}y^3} = \dfrac{0{,}8b}{x^{-1}} = 0{,}8bx$

4) $\left(\dfrac{a^{-3}b^2}{9^{-1}c^{-2}}\right)^{-2} : \left(\dfrac{a^2b^3}{6c^3}\right)^2 = \dfrac{a^6b^{-4}}{9^2c^4} : \dfrac{a^4b^6}{6^2c^6} = \dfrac{a^6b^{-4} \cdot 36c^6}{81c^4 \cdot a^4b^6} = \dfrac{4a^2c^2}{9b^{10}}.$

2.34. Упростите выражение:

1) $\left(\dfrac{a^{-1}+b^{-1}}{a+b}\right)^{-1}$ 2) $\left(ab^{-2}+a^{-2}b\right)\left(a^{-1}+b^{-1}\right)^{-1}$

3) $\left(1+\dfrac{x^{-n}+y^{-n}}{x^{-n}-y^{-n}}\right)^{-2}$ и найдите его значение при $x=3$, $y=0{,}75$, $n=1$

4) $\dfrac{x^{-6}+x^{-4}+x^{-2}}{x^{2}+x^{4}+x^{6}}$ 5) $\left(x^{2}-a^{-1}x+a^{-2}\right)\left(x^{-1}+a\right)-x(ax)^{-2}$

6) $\left(\dfrac{x^{-1}+1}{x^{-1}-1}\right)^{-1}-1-2(1+x)^{-1}$ 7) $a^{-5}\left(\dfrac{25-4a^{-4}}{5a^{-1}+2a^{-3}}-\dfrac{1-1{,}5a^{-2}-a^{-4}}{a^{-1}+0{,}5a^{-3}}\right)^{5}$

Решение:

1) $$\left(\frac{a^{-1}+b^{-1}}{a+b}\right)^{-1}=\frac{a+b}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\frac{(a+b)\cdot ab}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\cdot ab}=\frac{(a+b)\cdot ab}{a+b}=ab$$

2) $$\left(ab^{-2}+a^{-2}b\right)\left(a^{-1}+b^{-1}\right)^{-1}=\left(\frac{a}{b^{2}}+\frac{b}{a^{2}}\right)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^{-1}=\left(\frac{a^{3}+b^{3}}{a^{2}b^{2}}\right)\cdot\left(\frac{a+b}{ab}\right)^{-1}=$$

$$=\frac{(a+b)\left(a^{2}-ab+b^{2}\right)\cdot ab}{a^{2}b^{2}\cdot(a+b)}=\frac{a^{2}-ab+b^{2}}{ab}$$

3) $$\left(1+\frac{x^{-n}+y^{-n}}{x^{-n}-y^{-n}}\right)^{-2}=\left(1+\frac{\frac{1}{x^{n}}+\frac{1}{y^{n}}}{\frac{1}{x^{n}}-\frac{1}{y^{n}}}\right)^{-2}=\left(1+\frac{x^{n}+y^{n}}{y^{n}-x^{n}}\right)^{-2}=\left(\frac{2y^{n}}{y^{n}-x^{n}}\right)^{-2}=$$

$$=\left(\frac{y^{n}-x^{n}}{2y^{n}}\right)^{2}=\frac{1}{4}\left(1-\left(\frac{x}{y}\right)^{n}\right)^{2}=\frac{1}{4}(1-4)^{2}=\frac{9}{4}=2\frac{1}{4}$$

4) $$\frac{x^{-6}+x^{-4}+x^{-2}}{x^{2}+x^{4}+x^{6}}=\frac{x^{-2}\left(\frac{1}{x^{4}}+\frac{1}{x^{2}}+1\right)}{x^{2}\left(1+x^{2}+x^{4}\right)}=x^{-4}\cdot\frac{\frac{1+x^{2}+x^{4}}{x^{4}}}{1+x^{2}+x^{4}}=$$

$$=x^{-4}\cdot\frac{1+x^{2}+x^{4}}{x^{4}\left(1+x^{2}+x^{4}\right)}=x^{-8}$$

5) $\left(x^2-a^{-1}x+a^{-2}\right)\left(x^{-1}+a\right)-x(ax)^{-2}=\left(x^2-\frac{x}{a}+\frac{1}{a^2}\right)\left(\frac{1}{x}+a\right)-\frac{x}{a^2x^2}=$

$$=\frac{\left(a^2x^2-ax+1\right)(1+ax)}{a^2x}-\frac{1}{a^2x}=\frac{1+a^3x^3}{a^2x}-\frac{1}{a^2x}=\frac{a^3x^3}{a^2x}=ax^2$$

6) $\left(\frac{x^{-1}+1}{x^{-1}-1}\right)^{-1}-1-2(1+x)^{-1}=\left(\frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x}-1}\right)^{-1}-1-\frac{2}{x+1}=\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1}-1-\frac{2}{x+1}=$

$$=\frac{1-x}{1+x}-1-\frac{2}{x+1}=\frac{1-x-x-1-2}{x+1}=\frac{-2x-2}{x+1}=-2$$

7) $a^{-5}\left(\frac{25-4a^{-4}}{5a^{-1}+2a^{-3}}-\frac{1-1,5a^{-2}-a^{-4}}{a^{-1}+0,5a^{-3}}\right)^5=a^{-5}\left(\frac{25-\frac{4}{a^4}}{\frac{5}{a}+\frac{2}{a^3}}-\frac{1-\frac{3}{2a^2}-\frac{1}{a^4}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{2a^3}}\right)^5=$

$$=\frac{1}{a^5}\cdot\left(\frac{25a^4-4}{a\left(5a^2+2\right)}-\frac{2a^4-3a^2-2}{a\left(2a^2+1\right)}\right)^5=$$

$$=\frac{1}{a^5}\cdot\left(\frac{\left(5a^2+2\right)\left(5a^2-2\right)}{a\left(5a^2+2\right)}-\frac{\left(2a^2+1\right)\left(a^2-2\right)}{a\left(2a^2+1\right)}\right)^5=$$

$$=\frac{1}{a^5}\cdot\left(\frac{5a^2-2}{a}-\frac{a^2-2}{a}\right)^5=\frac{1}{a^5}\cdot\left(\frac{4a^2}{a}\right)^5=\frac{4^5a^5}{a^5}=4^5=2^{10}=1024.$$

Преобразование рациональных выражений при заданных условиях

2.35. Найдите значение выражения $\frac{a^2-b^2}{2a^2+5ab+3b^2}$, если $\frac{a+b}{a-2b}=\frac{2}{3}$.

Решение:

Преобразуем заданное выражение:

$$\frac{a^2-b^2}{2a^2+5ab+3b^2}=\frac{a^2-b^2}{2a^2+2ab+3ab+3b^2}=\frac{(a-b)(a+b)}{2a(a+b)+3b(a+b)}=$$

$$=\frac{(a-b)(a+b)}{(a+b)(2a+3b)}=\frac{a-b}{2a+3b}$$

Выразим переменную a через b из соотношения $\frac{a+b}{a-2b}=\frac{2}{3}$ и подставим в полученное выше выражение:

$$\frac{a+b}{a-2b}=\frac{2}{3}; \qquad 3a+3b=2a-4b; \qquad a=-7b.$$

Тогда: $\frac{a-b}{2a+3b}=\frac{-7b-b}{-14b+3b}=\frac{8}{11}$.

Ответ: $\frac{8}{11}$.

2.36. Найдите значение выражения $\left(\frac{x^{-1}}{y^{-1}}\right)^{-1}$, если $\frac{x^{-1}-2y^{-1}}{x^{-1}+2y^{-1}}=5^{-1}$.

Решение:

$$\frac{x^{-1}-2y^{-1}}{x^{-1}+2y^{-1}}=5^{-1}; \qquad \frac{\frac{1}{x}-\frac{2}{y}}{\frac{1}{x}+\frac{2}{y}}=\frac{1}{5}; \qquad \frac{y-2x}{y+2x}=\frac{1}{5}; \qquad 5y-10x=y+2x; \qquad y=3x.$$

Тогда: $\left(\frac{x^{-1}}{y^{-1}}\right)^{-1}=\frac{x}{y}=\frac{1}{3}$.

Ответ: $\frac{1}{3}$.

2.37. Вычислите $a^2+\frac{1}{a^2}$, если $a+\frac{1}{a}=3$.

Решение:

Выражение $a+\frac{1}{a}=3$ возведем в квадрат:

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2=3^2; \qquad a^2+\frac{1}{a^2}+2=9; \qquad a^2+\frac{1}{a^2}=7.$$

Ответ: 7.

2.38. Вычислите xy, если $x-y=\sqrt{111}$, $x+y=\sqrt{37}$.

Решение:

Возведем в квадрат заданные соотношения:

$$\begin{cases}(x-y)^2=\left(\sqrt{111}\right)^2, \\ (x+y)^2=\left(\sqrt{37}\right)^2;\end{cases} \qquad -\begin{cases}x^2-2xy+y^2=111, \\ x^2+2xy+y^2=37;\end{cases}$$

$$-4xy=74$$

$$xy=-18,5.$$

Ответ: $xy=-18,5$.

2.39. Найдите значение выражения $\frac{x}{y}$, если $\frac{10x^2-13xy+3y^2}{2x^2-3y^2}=4$.

Решение:

Разделим числитель и знаменатель дроби на $y^2\neq 0$:

$$\frac{10\frac{x^2}{y^2}-13\frac{xy}{y^2}+3\frac{y^2}{y^2}}{2\frac{x^2}{y^2}-3\frac{y^2}{y^2}}=4; \qquad \frac{10\left(\frac{x}{y}\right)^2-13\frac{x}{y}+3}{2\left(\frac{x}{y}\right)^2-3}=4.$$

Введем новую переменную: $\frac{x}{y}=a$.

Получаем: $\frac{10a^2-13a+3}{2a^2-3}=4$;

$2a^2-13a+15=0$;

$$\left[\begin{array}{l}a=1,5, \\ a=5;\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\frac{x}{y}=1,5, \\ \frac{x}{y}=5.\end{array}\right.$$

Ответ: 1,5 или 5.

2.40. Найдите значение выражения $x+y$, если $x^2-6x+y^2+4y+13=0$.

Решение:

$x^2-6x+y^2+4y+13=0$

$x^2-6x+9+y^2+4y+4=0$

$(x-3)^2+(y+2)^2=0$

Выражения $(x-3)^2$ и $(y+2)^2$ – неотрицательные, следовательно, их сумма может быть равна нулю только в том случае, если оба этих слагаемых одновременно равны нулю. Таким образом, полученное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} x-3=0, \\ y+2=0; \end{cases} \quad \begin{cases} x=3, \\ y=-2; \end{cases} \quad x+y=3-2=1.$$

Ответ: 1.

2.41. Найдите значение выражения $a^3-\frac{1}{a^3}$, если $a-\frac{1}{a}=\frac{2}{3}$.

Решение:

Выражение $a-\frac{1}{a}=\frac{2}{3}$ возведем в куб:

$$\left(a-\frac{1}{a}\right)^3=\left(\frac{2}{3}\right)^3; \quad a^3-3a\cdot\frac{1}{a}\cdot\left(a-\frac{1}{a}\right)-\frac{1}{a^3}=\frac{8}{27}; \quad a^3-3\cdot\frac{2}{3}-\frac{1}{a^3}=\frac{8}{27};$$

$$a^3-\frac{1}{a^3}=\frac{8}{27}+2; \quad a^3-\frac{1}{a^3}=2\frac{8}{27}.$$

Ответ: $2\frac{8}{27}$.

2.42. Найдите значение выражения $\frac{(a-b)^{-1}-(a+b)^{-1}}{(a-b)^{-1}+(a+b)^{-1}}$, если $\frac{a}{b}=3$.

Решение:

$$\frac{(a-b)^{-1}-(a+b)^{-1}}{(a-b)^{-1}+(a+b)^{-1}}=\frac{\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a+b}}{\frac{1}{a-b}+\frac{1}{a+b}}=\frac{a+b-a+b}{a+b+a-b}=\frac{2b}{2a}=\frac{b}{a}=\frac{1}{3}.$$

Ответ: $\frac{1}{3}$.

2.43. Вычислите значение выражения $\frac{2a-b}{3a-b}+\frac{5b-a}{3a+b}$, если $10a^2-3b^2+5ab=0$ и $9a^2-b^2\neq 0$.

Решение:

$$\frac{2a-b}{3a-b}+\frac{5b-a}{3a+b}=\frac{(2a-b)(3a+b)+(5b-a)(3a-b)}{9a^2-b^2}=\frac{3a^2+15ab-6b^2}{9a^2-b^2}$$

Из соотношения $10a^2-3b^2+5ab=0$ получаем, что: $5ab=3b^2-10a^2$.

$$\frac{3a^2+3\cdot 5ab-6b^2}{9a^2-b^2}=\frac{3a^2+3\left(3b^2-10a^2\right)-6b^2}{9a^2-b^2}=\frac{3b^2-27a^2}{9a^2-b^2}=$$

$$=\frac{-3\left(9a^2-b^2\right)}{9a^2-b^2}=-3.$$

Ответ: -3.

2.44. Вычислите значение выражения $\frac{a+2b}{a-2b}$, если $\frac{3a^2+ab-b^2}{a^2+b^2-ab}=3$ $(ab>0)$.

Решение:

Разделим числитель и знаменатель дроби $\frac{3a^2+ab-b^2}{a^2+b^2-ab}$ на $b^2\neq 0$:

$$\frac{3\frac{a^2}{b^2}+\frac{ab}{b^2}-\frac{b^2}{b^2}}{\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{b^2}-\frac{ab}{b^2}}=3;\qquad \frac{3\left(\frac{a}{b}\right)^2+\frac{a}{b}-1}{\left(\frac{a}{b}\right)^2+1-\frac{a}{b}}=3.$$

Введем новую переменную: $\frac{a}{b}=x$.

Получаем: $\frac{3x^2+x-1}{x^2+1-x}=3$; $3x^2+x-1=3x^2+3-3x$; $4x=4$; $x=1$.

$\frac{a}{b}=1$, следовательно, $a=b$.

$$\frac{a+2b}{a-2b}=\frac{b+2b}{b-2b}=\frac{3b}{-b}=-3.$$

Ответ: -3.

2.45. Вычислите $\frac{(x^2+3x+1)(x^2-4x+1)}{x^2}$ если $x+\frac{1}{x}=3$.

Решение:

$$\frac{(x^2+3x+1)(x^2-4x+1)}{x^2}=\left(\frac{x^2+3x+1}{x}\right)\left(\frac{x^2-4x+1}{x}\right)=$$

$$=\left(x+\frac{1}{x}+3\right)\left(x+\frac{1}{x}-4\right)=(3+3)(3-4)=-6.$$

Ответ: -6.

2.46. Вычислите x^3y+xy^3, если $x-y=4$; $xy=3$.

Решение:

$$x^3y+xy^3=xy\left(x^2+y^2\right)=xy\left(x^2+y^2+2xy-2xy\right)=xy\left((x-y)^2+2xy\right)=$$

$$=3\cdot\left(4^2+2\cdot3\right)=66.$$

Ответ: 66.

§3. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ РАЦИОНАЛЬНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Линейное уравнение

Определение. Линейным называется уравнение вида:

$$ax+b=0,\quad a\neq 0.$$

Такое уравнение имеет один корень, нахождение которого не вызывает затруднений:

$$x=-\frac{b}{a}.$$

3.1. Решите уравнение: $(a-1)x+2=a+1$.

Решение:

При $a\neq 1$ получаем: $x=\dfrac{a-1}{a-1}=1$.

При $a=1$ уравнение принимает вид: $0\cdot x+2=2$.

Это верное тождество, поэтому любое действительное число будет его решением.

Ответ: Если $a\neq 1$, то $x=1$; если $a=1$, то $x\in\mathbb{R}$.

Многие уравнения в результате преобразований сводятся к линейным.

3.2. Решите уравнение: $\dfrac{2}{3}+\dfrac{x}{4}+\dfrac{1-x}{6}=\dfrac{5x}{12}-1$.

Решение:

Умножив обе части уравнения на число 12, получим:

$8+3x+2-2x=5x-12$

$4x=22$

$x=5{,}5$.

Ответ: $x=5{,}5$.

3.3. Решите уравнение: $9x-4(2x-1)=4+x$.

Решение:

$9x-8x+4=4+x$

$0\cdot x=0$

Получаем истинное равенство независимо от значения x, значит $x\in\mathbb{R}$.

Ответ: $x\in\mathbb{R}$.

3.4. Решите уравнение: $\frac{3x-5}{3}-\frac{9x-1}{9}=0$.

Решение:

$$\frac{3x-5}{3}-\frac{9x-1}{9}=0 \quad \Big| \cdot 9$$

$$3(3x-5)-(9x-1)=0$$

$$9x-15-9x+1=0$$

$$0\cdot x=14$$

Получаем ложное равенство. Это значит, что данное уравнение решений не имеет.

Ответ: $x\in\varnothing$.

Квадратное уравнение

Определение. Квадратным называется уравнение вида:

$$ax^2+bx+c=0, \quad a\neq 0.$$

В школьном курсе математики изучаются формулы корней квадратных уравнений, с помощью которых можно решать любые квадратные уравнения. Умение быстро находить корни квадратного уравнения имеет большое значение при тестировании.

Известно, что для большинства квадратных уравнений с целыми корнями (при $a=1$) эти корни без труда находятся подбором, основанным на теореме, обратной *теореме Виета*. Однако этот способ становится уже практически неприменимым, если уравнение имеет дробные корни.

Для преодоления возникшей трудности используется следующий прием:

– «перебросить» коэффициент a в свободный член (умножить свободный член на a);

– найти корни нового уравнения;

– разделить их на a.

Рассмотрим этот прием на конкретном примере.

3.5. Решите уравнение: $12x^2+13x+3=0$.

Решение:

$$12x^2+13x+3=0 \qquad\qquad x^2+13x+3\cdot 12=0$$

$$x_1=\frac{-4}{12}=-\frac{1}{3},\quad x_2=\frac{-9}{12}=-\frac{3}{4}. \qquad\qquad x_1=-4,\quad x_2=-9.$$

Ответ: $\left\{-\frac{3}{4};\ -\frac{1}{3}\right\}$.

Использование свойств коэффициентов квадратного уравнения

Пусть дано квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$.

- Если $a+b+c=0$ (то есть сумма коэффициентов уравнения равна нулю), то:

$$x_1=1,\quad x_2=\frac{c}{a}.$$

3.6. Решите уравнение: $345x^2-137x-208=0$.

Решение:

Так как $a+b+c=0$ $\left(345-137-208=0\right)$, то:

$$x_1=1,\quad x_2=-\frac{208}{345}.$$

Ответ: $\left\{-\frac{208}{345};\ 1\right\}$.

- Если $a-b+c=0$ или $b=a+c$, то:

$$x_1=-1,\quad x_2=-\frac{c}{a}.$$

3.7. Решите уравнение: $11x^2+27x+16=0$.

Решение:

Так как $b=a+c$ $\left(11+16=27\right)$, то:

$$x_1=-1,\quad x_2=-\frac{16}{11}.$$

Ответ: $\left\{-\frac{16}{11};\ -1\right\}$.

• Если второй коэффициент $b = 2k$ — четное число, то формулу корней можно записать в виде:

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}.$$

3.8. Решите уравнение: $3x^2 - 14x + 16 = 0$.

Решение:

$3x^2 - 14x + 16 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{3} = \frac{7 \pm 1}{3}$$

$x_1 = 2$, $x_2 = \frac{8}{3}$.

Ответ: $\left\{2;\ \frac{8}{3}\right\}$.

Перечисленные способы решения квадратных уравнений специального вида позволяют очень быстро и рационально решать многие уравнения.

3.9. Решите уравнение: $27x^2 - 6\sqrt{3}x + 1 = 0$.

Решение:

$27x^2 - 6\sqrt{3}x + 1 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{3\sqrt{3} \pm \sqrt{27 - 27}}{27} = \frac{3\sqrt{3}}{27} = \frac{\sqrt{3}}{9}.$$

Ответ: $x = \frac{\sqrt{3}}{9}$.

3.10. Решите уравнение: $6x^2 + 3\sqrt{3}x + \sqrt{3} + 2x = 0$.

Решение:

$6x^2 + \left(3\sqrt{3} + 2\right)x + \sqrt{3} = 0$

$D = \left(3\sqrt{3} + 2\right)^2 - 24\sqrt{3} = \left(3\sqrt{3}\right)^2 + 12\sqrt{3} + 2^2 - 24\sqrt{3} =$

$$=\left(3\sqrt{3}\right)^2-12\sqrt{3}+2^2=\left(3\sqrt{3}-2\right)^2$$

$$x_{1,2}=\frac{-\left(3\sqrt{3}+2\right)\pm\sqrt{\left(3\sqrt{3}-2\right)^2}}{12}$$

$$x_1=\frac{-3\sqrt{3}-2+3\sqrt{3}-2}{12}=-\frac{4}{12}=-\frac{1}{3}$$

$$x_2=\frac{-3\sqrt{3}-2-3\sqrt{3}+2}{12}=-\frac{6\sqrt{3}}{12}=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{3}\right\}$.

Решение целых алгебраических уравнений

Для решения таких уравнений чаще всего применяют следующие методы:

- разложение на множители;
- подбор корня многочлена по его свободному коэффициенту;
- введение новой переменной.

Метод разложения на множители

Путем группировки слагаемых, применяя формулы сокращенного умножения, приводим исходное уравнение к виду, когда слева записано произведение нескольких множителей, а справа – нуль. Затем приравниваем к нулю каждый из множителей.

3.11. Решите уравнение: $x^3-3x+2=0$.

Решение:

$$x^3\overbrace{-x-2x}^{-3x}+2=0$$

$$x\left(x^2-1\right)-2\left(x-1\right)=0$$

$$x\left(x-1\right)\left(x+1\right)-2\left(x-1\right)=0$$

$$\left(x-1\right)\left(x^2+x-2\right)=0$$

$$\left[\begin{array}{l}x-1=0,\\ x^2+x-2=0;\end{array}\right.\qquad\left[\begin{array}{l}x=1,\\ x_1=-2,\quad x_2=1.\end{array}\right.$$

Ответ: $\{-2;\ 1\}$.

3.12. Решите уравнение: $(2x+1)(x^2-7x+6)=(x-1)^2(x+0,5)$.

Решение:

$$(2x+1)(x^2-7x+6)=(x-1)^2(x+0,5)$$

$$2(x+0,5)(x^2-7x+6)-(x-1)^2(x+0,5)=0$$

$$(x+0,5)(2x^2-14x+12-x^2+2x-1)=0$$

$$(x+0,5)(x^2-12x+11)=0$$

$$\left[\begin{array}{l} x+0,5=0, \\ x^2-12x+11=0; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=-0,5, \\ x_1=1, \quad x_2=11. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{-0,5;\ 1;\ 11\}$.

3.13. Решите уравнение: $x^3-5x^2+9x-5=0$.

Решение:

$$x^3\overbrace{-x^2-4x^2}^{-5x^2}+\overbrace{4x+5x}^{9x}-5=0$$

$$x^2(x-1)-4x(x-1)+5(x-1)=0$$

$$(x-1)(x^2-4x+5)=0$$

$$\left[\begin{array}{l} x-1=0, \\ x^2-4x+5=0; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=1, \\ \text{решений нет, так как } D<0. \end{array}\right.$$

Ответ: $x=1$.

3.14. Решите уравнение: $(x-1)(x-2)^3+(1-x)(x-3)^3=13x-13$.

Решение:

$$(x-1)(x-2)^3-(x-1)(x-3)^3-13(x-1)=0$$

$$(x-1)\left((x-2)^3-(x-3)^3-13\right)=0$$

$$(x-1)(x^3-6x^2+12x-8-x^3+9x^2-27x+27-13)=0$$

$$(x-1)(3x^2-15x+6)=0$$

$$\left[\begin{array}{l} x-1=0, \\ x^2-5x+2=0; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x_{1,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{17}}{2}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{1;\ \dfrac{5\pm\sqrt{17}}{2}\right\}$.

3.15. Решите уравнение: $x^5+x^4-6x^3-6x^2+8x+8=0$.

Решение:

$$x^5+x^4-6x^3-6x^2+8x+8=0$$

$$x^4(x+1)-6x^2(x+1)+8(x+1)=0$$

$$(x^4-6x^2+8)(x+1)=0$$

Корнями многочлена a^2-6a+8 являются числа 2 и 4.

Следовательно, $x^4-6x^2+8=(x^2-2)(x^2-4)$.

$$(x^2-2)(x^2-4)(x+1)=0$$

$x_{1,2}=\pm\sqrt{2}$; $x_{3,4}=\pm 2$; $x_5=-1$.

Ответ: $\{-1;\ \pm\sqrt{2};\ \pm 2\}$.

Метод подбора корня многочлена по его свободному коэффициенту

Теорема. Если целое рациональное уравнение

$$x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n=0$$

имеет целые корни, то они являются делителями свободного члена этого уравнения.

3.16. Решите уравнение: $x^3+3x^2-2x-2=0$.

Решение:

$$x^3+3x^2-2x-2=0$$

Коэффициенты многочлена x^3+3x^2-2x-2 - целые числа. Следовательно, если заданное уравнение имеет целые корни, то они могут быть только среди чисел: ± 1, ± 2.

Подставим значение $x=1$: $1+3-2-2=0$.

Значит, $x=1$ является корнем многочлена x^3+3x^2-2x-2.

Тогда произведем деление данного многочлена на двучлен $(x-1)$ «столбиком»:

$$\begin{array}{r|l} -\,x^3+3x^2-2x-2 & x-1 \\ \underline{x^3-x^2} \quad\quad\quad\quad & \overline{x^2+4x+2} \\ -\,4x^2-2x \quad\quad & \\ \underline{4x^2-4x} \quad\quad & \\ -\,2x-2 & \\ \underline{2x-2} & \\ 0 & \end{array}$$

Следовательно: $x^3+3x^2-2x-2=(x-1)(x^2+4x+2)$

$(x-1)(x^2+4x+2)=0$

$\left[\begin{array}{l} x-1=0, \\ x^2+4x+2=0; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x_{1,2}=-2\pm\sqrt{2}. \end{array}\right.$

Ответ: $\{1;\ -2\pm\sqrt{2}\}$.

3.17. Решите уравнение: $x^3-x^2-8x+12=0$.

Решение:

Целые числа, которые могут быть корнями уравнения, являются делителями свободного члена:

$$\pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \pm4,\ \pm6,\ \pm12.$$

Подставим эти значения.

$x=1$: $1-1-8+12\neq0$, то есть $x=1$ корнем не является;

$x=-1$: $-1-1+8+12\neq0$, то есть $x=-1$ корнем не является;

$x=2$: $8-4-16+12=0$.

Значит, $x=2$ является корнем уравнения $x^3-x^2-8x+12=0$.

Разделим многочлен $x^3-x^2-8x+12$ на двучлен $(x-2)$ «столбиком», для того чтобы определить остальные корни заданного уравнения.

$$
\begin{array}{r|l}
_{-}x^3-x^2-8x+12 & x-2 \\
\underline{x^3-2x^2} \quad\quad & \overline{x^2+x-6} \\
_{-}x^2-8x \quad & \\
\underline{x^2-2x} \quad & \\
_{-}-6x+12 & \\
\underline{-6x+12} & \\
0 &
\end{array}
$$

Следовательно: $x^3-x^2-8x+12=(x-2)(x^2+x-6)$

$(x-2)(x^2+x-6)=0$

$\left[\begin{array}{l} x-2=0, \\ x^2+x-6=0; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x_1=2, \quad x_2=-3. \end{array}\right.$

Ответ: $\{-3;\ 2\}$.

Метод введения новой переменной

Определяем в уравнении некоторое повторяющееся выражение, которое обозначаем как новую переменную, упрощая тем самым вид уравнения.

3.18. Решите уравнение: $(x^2+x-2)(x^2+x-3)=12$.

Решение:

Обозначим $x^2+x-3=a$, тогда исходное уравнение примет вид:
$(a+1)a=12$

$a^2+a-12=0$

$a_1=-4$, $a_2=3$

$\left[\begin{array}{l} x^2+x-3=-4, \\ x^2+x-3=3; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x^2+x+1=0, \\ x^2+x-6=0; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \text{решений нет}, \\ x_1=-3, \quad x_2=2. \end{array}\right.$

Ответ: $\{-3;\ 2\}$.

3.19. Решите уравнение: $(x^2+3x)^2-14x^2-42x+40=0$.

Решение:

$$\left(x^2+3x\right)^2-14\left(x^2+3x\right)+40=0$$

Введем новую переменную: $x^2+3x=a$.

$$a^2-14a+40=0$$

$$a_1=4, \quad a_2=10$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2+3x=4, \\ x^2+3x=10; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x^2+3x-4=0, \\ x^2+3x-10=0; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x_1=-4, \quad x_2=1, \\ x_3=-5, \quad x_4=2. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{-5; -4; 1; 2\}$.

В более сложных случаях замена видна лишь после некоторых преобразований.

3.20. Решите уравнение: $\left(x^2+2x\right)^2-(x+1)^2=55$.

Решение:

Перепишем уравнение иначе, а именно:

$$\left(x^2+2x\right)^2-\left(x^2+2x+1\right)=55.$$

Теперь замена очевидна: $x^2+2x=a$.

$$a^2-a-56=0$$

$$a_1=-7, \quad a_2=8$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2+2x=-7, \\ x^2+2x=8; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x^2+2x+7=0, \\ x^2+2x-8=0; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \text{решений нет}, \\ x_1=2, \quad x_2=-4. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{-4; 2\}$.

3.21. Решите уравнение: $(x-2)(x-3)^2(x-4)=20$.

Решение:

$$\underbrace{(x-2)\cdot(x-4)}_{\text{перемножим}} \cdot \underbrace{(x-3)^2}_{\text{возведем в квадрат}} = 20.$$

$$\left(x^2-6x+8\right)\left(x^2-6x+9\right)=20$$

Сделаем замену: $x^2-6x+8=a$.

$$a(a+1)=20$$

$$a^2+a-20=0$$

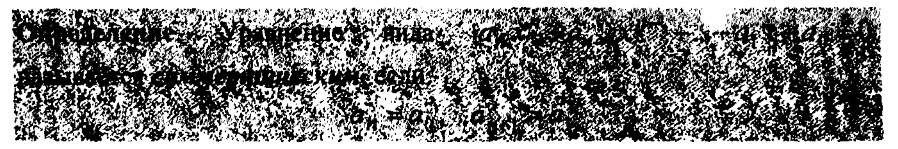
$$a_1=-5,\quad a_2=4$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2-6x+8=-5, \\ x^2-6x+8=4; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x^2-6x+13=0, \\ x^2-6x+4=0; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \text{решений нет,} \\ x=3\pm\sqrt{5}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{3\pm\sqrt{5}\}$.

Симметрические уравнения

Интересная замена неизвестного применяется при решении симметрических уравнений.



Определение. Уравнение вида [illegible] называется симметрическим, если

$a_n = a_0$, [illegible]

то есть если равноудаленные от концов коэффициенты попарно равны.

3.22. Решите симметрическое уравнение: $x^4-2x^3-x^2-2x+1=0$.

Решение:

Очевидно, что значение $x=0$ не является решением данного уравнения. Разделим обе части уравнения на выражение x^2:

$$x^2-2x-1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-2\left(x+\frac{1}{x}\right)-1=0$$

Введем новую переменную: $a=x+\dfrac{1}{x}$.

Тогда: $a^2=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+2$.

Следовательно, $\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)$ можно представить как a^2-2.

Получаем квадратное уравнение:

$a^2-2-2a-1=0$

$a^2-2a-3=0$

$a_1=-1,\ a_2=3$

$$\left[\begin{array}{l} x+\dfrac{1}{x}=-1, \\ x+\dfrac{1}{x}=3; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x^2+x+1=0, \\ x^2-3x+1=0; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \text{решений нет,} \\ x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$.

3.23. Решите симметрическое уравнение: $5x^4-3x^3-4x^2-3x+5=0$.

Решение:

Разделим правую и левую часть уравнения на выражение $x^2\neq 0$:

$5x^4-3x^3-4x^2-3x+5=0 \quad \Big| : x^2\neq 0$

$$5x^2-3x-4-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}=0$$

$$5\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-3\left(x+\frac{1}{x}\right)-4=0$$

Замена: $a=x+\dfrac{1}{x}$.

При этом $\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)$ можно представить как a^2-2.

Получаем уравнение:

$5\left(a^2-2\right)-3a-4=0$

$5a^2-3a-14=0$

$a_1=-\dfrac{7}{5};\quad a_2=2$.

$$\left[\begin{array}{l} x+\frac{1}{x}=-\frac{7}{5}, \\ x+\frac{1}{x}=2; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 5x^2+7x+5=0, \\ x^2-2x+1=0; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \text{решений нет,} \\ x=1. \end{array}\right.$$

Ответ: $x=1$.

Однородные уравнения

Определение. *Однородным* уравнением называется уравнение вида:

$$ay^{2\alpha}+by^{\alpha}z^{\alpha}+cz^{2\alpha}=0, \text{ где}$$

a, b, c, α – заданные числа, отличные от нуля,

$y=y(x)$, $z=z(x)$ – некоторые функции от x.

Однородное уравнение сводится к квадратному, если разделить обе части уравнения на функцию $z^{2\alpha}\neq 0$. Тогда получаем уравнение:

$$a\left(\frac{y}{z}\right)^{2\alpha}+b\left(\frac{y}{z}\right)^{\alpha}+c=0.$$

3.24. Решите однородное уравнение:

$$3\left(x^2-x+1\right)^2-5(x+1)\left(x^2-x+1\right)-2(x+1)^2=0.$$

Решение:

Разделив обе части уравнения на выражение $\left(x^2-x+1\right)^2\neq 0$, получим:

$$3-5\cdot\frac{x+1}{x^2-x+1}-2\left(\frac{x+1}{x^2-x+1}\right)^2=0$$

Пусть $\frac{x+1}{x^2-x+1}=a$, тогда:

$$2a^2+5a-3=0$$

$$a_1=-3, \quad a_2=\frac{1}{2}$$

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{x+1}{x^2-x+1}=\dfrac{1}{2},\\[2mm] \dfrac{x+1}{x^2-x+1}=-3;\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}2x+2=x^2-x+1,\\ x+1=-3x^2+3x-3;\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x^2-3x-1=0,\\ 3x^2-2x+4=0;\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2},\\ \text{решений нет.}\end{array}\right.$$

Ответ: $x_{1,2}=\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}$.

3.25. Решите уравнение: $\left(x^2+6\right)^2+\left(x^2+6\right)\left(x^2+1\right)-6\left(x^2+1\right)^2=0$.

Решение:

$$\left(x^2+6\right)^2+\left(x^2+6\right)\left(x^2+1\right)-6\left(x^2+1\right)^2=0 \quad \Big| :\left(x^2+1\right)^2\neq 0$$

$$\frac{\left(x^2+6\right)^2}{\left(x^2+1\right)^2}+\frac{\left(x^2+6\right)}{\left(x^2+1\right)}-6=0$$

Замена: $a=\dfrac{x^2+6}{x^2+1}$.

$a^2+a-6=0$

$a_1=-3$; $a_2=2$.

Выражение $\dfrac{x^2+6}{x^2+1}$ не может быть отрицательным, поэтому корень $a_1=-3$ можно не рассматривать.

$\dfrac{x^2+6}{x^2+1}=2$; $\qquad x^2+6=2x^2+2$; $\qquad x^2=4$; $\qquad x_{1,2}=\pm 2$.

Ответ: $x=\pm 2$.

В ряде других случаев удобную замену желательно продумать заранее. Например:

Уравнение вида $(x+a)^4+(x+b)^4=c$ сводится к квадратному, [illegible] провести замену $x=t-\frac{a+b}{2}$

3.26. Решите уравнение: $(x+3)^4+(x+5)^4=16$.

Решение:

Введем новую переменную: $x=t-4$. Тогда получим:

$(t-1)^4+(t+1)^4=16$

$(t^2-2t+1)^2+(t^2+2t+1)^2=16$

$t^4+4t^2+1-4t^3-4t+2t^2+t^4+4t^2+1+4t^3+4t+2t^2=16$

$2t^4+12t^2-14=0$

$t^4+6t^2-7=0$

Следующая замена: $t^2=a$, $(a\geq 0)$.

$a^2+6a-7=0$

$a_1=-7$ – посторонний корень, $a_2=1$

$t^2=1$

$t_{1,2}=\pm 1$

Тогда: $x_1=1-4=-3$, $x_2=-1-4=-5$.

Ответ: $\{-5;-3\}$.



3.27. Решите уравнение: $(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)=1680$.

Решение:

$\underbrace{(x-4)(x-7)}_{\text{перемножим}}\underbrace{(x-5)(x-6)}_{\text{перемножим}}=1680$

$$(x^2-11x+28)(x^2-11x+30)=1680$$

Обозначим: $x^2-11x+28=a$.

$$a(a+2)=1680$$

$$a^2+2a-1680=0$$

$$a_1=-42,\ \ a_2=40$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2-11x+28=-42, \\ x^2-11x+28=40; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x^2-11x+70=0, \\ x^2-11x-12=0; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \text{решений нет}, \\ x_1=12,\ x_2=-1. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{-1;\ 12\}$.

3.28. Решите уравнение: $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)=-15$.

Решение:

В выражении $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)$ перемножим первую и последнюю скобки, вторую и третью скобки:

$$[(x+1)\cdot(x+7)]\cdot[(x+3)\cdot(x+5)]=-15$$

$$(x^2+8x+7)\cdot(x^2+8x+15)=-15$$

Сделаем замену $a=x^2+8x+7$:

$$a(a+8)=-15$$

$$a^2+8a+15=0$$

$$a_1=-5;\ \ a_2=-3.$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2+8x+7=-5, \\ x^2+8x+7=-3; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x^2+8x+12=0, \\ x^2+8x+10=0; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x_1=-6,\ x_2=-2, \\ x_{3,4}=-4\pm\sqrt{6}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{-6;\ -2;\ -4\pm\sqrt{6}\}$.

При решении дробно-рациональных уравнений следует учесть, что областью определения уравнения являются те значения переменной x, при которых знаменатели дробей не обращаются в нуль.

При решении дробно-рациональных уравнений целесообразно поступать следующим образом:

1) найти общий знаменатель дробей, входящих в уравнение, если каждая дробь имеет смысл;

2) заменить данное уравнение целым, умножив обе его части на общий знаменатель;

3) решить получившееся целое уравнение;

4) исключить из его корней те, которые обращают в нуль общий знаменатель.

3.29. Решите уравнение: $\dfrac{4x^2-7x-2}{x^2-5x+6}=0$.

Решение:

$$\begin{cases} 4x^2-7x-2=0, \\ x^2-5x+6\neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1=-\dfrac{1}{4},\ x_2=2, \\ x\neq 2,\ x\neq 3; \end{cases} \quad x=-\frac{1}{4}.$$

Ответ: $\left\{-\dfrac{1}{4}\right\}$.

3.30. Решите уравнение: $\dfrac{3(9x-3)}{9x-6}=2+\dfrac{3x+1}{3x-2}$.

Решение:

$$\frac{3(9x-3)}{9x-6}=2+\frac{3x+1}{3x-2} \qquad \text{ОДЗ: } x\neq\frac{2}{3}.$$

$$\frac{9x-3}{3x-2}=2+\frac{3x+1}{3x-2}$$

$$9x-3=6x-4+3x+1$$

$$9x-3=9x-3$$

$$0\cdot x=0$$

x – любое число, кроме $\dfrac{2}{3}$.

Ответ: $x\neq\dfrac{2}{3}$.

3.31. Решите уравнение: $\dfrac{(x^2+35)^2}{(x^2-49)^2}=\dfrac{144x^2}{(49-x^2)^2}$.

Решение:

$$\left(\frac{x^2+35}{x^2-49}\right)^2=\left(\frac{12x}{x^2-49}\right)^2 \qquad \text{ОДЗ: } x\neq\pm7.$$

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{x^2+35}{x^2-49}=\dfrac{12x}{x^2-49},\\ \dfrac{x^2+35}{x^2-49}=-\dfrac{12x}{x^2-49};\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\dfrac{x^2-12x+35}{x^2-49}=0,\\ \dfrac{x^2+12x+35}{x^2-49}=0;\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x^2-12x+35=0,\\ x^2+12x+35=0;\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x_1=5,\ x_2=7,\\ x_3=-5,\ x_4=-7.\end{array}\right.$$

С учетом ОДЗ получаем, что корни уравнения: $x=\pm5$.

Ответ: $x=\pm5$.

3.32. Решите уравнение: $\dfrac{3}{x}+\dfrac{33}{x^2-11x}=\dfrac{x-4}{x-11}$.

Решение:

$$\frac{3}{x}+\frac{33}{x^2-11x}=\frac{x-4}{x-11} \qquad \text{ОДЗ: } x\neq0,\quad x\neq11.$$

$$\frac{3}{x}+\frac{33}{x(x-11)}-\frac{x-4}{x-11}=0$$

$$3(x-11)+33-x(x-4)=0$$

$$7x-x^2=0$$

$x_1=0$ – не принадлежит ОДЗ,

$x_2=7$.

Ответ: $\{7\}$.

3.33. Решите уравнение: $\dfrac{x+1}{x+3}+\dfrac{10x}{x^2+x-6}=\dfrac{4}{x-2}$.

Решение:

$$\frac{x+1}{x+3}+\frac{10x}{(x+3)(x-2)}-\frac{4}{x-2}=0 \qquad \text{ОДЗ: } x\neq-3, \quad x\neq2.$$

$$(x+1)(x-2)+10x-4(x+3)=0$$

$$x^2+5x-14=0$$

$x_1=2$ – не принадлежит ОДЗ,

$x_2=-7$.

Ответ: $\{-7\}$.

3.34. Решите уравнение: $\frac{1}{4x+8}=\frac{20x+1}{4x^2-16}-\frac{7-5x}{x^2-4x+4}$.

Решение:

$$\frac{1}{4(x+2)}-\frac{20x+1}{4(x-2)(x+2)}+\frac{7-5x}{(x-2)^2}=0 \qquad \text{ОДЗ: } x\neq\pm2.$$

$$(x-2)^2-(20x+1)(x-2)+(7-5x)(4x+8)=0$$

$$39x^2-23x-62=0$$

Так как $b=a+c$ $(-23=39-62)$, то:

$x_1=-1$, $x_2=\frac{62}{39}$.

Ответ: $\left\{-1;\ \frac{62}{39}\right\}$.

Метод разложения на множители

3.35. Решите уравнение: $\frac{3-x}{x^2+2x-3}=\frac{9-3x}{3x^2-2x-5}$.

Решение:

$$\frac{3-x}{x^2+2x-3}-\frac{3(3-x)}{3x^2-2x-5}=0$$

$$(3-x)\left(\frac{1}{x^2+2x-3}-\frac{3}{3x^2-2x-5}\right)=0$$

$$(3-x)\cdot\frac{3x^2-2x-5-3x^2-6x+9}{(x^2+2x-3)(3x^2-2x-5)}=0$$

$$(3-x)\cdot\frac{-8x+4}{(x+3)(x-1)(3x-5)(x+1)}=0 \qquad \text{ОДЗ: } x\neq\pm1,\ x\neq-3,\ x\neq\frac{5}{3}.$$

$$\left[\begin{array}{l}3-x=0,\\ -8x+4=0;\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x=3,\\ x=\frac{1}{2}.\end{array}\right.$$

Оба полученных корня принадлежат ОДЗ.

Ответ: $\left\{\frac{1}{2};3\right\}$.

3.36. Решите уравнение $3\left(x+\frac{1}{x^2}\right)-7\left(1+\frac{1}{x}\right)=0$.

Решение:

$$3\left(x+\frac{1}{x^2}\right)-7\left(1+\frac{1}{x}\right)=0 \qquad \text{ОДЗ: } x\neq0.$$

$$3x\left(1+\frac{1}{x^3}\right)-7\left(1+\frac{1}{x}\right)=0$$

$$3x\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)-7\left(1+\frac{1}{x}\right)=0$$

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(3x-3+\frac{3}{x}-7\right)=0$$

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(3x+\frac{3}{x}-10\right)=0$$

$$\left[\begin{array}{l}1+\frac{1}{x}=0,\\ 3x+\frac{3}{x}-10=0;\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\frac{1}{x}=-1,\\ 3x^2-10x+3=0;\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x=-1,\\ x_1=\frac{1}{3},\ x_2=3.\end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{-1;\frac{1}{3};3\right\}$.

3.37. Решите уравнение: $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-2}=\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}$.

Решение:

$$\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-2}=\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}$$ ОДЗ: $x\neq 1$, $x\neq 2$, $x\neq 3$, $x\neq 4$.

Сложим попарно дроби: первую и четвертую, вторую и третью:

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-4}=\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}$$

$$\frac{x-4+x-1}{(x-1)(x-4)}=\frac{x-3+x-2}{(x-2)(x-3)}$$

$$\frac{2x-5}{(x-1)(x-4)}=\frac{2x-5}{(x-2)(x-3)}$$

$$(2x-5)\left(\frac{1}{(x-1)(x-4)}-\frac{1}{(x-2)(x-3)}\right)=0$$

$$(2x-5)\cdot\frac{x^2-5x+6-x^2+5x-4}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}=0$$

$$(2x-5)\cdot\frac{2}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}=0$$

$2x-5=0$

$x=2{,}5$.

Ответ: $\{2{,}5\}$.

3.38. Решите уравнение: $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}+\frac{3}{x-3}=\frac{6}{x+6}$.

Решение:

$$\frac{2}{x-2}+\frac{3}{x-3}=\frac{6}{x+6}-\frac{1}{x-1}$$ ОДЗ: $x\neq -6$; $x\neq 1$; $x\neq 2$; $x\neq 3$.

$$\frac{5x-12}{x^2-5x+6}=\frac{5x-12}{x^2+5x-6}$$

$$(5x-12)\left(\frac{1}{x^2-5x+6}-\frac{1}{x^2+5x-6}\right)=0$$

$$(5x-12)\cdot\frac{x^2+5x-6-x^2+5x-6}{\left(x^2-5x+6\right)\left(x^2+5x-6\right)}=0$$

$$(5x-12)\cdot\frac{10x-12}{\left(x^2-5x+6\right)\left(x^2+5x-6\right)}=0$$

$$(5x-12)\cdot(10x-12)=0$$

$x_1=2{,}4;\quad x_2=1{,}2.$

Оба полученных корня принадлежат ОДЗ.

Ответ: $\{1{,}2;\ 2{,}4\}$.

Метод введения новой переменной

Рассмотрим уравнения, содержащие взаимно обратные выражения.

3.39. Решите уравнение: $\dfrac{x^2+2}{3x-2}-\dfrac{3x-2}{x^2+2}=\dfrac{8}{3}$.

Решение:

$$\frac{x^2+2}{3x-2}-\frac{3x-2}{x^2+2}=\frac{8}{3}\qquad\text{ОДЗ: } x\neq\frac{2}{3}.$$

Введем новую переменную: $a=\dfrac{x^2+2}{3x-2}$. Тогда: $\dfrac{3x-2}{x^2+2}=\dfrac{1}{a}$.

В результате получим уравнение:

$$a-\frac{1}{a}=\frac{8}{3}$$

$$3a^2-8a-3=0$$

$$a_1=3,\quad a_2=-\frac{1}{3}$$

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{x^2+2}{3x-2}=3,\\[2mm] \dfrac{x^2+2}{3x-2}=-\dfrac{1}{3};\end{array}\right.\qquad \left[\begin{array}{l}x^2-9x+8=0,\\ 3x^2+3x+4=0;\end{array}\right.\qquad \left[\begin{array}{l}x_1=1,\ x_2=8,\\ \text{решений нет.}\end{array}\right.$$

Оба полученных корня принадлежат ОДЗ.

Ответ: $\{1;8\}$.

3.40. Решите уравнение: $\frac{x^2+2x+3}{x}-\frac{6x}{x^2+2x+3}=5$.

Решение:

$\frac{x^2+2x+3}{x}-\frac{6x}{x^2+2x+3}=5$ ОДЗ: $x\neq 0$.

Введем новую переменную: $a=\frac{x^2+2x+3}{x}$.

В результате получим уравнение:

$a-\frac{6}{a}=5$

$a^2-5a-6=0$

$a_1=-1,\quad a_2=6$

$\left[\begin{array}{l}\frac{x^2+2x+3}{x}=-1,\\ \frac{x^2+2x+3}{x}=6;\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}x^2+3x+3=0,\\ x^2-4x+3=0;\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}\text{решений нет},\\ x_1=1,\ x_2=3.\end{array}\right.$

Оба полученных корня принадлежат ОДЗ.

Ответ: $\{1;3\}$.

3.41. Решите уравнение: $\frac{1}{x(x+6)}-\frac{1}{(x+3)^2}=-\frac{9}{20}$.

Решение:

$\frac{1}{x(x+6)}-\frac{1}{(x+3)^2}=-\frac{9}{20}$ ОДЗ: $x\neq 0,\ x\neq -6,\ x\neq -3$.

$\frac{1}{x^2+6x}-\frac{1}{x^2+6x+9}+\frac{9}{20}=0$

Замена: $a=x^2+6x$.

$\frac{1}{a}-\frac{1}{a+9}+\frac{9}{20}=0$

$20a+180-20a+9a^2+81a=0$

$a^2+9a+20=0$

$a_1 = -4$, $a_2 = -5$

$$\left[\begin{array}{l} x^2+6x=-4, \\ x^2+6x=-5; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x^2+6x+4=0, \\ x^2+6x+5=0; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x_{1,2}=-3\pm\sqrt{5}, \\ x_3=-1,\ x_4=-5. \end{array}\right.$$

Все четыре корня принадлежат ОДЗ.

Ответ: $\{-5; -1; -3\pm\sqrt{5}\}$.

3.42. Решите уравнение: $\dfrac{3}{x^2-4x+1}-x^2=3-4x$.

Решение:

$$\frac{3}{x^2-4x+1}-\left(x^2-4x\right)-3=0 \qquad \text{ОДЗ: } x\neq 2\pm\sqrt{3}.$$

Замена: $a=x^2-4x$.

$$\frac{3}{a+1}-a-3=0$$

$$3-a^2-a-3a-3=0$$

$$a^2+4a=0$$

$a_1=0$, $a_2=-4$

$$\left[\begin{array}{l} x^2-4x=0, \\ x^2-4x=-4; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x_1=0,\ x_2=4, \\ x_3=2. \end{array}\right.$$

Все три корня принадлежат ОДЗ.

Ответ: $\{0; 2; 4\}$.

3.43. Решите уравнение: $\dfrac{13x}{2x^2+x+3}+\dfrac{2x}{2x^2-5x+3}=6$.

Решение:

$$\frac{13x}{2x^2+x+3}+\frac{2x}{2x^2-5x+3}=6 \qquad \text{ОДЗ: } x\neq 1,\ x\neq\frac{3}{2}$$

Очевидно, что значение $x=0$ не является корнем данного уравнения, поэтому можно разделить числитель и знаменатель каждой дроби на выражение $x\neq 0$:

$$\frac{13x\cdot\frac{1}{x}}{\left(2x^2+x+3\right)\cdot\frac{1}{x}}+\frac{2x\cdot\frac{1}{x}}{\left(2x^2-5x+3\right)\cdot\frac{1}{x}}=6$$

$$\frac{13}{2x+1+\frac{3}{x}}+\frac{2}{2x-5+\frac{3}{x}}=6$$

Обозначим: $2x+\frac{3}{x}=t$.

Получим: $\frac{13}{t+1}+\frac{2}{t-5}=6$.

$$13(t-5)+2(t+1)=6(t+1)(t-5)$$

$$6t^2-39t+33=0$$

$$2t^2-13t+11=0$$

$$t_1=1,\quad t_2=\frac{11}{2}$$

Следовательно:

$$\left[\begin{array}{l}2x+\frac{3}{x}=1,\\ 2x+\frac{3}{x}=\frac{11}{2};\end{array}\right.\qquad \left[\begin{array}{l}2x^2-x+3=0,\\ 4x^2-11x+6=0;\end{array}\right.\qquad \left[\begin{array}{l}\text{решений нет},\\ x_1=2,\ x_2=\frac{3}{4}.\end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{\frac{3}{4};2\right\}$.

3.44. Решите уравнение: $\frac{15x}{x^2+2x+2}-\frac{8x}{x^2+x+2}=1$.

Решение:

$$\frac{15x}{x^2+2x+2}-\frac{8x}{x^2+x+2}=1$$

Разделим числитель и знаменатель каждой дроби на выражение $x\neq 0$:

$$\frac{15}{x+\frac{2}{x}+2}-\frac{8}{x+\frac{2}{x}+1}=1$$

Замена: $a=x+\frac{2}{x}+1$.

$$\frac{15}{a+1}-\frac{8}{a}=1$$

$$7a-8=a^2+a$$

$$a^2-6a+8=0$$

$a_1=2$; $a_2=4$.

$$\left[\begin{array}{l} x+\frac{2}{x}+1=2, \\ x+\frac{2}{x}+1=4; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x^2-x+2=0, \\ x^2-3x+2=0; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \text{решений нет,} \\ x_1=1,\ x_2=2. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{1;2\}$.

3.45. Решите уравнение: $\frac{x^3+2x}{\left(x^2-x+2\right)^2}=\frac{3}{4}$.

Решение:

$$\frac{x^3+2x}{\left(x^2-x+2\right)^2}=\frac{3}{4}$$

Разделим числитель и знаменатель дроби на выражение $x^2\neq0$:

$$\frac{x+\frac{2}{x}}{\left(x-1+\frac{2}{x}\right)^2}=\frac{3}{4}$$

Замена: $a=x+\frac{2}{x}$.

$$\frac{a}{(a-1)^2}=\frac{3}{4}$$

$$4a=3\left(a^2-2a+1\right)$$

$$3a^2-10a+3=0$$

$a_1=\frac{1}{3}$; $a_2=3$.

$$\left[\begin{array}{l} x+\dfrac{2}{x}=\dfrac{1}{3}, \\ x+\dfrac{2}{x}=3; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \dfrac{x^2+2}{x}=\dfrac{1}{3}, \\ \dfrac{x^2+2}{x}=3; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 3x^2-x+6=0, \\ x^2-3x+2=0; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \text{решений нет}, \\ x_1=1,\ x_2=2. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{1;2\}$.

Свойства корней квадратного уравнения



В частном случае, если $a=1$ (приведенная форма $x^2+px+q=0$):

$$x_1+x_2=-p \quad \text{и} \quad x_1\cdot x_2=q.$$

Корни квадратного уравнения зависят от **знака дискриминанта** (D):

– если $D=b^2-4ac>0$, то уравнение имеет два различных корня;

– если $D=0$, то уравнение имеет равные корни, то есть $x_1=x_2$ (в этом случае говорят, что уравнение имеет кратный корень кратности два);

– если $D<0$, то уравнение не имеет действительных корней.

3.46. Составьте квадратное уравнение $x^2+px+q=0$, корнями которого являются числа $x_{1,2}=\sqrt{2}\pm 1$.

Решение:

По теореме Виета:

$p=-(x_1+x_2)=-(\sqrt{2}+1+\sqrt{2}-1)=-2\sqrt{2}$;

$q=x_1\cdot x_2=(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)=1$.

Тогда $x^2-2\sqrt{2}x+1=0$.

Ответ: $x^2-2\sqrt{2}x+1=0$.

3.47. Приведенное квадратное уравнение, корни которого на 2 больше корней уравнения $x^2-5x+1=0$ имеет вид $x^2-bx+c=0$. Найдите значение величины b.

Решение:

Пусть x_1, x_2 – корни уравнения $x^2-5x+1=0$, тогда $x_1+x_2=5$ по теореме Виета.

Если (x_1+2) и (x_2+2) – корни уравнения $x^2-bx+c=0$, то:

$b=(x_1+2)+(x_2+2)=(x_1+x_2)+4=5+4=9$.

Ответ: $b=9$.

3.48. Для уравнения $x^2-6x+2=0$ с корнями x_1 и x_2 вычислите выражение $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$.

Решение:

Для уравнения $x^2-6x+2=0$:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-p=6 \\ x_1\cdot x_2=q=2 \end{cases}$$

Тогда $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_2+x_1}{x_1\cdot x_2}=\frac{-p}{q}=\frac{6}{2}=3$.

Ответ: 3.

3.49. Вычислите $\sqrt{x_1^2+x_2^2}$, если x_1 и x_2 – корни уравнения $12x^2+7x-5=0$.

Решение:

$12x^2+7x-5=0 \quad |:12$

$x^2+\frac{7}{12}x-\frac{5}{12}=0$

По теореме Виета:

$x_1+x_2=-p=-\frac{7}{12}$; $\qquad x_1\cdot x_2=q=-\frac{5}{12}$.

Преобразуем $\sqrt{x_1^2+x_2^2}$:

$$\sqrt{x_1^2+x_2^2}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+2x_1\cdot x_2-2x_1\cdot x_2}=\sqrt{\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1\cdot x_2}=$$

$$=\sqrt{(-p)^2-2q}=\sqrt{\left(-\frac{7}{12}\right)^2-2\cdot\left(-\frac{5}{12}\right)}=\sqrt{\frac{49+120}{144}}=\sqrt{\frac{169}{144}}=\frac{13}{12}.$$

Ответ: $\frac{13}{12}$.

3.50. Вычислите $x_1^3+x_2^3$, если x_1 и x_2 – корни уравнения $5x^2+2x-13=0$.

Решение:

$5x^2+2x-13=0 \quad |:5$

$x^2+\frac{2}{5}x-\frac{13}{5}=0$

$x_1+x_2=-p=-\frac{2}{5}; \qquad x_1\cdot x_2=q=-\frac{13}{5}$

Тогда $x_1^3+x_2^3=\left(x_1+x_2\right)\left(x_1^2-x_1\cdot x_2+x_2^2\right)=\left(x_1+x_2\right)\times$

$\times\left(x_1^2+2x_1\cdot x_2+x_2^2-3x_1\cdot x_2\right)=\left(x_1+x_2\right)\left(\left(x_1+x_2\right)^2-3x_1\cdot x_2\right)=$

$$=-p\left((-p)^2-3q\right)=-\frac{2}{5}\left(\frac{4}{25}-3\left(-\frac{13}{5}\right)\right)=-\frac{2}{5}\cdot\frac{199}{25}=-\frac{398}{125}.$$

Ответ: $-\frac{398}{125}$.

3.51. Не решая уравнения $x^2-11x+20=0$, найдите неполный квадрат суммы его корней.

Решение:

Дискриминант уравнения $D=121-4\cdot 20=41>0$, следовательно, квадратное уравнение имеет два различных иррациональных корня – x_1 и x_2, для которых выполнены соотношения:

$x_1+x_2=11; \quad x_1\cdot x_2=20.$

Неполный квадрат суммы корней уравнения:

$x_1^2+x_1\cdot x_2+x_2^2=x_1^2+2x_1\cdot x_2+x_2^2-x_1\cdot x_2=\left(x_1+x_2\right)^2-x_1\cdot x_2=$

$=11^2-20=101$.

Ответ: 101.

3.52. Найдите все значения параметра a, при которых один из корней уравнения $x^2+ax-4a+16=0$ на 4 больше другого.

Решение:

Пусть x_1 – один из корней уравнения $x^2+ax-4a+16=0$, тогда второй корень – $\left(x_1+4\right)$.

По теореме Виета:

$$\begin{cases} x_1+x_1+4=-a, \\ x_1\left(x_1+4\right)=-4a+16; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1=-\frac{a}{2}-2, \\ x_1^2+4x_1+4a-16=0; \end{cases}$$

$$\left(\frac{a}{2}+2\right)^2-4\left(\frac{a}{2}+2\right)+4a-16=0$$

$$\frac{a^2}{4}+4a-20=0$$

$$a^2+16a-80=0$$

$$a_1=-20; \quad a_2=4.$$

Ответ: $\left\{-20; 4\right\}$.

3.53. При каком значении параметра a корни уравнения $x^2-3x+a=0$ удовлетворяют условию $x_1^2+x_2^2=5$.

Решение:

По теореме Виета: $\begin{cases} x_1+x_2=3 \\ x_1\cdot x_2=a \end{cases}$

Преобразуем $x_1^2+x_2^2$:

$$x_1^2+x_2^2=x_1^2+x_2^2+2x_1\cdot x_2-2x_1\cdot x_2=\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1\cdot x_2=9-2a$$

$9-2a=5$

$a=2$.

Ответ: $a=2$.

3.54. При каких значениях параметра a корни уравнения $ax^2-2x-3a=0$ связаны соотношением $x_1+2x_2=1$?

Решение:

По условию уравнение имеет два корня, следовательно, уравнение квадратное и коэффициент при x^2 не равен нулю. Тогда уравнение можно разделить на a.

$$ax^2-2x-3a=0 \quad \Big| : a\neq 0$$

$$x^2-\frac{2}{a}x-3=0$$

По теореме Виета:

$$x_1+x_2=\frac{2}{a}; \quad x_1\cdot x_2=-3.$$

Решим систему:

$$\begin{cases} x_1+2x_2=1 \\ x_1\cdot x_2=-3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1=1-2x_2 \\ (1-2x_2)\cdot x_2=-3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1=1-2x_2 \\ 2x_2^2-x_2-3=0 \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} x_1=3; \quad x_2=-1 \\ x_1=-2; \quad x_2=1,5 \end{array}\right.$$

1 случай.

$x_1=3; \quad x_2=-1$

$$x_1+x_2=2; \qquad \frac{2}{a}=2; \qquad a=1.$$

2 случай.

$x_1=-2; \quad x_2=1,5$

$$x_1+x_2=-0,5; \qquad \frac{2}{a}=-0,5; \qquad a=-4.$$

Ответ: $\{-4;1\}$.

3.55. При каком значении параметра p уравнение $(p-2)x^2-2(p-2)x+3=0$ имеет единственное решение?

***Решенце*:**

Определим контрольное значение параметра p.

Для уравнения $(p-2)x^2-2(p-2)x+3=0$ это значение, при котором коэффициент при x^2 обращается в нуль.

Такое значение $p=2$.

1 случай. Если $p=2$, уравнение примет вид $0\cdot x^2+0\cdot x+3=0$.
Данное уравнение корней не имеет.

2 случай. Если $p\neq 2$.

Квадратное уравнение $(p-2)x^2-2(p-2)x+3=0$ будет иметь единственное решение, при условии равенства нулю его дискриминанта.

$D=(p-2)^2-3(p-2)=(p-2)(p-5)$.

$(p-2)(p-5)=0$

$p=5$.

Ответ: $p=5$.

3.56. При каких значениях параметра k уравнение $kx^2-6x+k=0$ имеет два различных корня?

***Решение*:**

Квадратное уравнение $kx^2-6x+k=0$ будет иметь два различных корня, если одновременно выполняются два условия:

1) коэффициент при x^2 отличен от нуля: $k\neq 0$.

2) дискриминант уравнения положительный: $D>0$.

$\begin{cases} k\neq 0, \\ 9-k^2>0; \end{cases}$ $\begin{cases} k\neq 0, \\ (k+3)(k-3)<0; \end{cases}$ $\begin{cases} k\neq 0, \\ k\in(-3;3). \end{cases}$

$k\in(-3;0)\cup(0;3)$.

Ответ: $k\in(-3;0)\cup(0;3)$.

3.57. Найдите все значения параметра p, при которых уравнение $(p-4)x^2+px+6=0$ имеет единственный корень.

Решение:

Контрольное значение параметра p – значение, при котором коэффициент при x^2 обращается в нуль, то есть $p=4$.

1 случай. Если $p=4$, уравнение примет вид:

$4x+6=0$

$x=-1,5$ – единственный корень.

2 случай. Если $p\neq 4$, квадратное уравнение $(p-4)x^2+px+6=0$ будет иметь единственный корень при условии равенства нулю дискриминанта уравнения.

$D=p^2-4\cdot 6\cdot(p-4)=p^2-24p+96$

$p^2-24p+96=0$

$p_{1,2}=12\pm 4\sqrt{3}$

Окончательно: $p=4$ или $p=12\pm 4\sqrt{3}$.

Ответ: $\left\{4;\ 12\pm 4\sqrt{3}\right\}$.

3.58. Найдите все значения параметра p, при которых уравнение $(p^2-2p)x^2+8x+4+\frac{4}{p}=0$ имеет единственный корень.

Решение:

Определим контрольные значения параметра p:

$p^2-2p=0$

$p_1=0$; $p_2=2$

1 случай. $p=0$

При $p=0$ выражение $\frac{4}{p}$ не имеет смысла, следовательно. уравнение решений не имеет.

2 случай. $p=2$

Уравнение примет вид: $8x+6=0$.

$x=-\frac{3}{4}$ – единственный корень.

3 случай. Если $p\neq 0$ и $p\neq 2$, квадратное уравнение $\left(p^2-2p\right)x^2+8x+4+\frac{4}{p}=0$ имеет единственный корень в случае равенства нулю его дискриминанта.

$$D=16-\left(p^2-2p\right)\left(4+\frac{4}{p}\right)=16-(p-2)(4p+4)=-4p^2+4p+24$$

$$-4p^2+4p+24=0$$

$$p^2-p-6=0$$

$$p_1=-2;\quad p_2=3$$

Окончательно: $p=-2$, или $p=2$, или $p=3$.

Ответ: $\{\pm 2; 3\}$.

3.59. При каких значениях параметра n корни уравнения $\left(n^2+3n+4\right)x^2-(n-9)x+2=0$ будут равными?

Решение:

Условие «Корни уравнения будут равными» означает, что одновременно должны быть выполнены два условия:

1) коэффициент при x^2 отличен от нуля: $n^2+3n+4\neq 0$;

2) $x_1=x_2$, то есть дискриминант уравнения равен нулю.

$$\begin{cases}\underbrace{n^2+3n+4}_{D<0}\neq 0,\\ (n-9)^2-4\cdot 2\cdot\left(n^2+3n+4\right)=0.\end{cases}$$

$$-7n^2-42n+49=0$$

$$n^2+6n-7=0$$

$$n_1=-7;\quad n_2=1.$$

Ответ: $\{-7; 1\}$.

3.60. При каких значениях параметра c уравнение $(c-2)x^2+2(c-2)x+2=0$ не имеет действительных корней?

***Решение*:**

Контрольное значение: $c=2$.

1 случай. Если $c=2$, уравнение принимает вид $0\cdot x^2+0\cdot x+2=0$. Данное уравнение действительных корней не имеет.

2 случай. Если $c\neq 2$, исходное уравнение является квадратным. В этом случае уравнение не имеет действительных корней, если его дискриминант отрицательный.

$D=(c-2)^2-2(c-2)=(c-2)(c-4)$

$(c-2)(c-4)<0$

$c\in(2;4)$

Окончательно: $c\in[2;4)$.

Ответ: $c\in[2;4)$.

3.61. Найдите значения параметра b, при которых графики функций $y=\frac{12}{x}$ и $y=b-x$ имеют единственную общую точку.

***Решение*:**

Графики функций $y=\frac{12}{x}$ и $y=b-x$ имеют одну общую точку в случае, если уравнение $\frac{12}{x}=b-x$ имеет единственное решение.

$\frac{12}{x}=b-x$

$x^2-bx+12=0$

Дискриминант уравнения должен быть равен нулю.

$D=b^2-48=0$

$b^2=48$

$b_{1,2}=\pm 4\sqrt{3}$.

Ответ: $b=\pm 4\sqrt{3}$.

3.62. Найдите все значения параметра a, при которых графики функций $y = x^2 + 3x + 2a$ и $y = x + 1$ не имеют общих точек.

Решение:

Графики функций $y = x^2 + 3x + 2a$ и $y = x + 1$ не имеют общих точек, если уравнение $x^2 + 3x + 2a = x + 1$ не имеет решений.

$x^2 + 3x + 2a = x + 1$

$x^2 + 2x + 2a - 1 = 0$

Дискриминант полученного уравнения должен быть отрицательным.

$D = 1 - (2a - 1) = 2 - 2a$

$2 - 2a < 0$

$a > 1$.

Ответ: $a \in (1; \infty)$.

3.63. Найдите значения параметра a, при которых график функции $y = (2a - 5)x^2 - (10 - 4a)x + 3$ не пересекает ось абсцисс.

Решение:

Контрольное значение:

$2a - 5 = 0$; $a = 2{,}5$.

1 случай. Если $a = 2{,}5$, функция примет вид:

$y = 0 \cdot x^2 - 0 \cdot x + 3$

$y = 3$

Горизонтальная прямая $y = 3$ не пересекает ось абсцисс.

2 случай. Если $a \neq 2{,}5$, парабола $y = (2a - 5)x^2 - (10 - 4a)x + 3$ не будет пересекать ось абсцисс в том случае, если не будет иметь решений уравнение:

$$(2a - 5)x^2 - (10 - 4a)x + 3 = 0.$$

Тогда дискриминант уравнения должен быть отрицательный.

$D = (5 - 2a)^2 - 3(2a - 5) = 4a^2 - 26a + 40$

$4a^2 - 26a + 40 < 0$

$(2a-5)(a-4)<0$

$a\in(2,5;4)$

Окончательно получаем: $a\in[2,5;4)$.

Ответ: $a\in[2,5;4)$.

3.64. Определите значения параметра a, при которых график функции $y=3x^2+2x+(a-1)^2$ пересекает ось абсцисс.

Решение:

Если график $y=3x^2+2x+(a-1)^2$ пересекает ось абсцисс, значит, уравнение $3x^2+2x+(a-1)^2=0$ имеет два различных корня.

Тогда дискриминант уравнения положительный.

$D=1-3(a-1)^2=-3a^2+6a-2$

$-3a^2+6a-2>0$

$3a^2-6a+2<0$

$a\in\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3};\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right).$

Ответ: $a\in\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3};\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right).$

3.65. При каких значениях параметра a неравенство $(a-3)x^2+2ax+2(a-4)<0$ будет справедливым для всех значений x?

Решение:

Рассмотрим функцию $y(x)=(a-3)x^2+2ax+2(a-4)$.

Графиком функции является парабола.

По условию график функции должен быть целиком расположен ниже оси абсцисс. Тогда одновременно должны выполняться следующие два условия:

1) ветви параболы направлены вниз;
2) функция не имеет нулей.

Первое условие означает, что коэффициент при x^2 – отрицательный: $a-3<0$.

Второе условие означает, что соответствующее квадратное уравнение $(a-3)x^2+2ax+2(a-4)=0$ решений не имеет и дискриминант уравнения отрицательный.

То есть: $D=a^2-2(a-4)(a-3)=-a^2+14a-24$

$$-a^2+14a-24<0$$

Полученные соотношения объединим в систему:

$$\begin{cases} a-3<0, \\ -a^2+14a-24<0; \end{cases} \quad \begin{cases} a<3, \\ a^2-14a+24>0; \end{cases} \quad \begin{cases} a<3, \\ a\in(-\infty;2)\cup(12;\infty). \end{cases}$$

$a\in(-\infty;2)$.

Ответ: $a<2$.

§4. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Методы решения систем алгебраических уравнений достаточно похожи на методы решения отдельных уравнений.

При решении систем уравнений можно использовать элементарные преобразования, сохраняющие равносильность систем:

- перестановку местами уравнений;
- умножение обеих частей уравнения на любое число, отличное от нуля;
- прибавление к одному уравнению другого уравнения, умноженного на любое число.

Можно выделить четыре основных метода, используемых при решении систем:

- метод подстановки;
- метод алгебраических действий;
- метод разложения на множители;
- метод введения новых переменных.

Рассмотрим каждый из этих четырех методов в отдельности.

[illegible]

Этот метод применим тогда, когда из какого-либо уравнения системы можно выразить одну переменную через другую и решить получившееся уравнение с одной переменной. Этим требованиям удовлетворяет любая система, состоящая из уравнения первой степени и уравнения второй степени.

Таким образом, при решении системы двух уравнений с двумя переменными способом подстановки:

1) выражают из какого-либо уравнения системы одну переменную через другую;

2) подставляют вместо этой переменной полученное выражение во второе уравнение;

3) решают получившееся уравнение с одной переменной;

4) находят соответствующие значения второй переменной.

4.1. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^2+xy-y^2=11, \\ x-2y-1=0. \end{cases}$

Решение:

$$\begin{cases} x^2 + xy - y^2 = 11, \\ x = 2y + 1. \end{cases}$$

Так как $x = 2y+1$, подставим в первое уравнение системы вместо переменной x выражение $(2y+1)$:

$$(2y+1)^2 + (2y+1)\cdot y - y^2 = 11$$

$$4y^2 + 4y + 1 + 2y^2 + y - y^2 - 11 = 0$$

$$5y^2 + 5y - 10 = 0$$

$$y^2 + y - 2 = 0$$

$$y_1 = -2, \quad y_2 = 1$$

Тогда из равенства $x = 2y+1$ находим: $x_1 = -3$, $x_2 = 3$.

Ответ: $(-3;-2)$, $(3;1)$.

4.2. Решите систему уравнений: $\begin{cases} \dfrac{1}{y-1} - \dfrac{1}{y+1} = \dfrac{1}{x}, \\ y^2 - x - 5 = 0. \end{cases}$

Решение:

ОДЗ: $y \neq \pm 1$, $x \neq 0$.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{y-1} - \dfrac{1}{y+1} = \dfrac{1}{x}, \\ y^2 - x - 5 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{y-1} - \dfrac{1}{y+1} = \dfrac{1}{x}, \\ x = y^2 - 5. \end{cases}$$

Из первого уравнения данной системы находим переменную y:

$$\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1} = \frac{1}{y^2-5}$$

$$\frac{2}{y^2-1} = \frac{1}{y^2-5}$$

$$2y^2 - 10 = y^2 - 1$$

$$y^2 = 9$$

$$y_{1,2} = \pm 3$$

Из соотношения $x = y^2 - 5$ получаем, что $x_{1,2} = 4$.

Ответ: $(4;-3)$, $(4;3)$.

4.3. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x - y = 1, \\ x^3 - y^3 = 7. \end{cases}$

Решение:

$$\begin{cases} x - y = 1, \\ (x-y)\left(x^2 + xy + y^2\right) = 7; \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 1, \\ x^2 + xy + y^2 = 7; \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 1, \\ (x-y)^2 + 3xy = 7; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 1, \\ 1 + 3xy = 7; \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 1, \\ xy = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 + y, \\ y(1+y) = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 + y, \\ y^2 + y - 2 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 + y, \\ \left[\begin{array}{l} y = -2, \\ y = 1; \end{array}\right. \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -1, \\ y = -2; \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2, \\ y = 1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(-1;-2)$, $(2;1)$.

4.4. Решите систему уравнений: $\begin{cases} \dfrac{x - y - 2}{x - 3} = 0, \\ 2x^2 + y^2 - 2xy = 13. \end{cases}$

Решение:

$$\begin{cases} x \neq 3, \\ x - y - 2 = 0, \\ 2x^2 + y^2 - 2xy = 13; \end{cases} \quad \begin{cases} x \neq 3, \\ x = y + 2, \\ 2(y+2)^2 + y^2 - 2(y+2)y = 13; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \neq 3, \\ x = y + 2, \\ y^2 + 4y - 5 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \neq 3, \\ x = y + 2, \\ \left[\begin{array}{l} y = -5, \\ y = 1; \end{array}\right. \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \neq 3, \\ x = -3, \\ y = -5; \end{cases} \\ \begin{cases} x \neq 3, \\ x = 3, \\ y = 1; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -3, \\ y = -5; \end{cases} \\ x \in \varnothing. \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} x = -3, \\ y = -5. \end{cases}$$

Ответ: $(-3;-5)$.

4.5. Решите систему уравнений: $\begin{cases} \dfrac{1+x+x^2}{1+y+y^2}=3, \\ x+y=6. \end{cases}$

Решение:

$$\begin{cases} 1+x+x^2=3+3y+3y^2, \\ x=6-y; \end{cases} \qquad \begin{cases} 1+(6-y)+(6-y)^2=3+3y+3y^2, \\ x=6-y; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y^2+16y-40=0, \\ x=6-y; \end{cases} \qquad \begin{cases} y^2+8y-20=0, \\ x=6-y; \end{cases} \qquad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=2, \\ y=-10; \end{array}\right. \\ x=6-y; \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=2, \\ x=4; \end{cases} \\ \begin{cases} y=-10, \\ x=16. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(4;2)$, $(16;-10)$.

[illegible]

Метод сложения уравнений применяется тогда, когда при сложении правых и левых частей уравнений системы, можно получить уравнение с одной переменной, которое поддается решению (уравнения можно предварительно умножить на некоторые числа).

4.6. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^2-2y^2+x=-6, \\ x^2-3y^2=-11. \end{cases}$

Решение:

$$\begin{cases} x^2-2y^2+x=-6, \\ x^2-3y^2=-11; \end{cases} \left| \begin{array}{l} \cdot 3 \\ \cdot(-2) \end{array} \right. \qquad +\begin{cases} 3x^2-6y^2+3x=-18, \\ -2x^2+6y^2=22; \end{cases}$$

$$x^2+3x=4$$

$$x_1=-4, \quad x_2=1$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-4, \\ 16-3y^2=-11; \end{cases} \\ \begin{cases} x=1, \\ 1-3y^2=-11; \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-4, \\ y=\pm 3; \end{cases} \\ \begin{cases} x=1, \\ y=\pm 2. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(-4;-3)$, $(-4;3)$, $(1;-2)$, $(1;2)$.

Таким образом, для решения системы двух уравнений с двумя неизвестными способом сложения необходимо:

1) умножить левые и правые части уравнений на некоторые числа;
2) сложить соответственно левые и правые части уравнений;
3) решить получившееся после сложения уравнение с одной переменной;
4) найти соответствующие значения второй переменной.

4.7. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=18, \\ x^2-y^2+x-y=6. \end{cases}$

Решение:

Складывая и вычитая уравнения данной системы, получим:

$$\begin{cases} x^2+x-12=0, \\ y^2+y-6=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-4, \\ x=3; \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} y=-3, \\ y=2. \end{array}\right. \end{cases}$$

Ответ: $(-4;-3)$, $(-4;2)$, $(3;-3)$, $(3;2)$.

4.8. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^2+xy+y^2=13, \\ x+y=4. \end{cases}$

Решение:

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=13, \\ x+y=4; \end{cases} \quad \Big|(\ )^2 \qquad -\begin{cases} x^2+xy+y^2=13, \\ x^2+2xy+y^2=16; \end{cases}$$
$$\overline{\qquad xy=3 \qquad}$$

$$\begin{cases} x+y=4, \\ xy=3. \end{cases}$$

По теореме, обратной теореме Виета, находим два решения полученной системы: $(1;3)$, $(3;1)$.

Ответ: $(1;3)$, $(3;1)$.

4.9. Решите систему уравнений: $\begin{cases} xy(x+y)=30, \\ x^3+y^3=35. \end{cases}$

Решение:

Умножим первое уравнение на 3 и сложим со вторым.

$$+\begin{cases}3xy(x+y)=90,\\ x^3+y^3=35;\end{cases}\quad \begin{cases}3xy(x+y)=90,\\ x^3+3xy(x+y)+y^3=125;\end{cases}\quad \begin{cases}xy(x+y)=30,\\ (x+y)^3=125;\end{cases}$$

$$\begin{cases}xy(x+y)=30,\\ x+y=5;\end{cases}\quad \begin{cases}xy=6,\\ x+y=5.\end{cases}$$

Последняя система имеет два решения: $(2;3)$, $(3;2)$.

Ответ: $(2;3)$, $(3;2)$.

4.10. Решите систему уравнений: $\begin{cases}x+y=5,\\ x^3+y^3=35.\end{cases}$

Решение:

$$\begin{cases}x+y=5,\\ x^3+y^3=35;\end{cases}\ \Big|(\ )^3 \qquad -\begin{cases}x^3+3xy(x+y)+y^3=125,\\ x^3+y^3=35;\end{cases}$$

$$3xy(x+y)=90$$

$$xy(x+y)=30$$

Получаем равносильную систему:

$$\begin{cases}x+y=5,\\ xy(x+y)=30;\end{cases}\quad \text{или}\quad \begin{cases}x+y=5,\\ xy=6.\end{cases}$$

Ее решения: $(2;\ 3)$, $(3;\ 2)$.

Ответ: $(2;3)$, $(3;2)$.

4.11. Решите систему уравнений: $\begin{cases}(x+y)^3\cdot(x-y)^2=27,\\ (x-y)^3\cdot(x+y)^2=9.\end{cases}$

Решение:

Эту систему можно упростить, если разделить первое уравнение на второе:

$$\begin{cases}\dfrac{x+y}{x-y}=3,\\ (x+y)^3\cdot(x-y)^2=27;\end{cases}\quad \begin{cases}x=2y,\\ (3y)^3\cdot y^2=27;\end{cases}\quad \begin{cases}x=2,\\ y=1.\end{cases}$$

Ответ: $(2;1)$.

4.12. Решите систему уравнений: $\begin{cases} xy - x = 2, \\ xy^3 - xy^2 = 8. \end{cases}$

Решение:

$$\begin{cases} x(y-1) = 2, \\ xy^2(y-1) = 8. \end{cases}$$

Разделим второе уравнение на первое:

$$\begin{cases} y^2 = 4, \\ xy - x = 2. \end{cases}$$

Полученная система равносильна совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 2, \\ xy - x = 2; \end{cases} \\ \begin{cases} y = -2, \\ xy - x = 2; \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 2, \\ x = 2; \end{cases} \\ \begin{cases} y = -2, \\ x = -\dfrac{2}{3}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(-\frac{2}{3}; -2\right)$, $(2; 2)$.

4.13. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^2y^3 + x^3y^2 = 12, \\ x^2y^3 - x^3y^2 = 4. \end{cases}$

Решение:

$$\begin{cases} x^2y^2(y+x) = 12, \\ x^2y^2(y-x) = 4. \end{cases}$$

Первое уравнение системы разделим на второе и получим:

$$\begin{cases} \dfrac{y+x}{y-x} = 3, \\ x^2y^2(y+x) = 12; \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 2x, \\ x^2 \cdot 4x^2 \cdot 3x = 12; \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 2, \\ x = 1. \end{cases}$$

Ответ: $(1; 2)$.

4.14. Решите систему уравнений: $\begin{cases} 2x^2 - xy - 3y^2 + x + y = 6, \\ 2x^2 - 5xy + 3y^2 + x - y = 2. \end{cases}$

Решение:

$$\begin{cases} 2x^2 \overbrace{+2xy-3xy}^{-xy}-3y^2+x+y=6, \\ 2x^2 \overbrace{-2xy-3xy}^{-5xy}+3y^2+x-y=2; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x(x+y)-3y(x+y)+(x+y)=6, \\ 2x(x-y)-3y(x-y)+(x-y)=2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+y)(2x-3y+1)=6, \\ (x-y)(2x-3y+1)=2. \end{cases}$$

Первое уравнение системы разделим на второе и получим:

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y}=3, \\ (x+y)(2x-3y+1)=6; \end{cases} \quad \begin{cases} x=2y, \\ 3y(y+1)=6; \end{cases} \quad \begin{cases} x=2y, \\ y^2+y-2=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2y, \\ \left[\begin{array}{l} y=-2, \\ y=1; \end{array}\right. \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-4, \\ y=-2; \end{cases} \\ \begin{cases} x=2, \\ y=1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(-4;-2)$, $(2;1)$.

4.15. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^2-xy+y^2=7, \\ x^4+x^2y^2+y^4=21. \end{cases}$

Решение:

$$\begin{cases} x^2-xy+y^2=7, \\ x^4 \overbrace{+2x^2y^2-x^2y^2}^{x^2y^2}+y^4=21; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-xy+y^2=7, \\ (x^2+y^2)^2-x^2y^2=21; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-xy+y^2=7, \\ (x^2+y^2-xy)(x^2+y^2+xy)=21. \end{cases}$$

Второе уравнение системы разделим на первое:

$$\begin{cases} x^2+y^2+xy=3, \\ x^2+y^2-xy=7. \end{cases}$$

В полученной системе выполним сложение и вычитание уравнений:

$$\begin{cases} 2x^2+2y^2=10; \\ 2xy=-4; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+y^2=5, \\ 2xy=-4. \end{cases}$$

Сложим первое уравнение со вторым:

$$\begin{cases}(x+y)^2=1,\\ xy=-2;\end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+y=1,\\ xy=-2;\end{cases}\\ \begin{cases}x+y=-1,\\ xy=-2.\end{cases}\end{array}\right.$$

По теореме, обратной теореме Виета, найдем решения систем.

Первая система имеет решения: $(-1;2)$, $(2;-1)$.

Вторая система имеет решения: $(-2;1)$, $(1;-2)$.

Ответ: $(-2;1)$, $(-1;2)$, $(1;-2)$, $(2;-1)$.

4.16. Дана система уравнений: $\begin{cases}x^2+xy=\dfrac{3}{4},\\ \dfrac{x}{y}+1=\dfrac{3}{2}.\end{cases}$ Найдите $x\cdot y$.

Решение:

$$\begin{cases}x(x+y)=\dfrac{3}{4},\\ \dfrac{x+y}{y}=\dfrac{3}{2}.\end{cases}$$

Если разделить первое уравнение системы на второе, то в результате получится:

$$x\cdot y=\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{2}.$$

Ответ: $\dfrac{1}{2}$.

4.17. Решите систему уравнений: $\begin{cases}xy+24=\dfrac{x^3}{y},\\ xy-6=\dfrac{y^3}{x}.\end{cases}$

Решение:

Умножим первое уравнение системы на второе:

$$(xy+24)(xy-6)=\frac{x^3}{y}\cdot\frac{y^3}{x}$$

$x^2y^2+24xy-6xy-144=x^2y^2$

$18xy=144$

$xy=8$

Получаем равносильную систему:

$$\begin{cases} xy=8, \\ xy-6=\dfrac{y^3}{x}; \end{cases} \quad \begin{cases} xy=8, \\ \dfrac{y^3}{x}=2; \end{cases} \quad \begin{cases} x=\dfrac{8}{y}, \\ y^4=16; \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\dfrac{8}{y}, \\ y=2; \end{cases} \\ \begin{cases} x=\dfrac{8}{y}, \\ y=-2; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=4, \\ y=2; \end{cases} \\ \begin{cases} x=-4, \\ y=-2. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(-4;-2)$, $(4;2)$.

4.18. Решите систему уравнений: $\begin{cases} xy=6, \\ xz=2, \\ yz=3. \end{cases}$

Если $x>0$, $y>0$, $z>0$.

Решение:

Перемножим уравнения системы:

$x^2\cdot y^2\cdot z^2=36$.

В силу положительности x, y и z, получаем:

$x\cdot y\cdot z=6$.

Разделим полученный результат на каждое из уравнений системы.

$\dfrac{xyz}{xy}=\dfrac{6}{6}$; $\quad z=1$.

$\dfrac{xyz}{xz}=\dfrac{6}{2}$; $\quad y=3$.

$\dfrac{xyz}{yz}=\dfrac{6}{3}$; $\quad x=2$.

Ответ: $(2;\ 3;\ 1)$.

4.19. Решите систему уравнений: $\begin{cases} \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{6}, \\ xy^2-x^2y=6. \end{cases}$

Решение:

$$\begin{cases} \dfrac{y-x}{xy}=\dfrac{1}{6}, \\ xy(y-x)=6. \end{cases}$$

Умножим первое уравнение системы на второе:

$$\begin{cases} (y-x)^2=1, \\ xy(y-x)=6; \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y-x=1, \\ xy=6; \end{cases} \\ \begin{cases} y-x=-1, \\ xy=-6; \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=1+x, \\ x^2+x-6=0; \end{cases} \\ \begin{cases} y=-1+x, \\ \underbrace{x^2-x+6}_{D<0}=0; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} y=1+x, \\ x^2+x-6=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} y=1+x, \\ \left[\begin{array}{l} x=-3, \\ x=2; \end{array}\right. \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-3, \\ y=-2; \end{cases} \\ \begin{cases} x=2, \\ y=3. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(-3;-2)$, $(2;3)$.

Метод разложения на множители

Нередко для понижения степени уравнений, входящих в систему, используется прием разложения одного из уравнений на множители и замена исходной системы уравнений равносильной ей совокупностью более простых систем уравнений.

4.20. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^2-4y^2-4x+8y=0, \\ x^2+xy+30y=0. \end{cases}$

Решение:

$$\begin{cases} x^2-4y^2-4x+8y=0, \\ x^2+xy+30y=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} (x-2y)(x+2y)-4(x-2y)=0, \\ x^2+xy+30y=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases}(x-2y)(x+2y-4)=0,\\ x^2+xy+30y=0.\end{cases}$$

В первом уравнении системы произведение двух множителей равно нулю, следовательно, один из множителей должен быть равен нулю, и система сводится к совокупности двух систем:

$$\begin{cases}x-2y=0,\\ x^2+xy+30y=0;\end{cases}\quad \begin{cases}x+2y-4=0,\\ x^2+xy+30y=0.\end{cases}$$

1) Из первой системы получаем:

$$\begin{cases}x-2y=0,\\ x^2+xy+30y=0;\end{cases}\quad \begin{cases}x=2y,\\ 4y^2+2y\cdot y+30y=0;\end{cases}\quad \begin{cases}x=2y,\\ 6y(y+5)=0;\end{cases}\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=0,\\ y=0;\end{cases}\\ \begin{cases}x=-10,\\ y=-5.\end{cases}\end{array}\right.$$

2) Из второй системы получаем:

$$\begin{cases}x+2y-4=0,\\ x^2+xy+30y=0;\end{cases}\quad \begin{cases}x=4-2y,\\ 16-16y+4y^2+4y-2y^2+30y=0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=4-2y,\\ 2y^2+18y+16=0;\end{cases}\quad \begin{cases}x=4-2y,\\ y^2+9y+8=0;\end{cases}\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=20,\\ y=-8;\end{cases}\\ \begin{cases}x=6,\\ y=-1.\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: $(0;0)$, $(-10;-5)$, $(20;-8)$, $(6;-1)$.

4.21. Решите систему уравнений: $\begin{cases}x^2=4x+5y,\\ y^2=4y+5x.\end{cases}$

Решение:

Вычтем из первого уравнения системы второе:

$$x^2-y^2=4x+5y-4y-5x$$

$$(x-y)(x+y)+x-y=0$$

$$(x-y)(x+y+1)=0$$

Тогда исходная система равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases}x-y=0,\\ x^2=4x+5y;\end{cases}\quad \begin{cases}x+y+1=0,\\ x^2=4x+5y.\end{cases}$$

1) Из первой системы получаем:

$$\begin{cases} x-y=0, \\ x^2=4x+5y; \end{cases} \quad \begin{cases} x=y, \\ y^2-9y=0; \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0, \\ y=0; \end{cases} \\ \begin{cases} x=9, \\ y=9. \end{cases} \end{array}\right.$$

2) $$\begin{cases} x+y+1=0, \\ x^2=4x+5y; \end{cases} \quad \begin{cases} x=-y-1, \\ y^2+2y+1=-4y-4+5y; \end{cases} \quad \begin{cases} x=-y-1, \\ \underbrace{y^2+y+5}_{D<0}=0. \end{cases}$$

Система не имеет решений.

Ответ: $(0;0)$, $(9;9)$.

4.22. Решите систему уравнений: $\begin{cases} 9x^2-y^2-3x+y=0, \\ x^2+y=xy. \end{cases}$

Решение:

$$\begin{cases} 9x^2-y^2-3x+y=0, \\ x^2+y=xy; \end{cases} \quad \begin{cases} (3x-y)(3x+y-1)=0, \\ x^2+y=xy. \end{cases}$$

Последняя система равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} 3x-y=0, \\ x^2+y=xy; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x+y-1=0, \\ x^2+y=xy. \end{cases}$$

1) Из первой системы получаем:

$$\begin{cases} 3x-y=0, \\ x^2+y=xy; \end{cases} \quad \begin{cases} y=3x, \\ x^2+3x=3x^2; \end{cases} \quad \begin{cases} y=3x, \\ 2x^2-3x=0. \end{cases}$$

Система имеет два действительных решения: $(0;0)$ и $(1{,}5;\ 4{,}5)$.

2) Из второй системы получаем:

$$\begin{cases} 3x+y-1=0, \\ x^2+y=xy; \end{cases} \quad \begin{cases} y=1-3x, \\ x^2+1-3x=x-3x^2; \end{cases} \quad \begin{cases} y=1-3x, \\ (2x-1)^2=0; \end{cases} \quad \begin{cases} x=0{,}5, \\ y=-0{,}5. \end{cases}$$

Ответ: $(0;0)$, $(0{,}5;-0{,}5)$, $(1{,}5;\ 4{,}5)$.

4.23. Решите систему уравнений: $\begin{cases} y^4 + xy^2 - 2x^2 = 0, \\ x + y = 6. \end{cases}$

Решение:

$$\begin{cases} y^4 + xy^2 - 2x^2 = 0, \\ x + y = 6; \end{cases} \quad \begin{cases} y^4 + \overbrace{2xy^2 - xy^2}^{xy^2} - 2x^2 = 0, \\ x + y = 6; \end{cases} \quad \begin{cases} (y^2 - x)(y^2 + 2x) = 0, \\ x + y = 6; \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y^2 - x = 0, \\ x + y = 6; \end{cases} \\ \begin{cases} y^2 + 2x = 0, \\ x + y = 6; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = y^2, \\ y^2 + y - 6 = 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\dfrac{y^2}{2}, \\ y^2 - 2y + 12 = 0; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 9, \\ y = -3; \end{cases} \\ \begin{cases} x = 4, \\ y = 2; \end{cases} \\ \begin{cases} \text{вторая система} \\ \text{решений не имеет.} \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(4;2)$, $(9;-3)$.

4.24. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^2 - x + 1 = y, \\ y^2 - y + 1 = x. \end{cases}$

Решение:

Вычтем из первого уравнения системы второе:

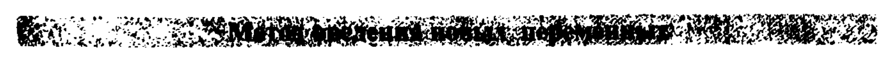
$$-\begin{cases} x^2 - x - y + 1 = 0, \\ y^2 - x - y + 1 = 0; \end{cases}$$

$$x^2 - y^2 = 0$$

$$(x - y)(x + y) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - y = 0, \\ y^2 - y + 1 = x; \end{cases} \\ \begin{cases} x + y = 0, \\ y^2 - y + 1 = x; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = y, \\ y^2 - 2y + 1 = 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x = -y, \\ y^2 + 1 = 0; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1, \\ y = 1; \end{cases} \\ \begin{cases} \text{вторая система} \\ \text{решений не имеет.} \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(1;1)$.



Для решения систем уравнений часто применяется метод замены переменных, когда некоторые выражения от исходных переменных принимаются за новые переменные, в результате чего получается более простая система уравнений относительно новых переменных. После того как эта система решена, надо по найденным значениям выбранных нами выражений найти значения исходных переменных.

4.25. Решите систему уравнений: $\begin{cases} \dfrac{x+1}{x}+\dfrac{y+1}{y}=-3, \\ \dfrac{x+y+1+xy}{xy}=2. \end{cases}$

Решение:

Запишем исходную систему в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{x}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{y}{y}+\dfrac{1}{y}=-3, \\ \dfrac{x}{xy}+\dfrac{y}{xy}+\dfrac{1}{xy}+\dfrac{xy}{xy}=2; \end{cases} \quad \begin{cases} 1+\dfrac{1}{x}+1+\dfrac{1}{y}=-3, \\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{xy}+1=2; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=-5, \\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{xy}=1. \end{cases}$$

Введем новые неизвестные $a=\dfrac{1}{x}$, $b=\dfrac{1}{y}$. Тогда система примет вид:

$$\begin{cases} a+b=-5, \\ a+b+ab=1; \end{cases} \quad \begin{cases} a+b=-5, \\ ab=6; \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=-2, \\ b=-3; \end{cases} \\ \begin{cases} a=-3, \\ b=-2. \end{cases} \end{array} \right.$$

Так как $x=\dfrac{1}{a}$, $y=\dfrac{1}{b}$, решением исходной системы уравнений являются: $\left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{3}\right)$, $\left(-\dfrac{1}{3};-\dfrac{1}{2}\right)$.

Ответ: $\left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{3}\right)$, $\left(-\dfrac{1}{3};-\dfrac{1}{2}\right)$.

4.26. Решите систему уравнений: $\begin{cases} \dfrac{2x}{y}+\dfrac{y}{2x}=\dfrac{17}{4}, \\ x^2+y^2=20. \end{cases}$

Решение:

Сделаем замену $a = \dfrac{2x}{y}$ в первом уравнении системы:

$$a + \frac{1}{a} = \frac{17}{4}$$

$$4a^2 - 17a + 4 = 0$$

$$a_1 = \frac{1}{4};\quad a_2 = 4.$$

1) Если $a = \dfrac{1}{4}$:

$$\begin{cases} \dfrac{2x}{y} = \dfrac{1}{4}, \\ x^2 + y^2 = 20; \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 8x, \\ x^2 + y^2 = 20; \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 8x, \\ x^2 + 64x^2 = 20; \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 8x, \\ x^2 = \dfrac{4}{13}; \end{cases}$$

Решения полученной системы: $\left(-\dfrac{2}{\sqrt{13}};\ -\dfrac{16}{\sqrt{13}}\right)$, $\left(\dfrac{2}{\sqrt{13}};\ \dfrac{16}{\sqrt{13}}\right)$.

2) Если $a = 4$:

$$\begin{cases} \dfrac{2x}{y} = 4, \\ x^2 + y^2 = 20; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2y, \\ x^2 + y^2 = 20; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2y, \\ 4y^2 + y^2 = 20; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2y, \\ y^2 = 4; \end{cases}$$

Решения полученной системы: $(-4;\ -2)$, $(4;\ 2)$.

Ответ: $(4;\ 2)$, $(-4;\ -2)$, $\left(\dfrac{2}{\sqrt{13}};\ \dfrac{16}{\sqrt{13}}\right)$, $\left(-\dfrac{2}{\sqrt{13}};\ -\dfrac{16}{\sqrt{13}}\right)$.

4.27. Решите систему уравнений: $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} + \dfrac{x-y}{x+y} = \dfrac{10}{3}, \\ x^2 - y^2 = 12. \end{cases}$

Решение:

В первом уравнении системы сделаем замену $a = \dfrac{x+y}{x-y}$ и получим уравнение:

$$a + \frac{1}{a} = \frac{10}{3}$$

$$3a^2 - 10a + 3 = 0$$

$a_1 = 3$, $a_2 = \frac{1}{3}$

Тогда исходная система равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} \frac{x+y}{x-y} = 3, \\ x^2 - y^2 = 12; \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{x+y}{x-y} = \frac{1}{3}, \\ x^2 - y^2 = 12. \end{cases}$$

1) Из первой системы получаем:

$$\begin{cases} \frac{x+y}{x-y} = 3, \\ x^2 - y^2 = 12; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2y, \\ x^2 - y^2 = 12; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2y, \\ y^2 = 4; \end{cases} \qquad (4; 2),\ (-4; -2).$$

2) Из второй системы получаем:

$$\begin{cases} \frac{x+y}{x-y} = \frac{1}{3}, \\ x^2 - y^2 = 12; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -2y, \\ x^2 - y^2 = 12; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -2y, \\ y^2 = 4; \end{cases} \qquad (-4; 2),\ (4; -2).$$

Ответ: $(-4; -2)$, $(-4; 2)$, $(4; -2)$, $(4; 2)$.

4.28. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^2 + x + xy = 8, \\ y^2 + y + xy = 4. \end{cases}$

Решение:

Сложим уравнения системы.

$$+\begin{cases} x^2 + x + xy = 8, \\ y^2 + y + xy = 4; \end{cases}$$

$$(x+y)^2 + (x+y) = 12$$

В полученном уравнении введем замену: $x + y = a$.

$a^2 + a - 12 = 0$

$a_1 = -4$, $a_2 = 3$

Тогда исходная система равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x + y = -4, \\ y^2 + y + xy = 4; \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 3, \\ y^2 + y + xy = 4. \end{cases}$$

1) $\begin{cases} x+y=-4, \\ y^2+y+xy=4; \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=-4, \\ y(x+y)+y=4; \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=-4, \\ -4y+y=4; \end{cases}$ $\begin{cases} x=-\frac{8}{3}, \\ y=-\frac{4}{3}. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x+y=3, \\ y^2+y+xy=4; \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=3, \\ y(x+y)+y=4; \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=3, \\ 4y=4; \end{cases}$ $\begin{cases} x=2; \\ y=1. \end{cases}$

Ответ: $\left(-\frac{8}{3};-\frac{4}{3}\right)$, $(2;1)$.

4.29. Решите систему уравнений: $\begin{cases} \frac{3x-2y}{2y+3x}=-\frac{1}{5}, \\ \frac{1}{3x+2y}+3x-2y=-\frac{4}{5}. \end{cases}$

Решение:

Введем новые переменные $a=\frac{1}{3x+2y}$, $b=3x-2y$.

Тогда система примет вид:

$\begin{cases} ab=-\frac{1}{5}, \\ a+b=-\frac{4}{5}; \end{cases}$ $\begin{cases} ab=-0,2, \\ a+b=-0,8; \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=-1, \\ b=0,2; \end{cases} \\ \begin{cases} a=0,2, \\ b=-1. \end{cases} \end{array}\right.$

1) $\begin{cases} a=-1, \\ b=0,2; \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{1}{3x+2y}=-1, \\ 3x-2y=0,2; \end{cases}$ $\begin{cases} 3x+2y=-1, \\ 3x-2y=0,2; \end{cases}$ $\begin{cases} 6x=-0,8, \\ 4y=-1,2; \end{cases}$

$\begin{cases} x=-\frac{2}{15}, \\ y=-0,3. \end{cases}$

2) $\begin{cases} a=0,2, \\ b=-1; \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{1}{3x+2y}=\frac{1}{5}, \\ 3x-2y=-1; \end{cases}$ $\begin{cases} 3x+2y=5, \\ 3x-2y=-1; \end{cases}$ $\begin{cases} 6x=4, \\ 4y=6; \end{cases}$

$$\begin{cases} x = \dfrac{2}{3}, \\ y = 1.5. \end{cases}$$

Ответ: $\left(-\dfrac{2}{15}; -\dfrac{3}{10}\right)$, $\left(\dfrac{2}{3}; \dfrac{3}{2}\right)$.

Общего правила выбора новых переменных не существует. Но имеется два вида систем, для которых можно указать подходящую замену:

- система симметрических уравнений;
- система уравнений, одно из которых однородно.

Симметрические системы

Системы, в которых замена x на y и y на x приводит к той же системе уравнений, называют *симметрическими* системами.

Если левые части обеих уравнений системы являются симметрическими, полезно ввести новые переменные по следующим формулам: $x + y = a \quad xy = b$.

Отметим еще одну очевидную особенность симметрических систем: если пара чисел $(x_0;\ y_0)$ является решением симметрической системы, то и пара $(y_0; x_0)$ является решением этой системы.

Могут быть полезны следующие представления:

$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = a^2 - 2b$;

$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = (x + y)\left((x + y)^2 - 3xy\right) = a\left(a^2 - 3b\right)$;

$x^4 + y^4 = \left(x^2 + y^2\right)^2 - 2x^2y^2 = \left(a^2 - 2b\right)^2 - 2b^2$.

Эти выражения вовсе не обязательно помнить, но нужно уметь выводить их самостоятельно.

4.30. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 21, \\ x + xy + y = 9. \end{cases}$

Решение:

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=21, \\ x+xy+y=9; \end{cases} \quad \begin{cases} (x+y)^2-xy=21, \\ (x+y)+xy=9. \end{cases}$$

Полагая $x+y=a$, $xy=b$, получим систему:

$$\begin{cases} a^2-b=21, \\ a+b=9; \end{cases} \quad \begin{cases} a^2+a-30=0, \\ b=9-a; \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=5, \\ b=4; \end{cases} \\ \begin{cases} a=-6, \\ b=15. \end{cases} \end{array}\right.$$

Возвращаясь к переменным x и y, получаем совокупность двух систем:

$$\begin{cases} x+y=5, \\ xy=4; \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=-6, \\ xy=15. \end{cases}$$

Первая система имеет два решения $(1;4)$, $(4;1)$. Вторая система решений не имеет.

Ответ: $(1;4)$, $(4;1)$.

4.31. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^2y+xy^2=30, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{6}. \end{cases}$

Решение:

$$\begin{cases} xy(x+y)=30, \\ \dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{5}{6}. \end{cases}$$

Полагая $x+y=a$, $xy=b$, получим систему:

$$\begin{cases} ab=30, \\ \dfrac{a}{b}=\dfrac{5}{6}; \end{cases} \quad \begin{cases} b^2=36, \\ a=\dfrac{5}{6}b; \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=5, \\ b=6; \end{cases} \\ \begin{cases} a=-5, \\ b=-6. \end{cases} \end{array}\right.$$

Возвращаясь к переменным x и y, получаем совокупность двух систем:

$$\begin{cases} x+y=5, \\ xy=6; \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=-5, \\ xy=-6. \end{cases}$$

Первая система имеет два решения $(2;3)$ и $(3;2)$,

вторая - $(-6;1)$ и $(1;-6)$.

Ответ: $(-6;1)$, $(1;-6)$, $(2;3)$, $(3;2)$.

4.32. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^2+xy+y^2=13, \\ x^2-xy+y^2=7. \end{cases}$.

Решение:

Данная система уравнений симметрическая.

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=13, \\ x^2-xy+y^2=7; \end{cases} \qquad \begin{cases} (x+y)^2-xy=13, \\ (x+y)^2-3xy=7. \end{cases}$$

Полагая $x+y=a$, $xy=b$, получим систему:

$$\begin{cases} a^2-b=13, \\ a^2-3b=7; \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2=13+b, \\ 2b=6; \end{cases} \qquad \begin{cases} a=\pm 4, \\ b=3. \end{cases}$$

Таким образом, исходная система равносильна совокупности следующих двух систем:

$$\begin{cases} x+y=4, \\ xy=3; \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=-4, \\ xy=3. \end{cases}$$

Первая система имеет два решения $(1;3)$ и $(3;1)$, вторая - $(-1;-3)$ и $(-3;-1)$.

Ответ: $(1;3)$, $(3;1)$, $(-1;-3)$, $(-3;-1)$.

4.33. Решите систему уравнений: $\begin{cases} (x-2)(y-2)=4, \\ x^2+y^2+xy=3. \end{cases}$.

Решение:

$$\begin{cases} (x-2)(y-2)=4, \\ x^2+y^2+xy=3; \end{cases} \qquad \begin{cases} xy-2y-2x+4=4, \\ x^2+y^2+xy=3; \end{cases} \qquad \begin{cases} xy-2(y+x)=0, \\ (x+y)^2-xy=3. \end{cases}$$

Система уравнений симметрическая, введем стандартную замену:

$$\begin{cases} a=x+y, \\ b=xy. \end{cases}$$

Получим систему:

$$\begin{cases} b-2a=0, \\ a^2-b=3; \end{cases} \quad \begin{cases} b=2a, \\ a^2-2a-3=0; \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=-1, \\ b=-2; \end{cases} \\ \begin{cases} a=3, \\ b=6. \end{cases} \end{array}\right.$$

1) $\begin{cases} a=-1, \\ b=-2; \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=-1, \\ xy=-2. \end{cases}$

По теореме, обратной теореме Виета, можно подобрать корни:

$\begin{cases} x=-2, \\ y=1; \end{cases}$ или $\begin{cases} x=1, \\ y=-2. \end{cases}$

2) $\begin{cases} a=3, \\ b=6; \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=3, \\ xy=6; \end{cases} \quad \begin{cases} x=3-y, \\ y^2-3y+6=0. \end{cases}$

Данная система решений не имеет.

Ответ: $(1; -2)$, $(-2; 1)$.

К симметрическим системам относится и система вида $\begin{cases} x+y=a, \\ xy=b, \end{cases}$ которую можно решать, пользуясь свойствами корней квадратного уравнения.

4.34. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^3+y^3=7, \\ x^3y^3=-8. \end{cases}$

Решение:

Из условия следует, что x^3 и y^3 являются корнями некоторого приведенного квадратного уравнения относительно переменной z. Составим относительно z уравнение:

$z^2-7z-8=0$

$z_1=8$, $z_2=-1$

В результате получаем совокупность двух систем:

$$\begin{cases} x^3=8, \\ y^3=-1; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^3=-1, \\ y^3=8. \end{cases}$$

Первая система имеет решение $\begin{cases} x=2, \\ y=-1. \end{cases}$ Вторая: $\begin{cases} x=-1, \\ y=2. \end{cases}$

Ответ: $(-1;2)$, $(2;-1)$.

4.35. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^3+x^3y^3+y^3=17, \\ x+xy+y=5. \end{cases}$

Решение:

$$\begin{cases} (x^3+y^3)+x^3y^3=17, \\ (x+y)+xy=5; \end{cases} \quad \begin{cases} (x+y)(x^2-xy+y^2)+x^3y^3=17, \\ (x+y)+xy=5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+y)\left((x+y)^2-3xy\right)+(xy)^3=17, \\ (x+y)+xy=5. \end{cases}$$

Система уравнений симметрическая, введем стандартную замену:

$$\begin{cases} a=x+y, \\ b=xy. \end{cases}$$

Получим систему:

$$\begin{cases} a(a^2-3b)+b^3=17, \\ a+b=5; \end{cases} \quad \begin{cases} a^3+b^3-3ab=17, \\ a+b=5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a+b)(a^2-ab+b^2)-3ab=17, \\ a+b=5; \end{cases} \quad \begin{cases} (a+b)\left((a+b)^2-3ab\right)-3ab=17, \\ a+b=5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5(5^2-3ab)-3ab=17, \\ a+b=5; \end{cases} \quad \begin{cases} 125-18ab=17, \\ a+b=5; \end{cases} \quad \begin{cases} ab=6, \\ a+b=5; \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=2, \\ b=3; \end{cases} \\ \begin{cases} a=3, \\ b=2; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=2, \\ xy=3; \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=3, \\ xy=2; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \text{первая система} \\ \text{решений не имеет;} \\ \begin{cases} x=1, \\ y=2; \end{cases} \\ \begin{cases} x=2, \\ y=1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(1;2)$, $(2;1)$.

Уравнение называется *однородным*, если все слагаемые, содержащие неизвестные, имеют одну и ту же степень (показатели степеней разных неизвестных в одном и том же слагаемом складываются).

Если одно из уравнений системы от двух переменных x и y является однородным, то такая система может быть решена при помощи стандартной замены $a = \frac{x}{y}$ $(y \neq 0)$.

4.36. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0, \\ x^2 + y^2 = 20. \end{cases}$

Решение:

Рассмотрим первое уравнение системы.

Данное уравнение является однородным.

Пара чисел $(0;\,0)$ является решением данного уравнения, но не является решением исходной системы, следовательно, данное уравнение можно разделить на y^2.

$$x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \quad \Big| : y^2 \neq 0$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 3\frac{x}{y} + 2 = 0$$

В полученном уравнении сделаем замену: $\frac{x}{y} = a$.

$$a^2 - 3a + 2 = 0$$

$$a_1 = 2, \quad a_2 = 1$$

Возвращаясь к переменным x и y, получаем совокупность двух систем:

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = 2, \\ x^2 + y^2 = 20; \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{x}{y} = 1, \\ x^2 + y^2 = 20. \end{cases}$$

1) Из первой системы получаем:

$$\begin{cases}\dfrac{x}{y}=2,\\ x^2+y^2=20;\end{cases}\qquad \begin{cases}x=2y,\\ 4y^2+y^2=20;\end{cases}\qquad \begin{cases}x=2y,\\ y^2=4;\end{cases}$$

$(4;2)$, $(-4;-2)$.

2) Из второй системы получаем:

$$\begin{cases}\dfrac{x}{y}=1,\\ x^2+y^2=20;\end{cases}\qquad \begin{cases}x=y,\\ y^2=10;\end{cases}$$

$\left(\sqrt{10};\sqrt{10}\right)$, $\left(-\sqrt{10};-\sqrt{10}\right)$.

Ответ: $(-4;-2)$, $(4;2)$, $\left(-\sqrt{10};-\sqrt{10}\right)$, $\left(\sqrt{10};\sqrt{10}\right)$.

4.37. Решите систему уравнений: $\begin{cases}3x^2+2xy-2y^2=3,\\ 2x^2+3xy-y^2=4.\end{cases}$

Решение:

Однородных уравнений в данной системе нет. Будем применять стандартный приём, который позволяет свести систему такого вида к однородному уравнению.

Умножим первое уравнение на 4, а второе на 3 и вычтем из первого уравнения второе, тогда получим:

$$\begin{cases}3x^2+2xy-2y^2=3, & \big|\cdot 4\\ 2x^2+3xy-y^2=4; & \big|\cdot 3\end{cases}$$

$$-\begin{cases}12x^2+8xy-8y^2=12,\\ 6x^2+9xy-3y^2=12;\end{cases}$$

$$6x^2-xy-5y^2=0$$

Полученное уравнение является однородным, разделим его на y^2:

$$6x^2-xy-5y^2=0 \quad \Big| : y^2\neq 0$$

$$6\left(\frac{x}{y}\right)^2-\frac{x}{y}-5=0$$

Стандартной заменой $a=\frac{x}{y}$ вышеприведенное уравнение сводится к квадратному:

$$6a^2-a-5=0$$

$$a_1=-\frac{5}{6};\quad a_2=1.$$

1) Если $a=-\frac{5}{6}$:

$$\begin{cases}\frac{x}{y}=-\frac{5}{6},\\ 2x^2+3xy-y^2=4;\end{cases}\qquad \begin{cases}y=-1,2x,\\ 2x^2-3,6x^2-1,44x^2=4;\end{cases}\qquad \begin{cases}y=-1,2x,\\ -3,04\cdot x^2=4.\end{cases}$$

Последняя система решений не имеет.

2) Если $a=1$: $\frac{x}{y}=1$; $y=x$.

$$\begin{cases}\frac{x}{y}=1,\\ 2x^2+3xy-y^2=4;\end{cases}\qquad \begin{cases}y=x,\\ 2x^2+3x^2-x^2=4;\end{cases}\qquad \begin{cases}y=x,\\ x^2=1;\end{cases}\qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1,\\ y=1;\end{cases}\\ \begin{cases}x=-1,\\ y=-1.\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: $(1;1)$, $(-1;-1)$.

4.38. Решите систему уравнений: $\begin{cases}x^2+4xy-3y^2=1,\\ 2x^2-3xy+y^2=-1.\end{cases}$

Решение:

Прибавив к первому уравнению системы второе, получим равносильную систему с однородным уравнением второй степени относительно x и y:

$$\begin{cases}3x^2+xy-2y^2=0,\\ 2x^2-3xy+y^2=-1.\end{cases}$$

Заметим, что $y \neq 0$, так как в этом случае из первого уравнения системы получилось бы, что $x = 0$, а нулевые значения переменных не удовлетворяют второму уравнению системы.

Разделим обе части первого уравнения на y^2:

$$3x^2 + xy - 2y^2 = 0 \quad \Big| : y^2 \neq 0$$

$$3\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{x}{y} - 2 = 0$$

Введем новую переменную $a = \dfrac{x}{y}$ и решим квадратное уравнение.

$$3a^2 + a - 2 = 0$$

$$a_1 = -1, \quad a_2 = \frac{2}{3}$$

1) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = -1, \\ 2x^2 - 3xy + y^2 = -1; \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x = -y, \\ 2y^2 + 3y^2 + y^2 = -1; \end{cases}$ решений нет.

2) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{2}{3}, \\ 2x^2 - 3xy + y^2 = -1; \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x = \dfrac{2}{3}y, \\ \dfrac{8}{9}y^2 - 2y^2 + y^2 = -1; \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x = \dfrac{2}{3}y, \\ \dfrac{y^2}{9} = 1; \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x = \pm 2, \\ y = \pm 3. \end{cases}$

Ответ: $(-2; -3)$, $(2; 3)$.

4.39. Решите систему уравнений: $\begin{cases} (x-y)(x^2 - y^2) = 16, \\ (x+y)(x^2 + y^2) = 40. \end{cases}$

Решение:

Разделим первое уравнение на второе, тогда получим:

$$\frac{(x-y)^2}{x^2 + y^2} = \frac{2}{5}.$$

$$5x^2 - 10xy + 5y^2 = 2x^2 + 2y^2$$

$$3x^2 - 10xy + 3y^2 = 0$$

Полученное уравнение является однородным, разделим его на y^2:

$$3\left(\frac{x}{y}\right)^2-10\frac{x}{y}+3=0$$

Замена: $a=\frac{x}{y}$.

$$3a^2-10a+3=0$$

$$a_1=3;\quad a_2=\frac{1}{3}.$$

1) Если $a=3$:

$$\begin{cases}\frac{x}{y}=3,\\(x-y)(x^2-y^2)=16;\end{cases}\qquad \begin{cases}x=3y,\\2y\cdot 8y^2=16;\end{cases}\qquad \begin{cases}x=3,\\y=1.\end{cases}$$

2) Если $a=\frac{1}{3}$:

$$\begin{cases}\frac{x}{y}=\frac{1}{3},\\(x-y)(x^2-y^2)=16;\end{cases}\qquad \begin{cases}y=3x,\\(-2x)\cdot(-8x^2)=16;\end{cases}\qquad \begin{cases}x=1,\\y=3.\end{cases}$$

Ответ: $(1;3)$, $(3;1)$.

4.40. Решите систему уравнений: $\begin{cases}x^2+3xy-3y^2=1,\\2x^2-xy+y^2=2.\end{cases}$

Решение:

Умножим первое уравнение на (-2) и сложим со вторым:

$$+\begin{cases}-2x^2-6xy+6y^2=-2,\\ 2x^2-xy+y^2=2.\end{cases}$$

$$-7xy+7y^2=0$$

Получаем равносильную систему:

$$\begin{cases} -7xy + 7y^2 = 0, \\ 2x^2 - xy + y^2 = 2; \end{cases} \qquad \begin{cases} 7y(y - x) = 0, \\ 2x^2 - xy + y^2 = 2; \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 0, \\ 2x^2 - xy + y^2 = 2; \end{cases} \\ \begin{cases} y = x, \\ 2x^2 - xy + y^2 = 2; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 0, \\ x^2 = 1; \end{cases} \\ \begin{cases} y = x, \\ x^2 = 1; \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1, \\ y = 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1, \\ y = 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1, \\ y = 1; \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1, \\ y = -1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(-1; -1)$, $(-1; 0)$, $(1; 0)$, $(1; 1)$.

§5. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ РАЦИОНАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ



Линейным неравенством с одной переменной называется неравенство вида $ax > b$ (или $ax < b$).

Неравенства вида $ax > b$ или $ax < b$ называются строгими, а неравенства вида $ax \geq b$ ($ax \leq b$) называются нестрогими.

При решении неравенств используют следующие свойства:

1) если из одной части неравенства перенести в другую слагаемое с противоположным знаком, то получится равносильное неравенство;

2) если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, то получится равносильное неравенство;

3) если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же **отрицательное** число, изменив при этом знак неравенства на **противоположный,** то получится равносильное неравенство.

Введем обозначения интервалов:

Графическое изображение	Аналитическая запись	Множественная запись
b x	$x > b$	$(b; \infty)$
b x	$x \geq b$	$[b; \infty)$
a x	$x < a$	$(-\infty; a)$
a x	$x \leq a$	$(-\infty; a]$
a b x	$a < x < b$	$(a; b)$

Графическое изображение	Аналитическая запись	Множественная запись
a ● ━━━ ● b → x	$a \le x \le b$	$[a; b]$
a ● ━━━ ○ b → x	$a \le x < b$	$[a; b)$
a ○ ━━━ ● b → x	$a < x \le b$	$(a; b]$
● a → x	$x = a$	$\{a\}$

Приведем примеры решения линейных неравенств.

а) $2(x+8)-5x<4-3x$

$2x+16-5x<4-3x$

$2x-5x+3x<4-16$

$0\cdot x<-12$

Последнее неравенство решений не имеет, так как при любом значении x оно обращается в неверное числовое неравенство:

$0<-12$.

Ответ: $x\in\varnothing$.

б) $(4x-3)(3+4x)+x<16x^2$

$16x^2-9+x-16x^2<0$

$x-9<0$

$x<9$.

Ответ: $x\in(-\infty;9)$.

в) $3(x+2)-4(x-6)>2(x-5)$

$3x+6-4x+24>2x-10$

$-x-2x>-10-30$

$-3x>-40 \quad |:(-3)$

$x<\frac{40}{3}$.

Ответ: $x\in\left(-\infty;\frac{40}{3}\right)$.

г) $(x-1)(x^2+x+1)-4x<x(x-2)(2+x)$

$x^3-1-4x<x(x^2-4)$

$x^3-1-4x<x^3-4x$

$x^3-4x-x^3+4x<1$

$0\cdot x<1$

Полученное неравенство справедливо для любого значения x.

Ответ: $x\in(-\infty;\infty)$.

д) $x>4+\frac{2-x}{4}$

Умножим обе части неравенства на 4.

$4x>16+2-x$

$4x+x>18$

$5x>18$

$x>3,6$.

Ответ: $x\in(3,6;\infty)$.

е) $\frac{5(1-2x)}{6}+\frac{5}{8}>\frac{3x-1}{12}-2x$

Умножим обе части неравенства на наименьший общий знаменатель трех дробей, то есть на 24.

$20(1-2x)+15\geq 2(3x-1)-48x$

$20-40x+15\geq 6x-2-48x$

$-40x-6x+48x\geq -2-35$

$2x\geq -37$

$x\geq -18{,}5$.

Ответ: $x\in[-18{,}5;\infty)$.

ж) $(4-\sqrt{17})(3x-9)<0$

$-(\sqrt{17}-4)(3x-9)<0 \quad |\cdot(-1)$

$\underbrace{(\sqrt{17}-4)}_{>0}(3x-9)>0$

$3x-9>0$

$x>3$.

Ответ: $x\in(3;\infty)$.

Метод интервалов (промежутков) для решения целых рациональных неравенств

Методы решения рациональных неравенств во многом повторяют методы решения соответствующих уравнений с добавлением лишь одной, но принципиальной идеи:

функция, непрерывная и не обращающаяся в нуль на некотором интервале, сохраняет на нем знак.

Это является основой применения метода интервалов, который состоит в следующем:

1 случай. Пусть требуется решить неравенство, состоящее из произведения линейных множителей $(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)...(x-a_n)\vee 0$.

Рассмотрим многочлен $P(x)=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)...(x-a_n)$, где a_1, a_2, ... a_n - корни (нули) многочлена. Причем все числа a_1, a_2, ... a_n различны: $a_1 < a_2 < ... < a_n$.

1) Числа a_1, a_2, ... a_n отмечаем на числовой оси точками. Точки изображаются закрашенными кружками, если неравенство нестрогое ($\le$, $\ge$), и пустыми кружками, если неравенство строгое ($<$, $>$). Отмеченные точки разбивают всю числовую ось на промежутки.

2) Расставляем знаки на каждом из образовавшихся промежутков. При этом удобнее начинать с крайнего правого промежутка. Все точки этого промежутка больше наибольшего корня многочлена, а значит, все линейные множители $P(x)$ положительны. Таким образом, $P(x)>0$ в интервале $a_n < x < \infty$, а далее при переходе справа налево через нули левой части неравенства знаки $P(x)$ чередуются.

Изменение знаков многочлена $P(x)$ удобно иллюстрировать с помощью волнообразной линии, которая проводится, начиная справа сверху, последовательно через все корни многочлена. Волнообразную линию называют кривой знаков.

3) Решением неравенства $P(x)>0$ будет объединение всех интервалов, в которых поставлен знак плюс (кривая знаков проходит выше числовой оси).

Решением неравенства $P(x)<0$ будет объединение всех интервалов, в которых поставлен знак минус (кривая знаков проходит ниже числовой оси).

Для нестрогих неравенств к соответствующим интервалам добавляются их концы.

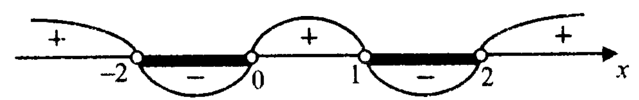
Рассмотрим применение метода интервалов к следующим примерам.

5.1. Решите неравенство: $(x+2)x(x-1)(x-2)<0$.

Решение:

Найдем нули многочлена $(x+2)\,x\,(x-1)(x-2)$:

$x=-2$, $x=0$, $x=1$, $x=2$.



Ответ: $x\in(-2;0)\cup(1;2)$.

5.2. Решите неравенство: $(2x+1)(3-x)(x-6)\le 0$.

Решение:

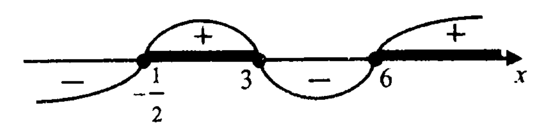
Умножим обе части неравенства на (-1), для того чтобы привести неравенство к стандартному виду, то есть выражение $(3-x)$ заменить на $(x-3)$:

$(2x+1)(3-x)(x-6)\le 0 \qquad \big|\cdot(-1)$

$(2x+1)(x-3)(x-6)\ge 0$

Нули многочлена:

$x=-\dfrac{1}{2}$, $x=3$, $x=6$.



Ответ: $x\in\left[-\dfrac{1}{2};3\right]\cup[6;\infty)$.

[redacted]. Рассмотрим общую схему решения рационального неравенства:

$$(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\dots(x-a_n)^{k_n}\vee 0.$$

Обозначим многочлен:

$$P(x)=(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\dots(x-a_n)^{k_n}.$$

a_1, a_2, ... a_n - корни многочлена соответственно кратности k_1, k_2, ... k_n.

Неравенство такого вида решается с помощью **обобщенного метода интервалов**:

1) на числовую ось наносят числа a_1, a_2, ... a_n;

2) в интервале справа от наибольшего из этих чисел ставят знак *плюс*.

Затем на остальных интервалах расставляют знаки многочлена в зависимости от четности степени, соответствующей данной точке на числовой оси.

Если k_i - четное число, то при переходе через точку x_i многочлен сохраняет знак, то есть:



Такую точку называют **точкой возврата**.

Если k_i - нечетное число, то при переходе через точку x_i многочлен меняет знак, то есть:



Таким образом, рассматриваются все промежутки.

Решением неравенства $P(x)>0$ будет объединение всех интервалов, в которых поставлен знак плюс, а решением неравенства $P(x)<0$ будет объединение всех интервалов, в которых поставлен знак минус.

5.3. Решите неравенство: $(x+3)(3x-2)^5(7-x)^3(5x+8)^2<0$.

Решение:

Приведем данное неравенство к стандартному виду:

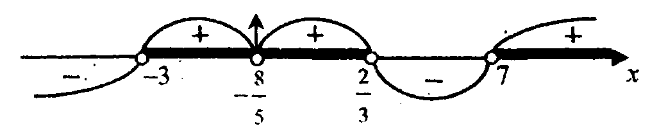
$$(x+3)(3x-2)^5(7-x)^3(5x+8)^2<0 \quad \Big|\cdot(-1)$$

$$(x+3)(3x-2)^5(x-7)^3(5x+8)^2>0$$

Нули многочлена:

$$x=-3\,,\quad x=\frac{2}{3}^{(5)}\,,\quad x=7^{(3)}\,,\quad x=-\frac{8}{5}^{(2)}\,.$$

В скобках указана кратность корня, при этом $x=-\dfrac{8}{5}$ является точкой возврата.



Ответ: $x\in\left(-3;-\dfrac{8}{5}\right)\cup\left(-\dfrac{8}{5};\dfrac{2}{3}\right)\cup(7;\infty)$.

Замечание. Множеством решений нестрогого неравенства $P(x)\geq 0$ $\left(P(x)\leq 0\right)$ является объединение двух множеств: множества решений строгого неравенства $P(x)>0$ $\left(P(x)<0\right)$ и множества решений уравнения $P(x)=0$.

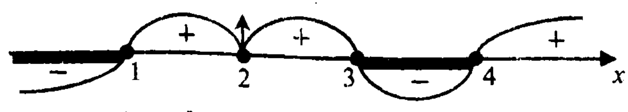
5.4. Решите неравенство: $(x-1)^3(x-2)^2(x-3)^5(x-4)\leq 0$.

Решение:

$$(x-1)^3(x-2)^2(x-3)^5(x-4)\leq 0$$

Нули многочлена:

$$x=1^{(3)}\,,\quad x=2^{(2)}\,,\quad x=3^{(5)}\,,\quad x=4\,.$$



Ответ: $(-\infty;1]\cup\{2\}\cup[3;4]$.

5.5. Решите неравенство: $\left(x^2-3x+2\right)\left(x^3-3x^2\right)\left(4-x^2\right)\le 0$.

Решение:

$$\left(x^2-3x+2\right)\left(x^3-3x^2\right)\left(4-x^2\right)\le 0 \quad \Big|\cdot(-1)$$

$$\left(x^2-3x+2\right)\left(x^3-3x^2\right)\left(x^2-4\right)\ge 0$$

$$(x-1)(x-2)x^2(x-3)(x-2)(x+2)\ge 0$$

$$x^2(x+2)(x-1)(x-2)^2(x-3)\ge 0$$

Ответ: $x\in[-2;1]\cup\{2\}\cup[3;\infty)$.

Замечание. Обобщенный метод интервалов можно применять и для решения неравенства вида:

$$(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\ldots(x-a_n)^{k_n}\left(b_1x^2+c_1x+d_1\right)^{t_1}\ldots\left(b_mx^2+c_mx+d_m\right)^{t_m}\vee 0,$$

в котором дискриминант каждого из квадратных трехчленов $\left(b_1x^2+c_1x+d_1\right),\ldots,\left(b_mx^2+c_mx+d_m\right)$ отрицателен.

В этом случае исходное неравенство равносильно неравенству $(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\ldots(x-a_n)^{k_n}\vee 0$, рассмотренному в предыдущем случае.

5.6. Решите неравенство: $(x-3)^2\left(x^2-4\right)\left(x^2-9\right)\left(x^3+8\right)(x+6)^4\ge 0$.

Решение:

$$(x-3)^2(x-2)(x+2)(x-3)(x+3)(x+2)\left(x^2-2x+4\right)(x+6)^4\ge 0$$

$$(x-3)^3(x-2)(x+2)^2(x+3)\underbrace{\left(x^2-2x+4\right)}_{D<0}(x+6)^4\ge 0$$

Выражение $\left(x^2-2x+4\right)$ принимает только положительные значения, поэтому исходное неравенство упрощается:

$$(x-3)^3(x-2)(x+2)^2(x+3)(x+6)^4 \ge 0$$

Нули многочлена:

$x = 3^{(3)}$, $x = 2$, $x = -2^{(2)}$, $x = -3$, $x = -6^{(4)}$.

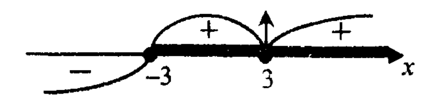
Ответ: $x \in \{-6\} \cup [-3; 2] \cup [3; \infty)$.

5.7. Решите неравенство: $(x-3)(3x^2 - x + 2)(x^2 - 9) \ge 0$.

Решение:

$$(x-3)\underbrace{(3x^2 - x + 2)}_{D<0}(x-3)(x+3) \ge 0$$

$$(x+3)(x-3)^2 \ge 0$$



Ответ: $x \in [-3; \infty)$.

Как известно, линейная, квадратичная, степенная, показательная, логарифмическая и тригонометрические функции, а также их композиции и функции, получаемые из них с помощью арифметических действий, **непрерывны** в своей области определения. Поэтому метод интервалов можно применять для решения практически всех неравенств школьного курса.

Метод интервалов позволяет представить множество решений неравенства в виде объединения промежутков, границы которых либо корни соответствующего уравнения, либо граничные точки области определения неравенства.

Целое рациональное неравенство вида $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n \vee 0$ можно решить по следующей схеме:

1) найти корни многочлена $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$;

2) разложить многочлен на множители;

3) применить метод интервалов.

5.8. Решите неравенство: $15x^2 - (5x-2)(3x+1) < 7x - 8$.

Решение:

$15x^2 - \left(15x^2 - x - 2\right) < 7x - 8$

$x + 2 < 7x - 8$

$-6x + 10 < 0 \quad \Big| :(-6)$

$x - \dfrac{5}{3} > 0; \qquad x > \dfrac{5}{3}.$

Ответ: $x \in \left(\dfrac{5}{3}; \infty\right)$.

5.9. Решите неравенство: $x^3 - 10x^2 + 21x \geq 0$.

Решение:

Разложим левую часть неравенства на множители:

$x\left(x^2 - 10x + 21\right) \geq 0$.

Найдем корни квадратного трехчлена $\left(x^2 - 10x + 21\right)$:

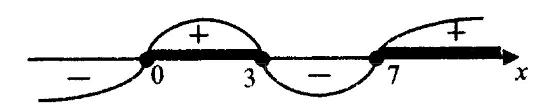
$x^2 - 10x + 21 = 0$

$x_1 = 3, \quad x_2 = 7$.

Тогда исходное неравенство перепишется в виде:

$x(x-3)(x-7) \geq 0$

$x = 0, \;\; x = 3, \;\; x = 7$.



Ответ: $x \in [0; 3] \cup [7; \infty)$.

5.10. Решите неравенство: $4x^2 + 4x + 1 \le 0$.

Решение:

$(2x+1)^2 \le 0$

$x = -\frac{1}{2}^{(2)}$

$$\begin{array}{c} + \quad \uparrow \quad + \\ \longrightarrow x \\ -\frac{1}{2} \end{array}$$

Ответ: $x = -\frac{1}{2}$.

5.11. Решите неравенство: $(x^2-1)^3(3x^2+1) \le (x^2-1)^3(6-3x-5x^2)$

Решение:

Замечание: Нельзя сокращать неравенство [illegible]

Перенесем все члены неравенства в левую часть и вынесем множитель $(x^2-1)^3$ за скобки:

$(x^2-1)^3(3x^2+1-6+3x+5x^2) \le 0$

$(x-1)^3(x+1)^3(8x^2+3x-5) \le 0$

Корни квадратного трехчлена $(8x^2+3x-5)$: $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{5}{8}$.

Получаем неравенство:

$8(x-1)^3(x+1)^3(x+1)\left(x-\frac{5}{8}\right) \le 0$

$8(x-1)^3(x+1)^4\left(x-\frac{5}{8}\right) \le 0$

$x = 1^{(3)}, \quad x = -1^{(4)}, \quad x = \frac{5}{8}$

Ответ: $x \in \{-1\} \cup \left[\frac{5}{8};\ 1\right]$.

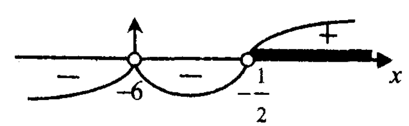
5.12. Решите неравенство: $(x+6)^2(x^2+x-1) < (x^2+3x)(x+6)^2$.

Решение:

$(x+6)^2(x^2+3x) - (x+6)^2(x^2+x-1) > 0$

$(x+6)^2(x^2+3x-x^2-x+1) > 0$

$(x+6)^2(2x+1) > 0$



Ответ: $x \in \left(-\frac{1}{2};\ \infty\right)$.

5.13. Решите неравенство: $x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2 \ge 0$.

Решение:

Разложим левую часть неравенства на множители:

$x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2 = (x^4 + x^2 - 2) - (3x^3 - 3x) =$

$= (x^2+2)(x^2-1) - 3x(x^2-1) = (x^2-1)(x^2-3x+2) =$

$= (x-1)(x+1)(x-1)(x-2) = (x-1)^2(x+1)(x-2)$

Получаем неравенство:

$(x-1)^2(x+1)(x-2) \ge 0$

$x = 1^{(2)}, \quad x = -1, \quad x = 2$

Ответ: $x \in (-\infty; -1] \cup \{1\} \cup [2; \infty)$.

5.14. Решите неравенство: $x^8 - 6x^7 + 9x^6 - x^2 + 6x - 9 < 0$.

Решение:

$x^6\left(x^2 - 6x + 9\right) - \left(x^2 - 6x + 9\right) < 0$

$\left(x^6 - 1\right)(x-3)^2 < 0$

$\left(x^3 - 1\right)\left(x^3 + 1\right)(x-3)^2 < 0$

$(x-1)\underbrace{\left(x^2 + x + 1\right)}_{D<0}(x+1)\underbrace{\left(x^2 - x + 1\right)}_{D<0}(x-3)^2 < 0$

$(x-1)(x+1)(x-3)^2 < 0$

Ответ: $x \in (-1; 1)$.

5.15. Решите неравенство: $x^4 - 10x^2 + 9 \le 0$.

Решение:

Введением новой переменной $t = x^2$ понизим степень многочлена: $t^2 - 10t + 9 \le 0$.

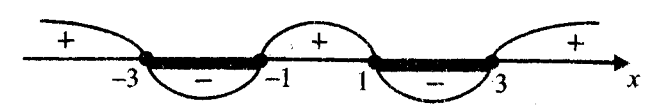
Корни многочлена $\left(t^2 - 10t + 9\right)$: $t_1 = 9$, $t_2 = 1$. Тогда:

$(t-9)(t-1) \le 0$

$\left(x^2 - 9\right)\left(x^2 - 1\right) \le 0$

$(x-3)(x+3)(x-1)(x+1) \le 0$

$x = 3$, $x = -3$, $x = 1$, $x = -1$



Ответ: $[-3;-1]\cup[1;3]$.

5.16. Решите неравенство: $(x^2+x+3)(x^2+x+4)<12$.

Решение:

Введем новую переменную: $t=x^2+x+3$, тогда неравенство можно переписать в виде:

$t(t+1)<12$

$t^2+t-12<0$

Корни многочлена (t^2+t-12): $t_1=-4$, $t_2=3$.

$(t+4)(t-3)<0$

$\underbrace{(x^2+x+7)}_{D<0}(x^2+x)<0$

$x^2+x<0$

$x(x+1)<0$



Ответ: $x\in(-1;0)$.

Решение дробно-рациональных неравенств

Рассмотрим неравенства вида $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}\vee 0$, где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ - многочлены степеней n и m соответственно. Такие неравенства называют дробно-рациональными.

Стандартный метод решения дробно-рациональных неравенств, например, неравенства вида $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \geq 0$, состоит в использовании равносильного перехода:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} P_n(x) \geq 0, \\ Q_m(x) > 0; \end{cases} \\ \begin{cases} P_n(x) \leq 0, \\ Q_m(x) < 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Применение метода интервалов для решения неравенств такого вида позволяет значительно сократить объем вычислительной работы по сравнению со стандартным методом равносильного перехода, особенно в тех случаях, когда степени числителя и знаменателя не ниже второй.

Решение дробно-рациональных неравенств ***методом интервалов*** заключается в следующем:

1) Привести неравенство к стандартному виду.

Рациональную функцию $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ будем называть стандартной, если ее числитель $P_n(x)$ и знаменатель $Q_m(x)$ разложены на простые (быть может, кратные) множители, причем старшие коэффициенты всех множителей положительны.

2) Отметить на числовой оси корни числителя и знаменателя.

Для решения нестрогого неравенства корни числителя отмечаются на числовой оси закрашенными кружками, если данный корень не является одновременно и корнем знаменателя.

Корни знаменателя отмечаются пустыми кружками.

3) Кривая знаков - удобная интерпретация интервалов знакопостоянства функции $R(x)$.

Она чертится справа налево, начинаясь над осью Ox, и проходит через все корни $P_n(x)$ и $Q_m(x)$.

При этом:

- если кратность какого-либо корня нечетная, то кривая знаков пересекает ось Ox, то есть функция $R(x)$ меняет знак на противоположный;

- если кратность какого-либо корня четная, то кривая знаков остается по одну сторону от оси Ox, то есть функция $R(x)$ сохраняет знак.

4) Выбрать промежутки, служащие решением данного неравенства:

- если неравенство строгое, ответ состоит только из интервалов;

- если неравенство нестрогое, в ответ включают корни числителя, не являющиеся корнями знаменателя, и отдельные точки – точки возврата, соответствующие корням числителя.

Рассмотрим применение метода интервалов на следующих примерах.

5.17. Решите неравенства:

1) $\dfrac{(x-1)(x+2)^2}{(-1-x)^5}<0$

2) $\dfrac{(1-2x)^3(3-2x)^4}{(2x-5)^5}\le 0$

3) $\dfrac{x^2-4x-12}{x-2}\le 0$

4) $\dfrac{x^2+x-2}{x^2-4x+3}\le 0$

5) $\dfrac{x^3-3x^2-x+3}{x^2+3x+2}>0$

6) $\dfrac{3x^3-x^4+4x^2}{x^2+x+2}>0$

7) $\dfrac{x^2-36}{x^2-9x+18}\le 0$

8) $\dfrac{x^4-2x^2-8}{x^2+2x+1}<0$

9) $\dfrac{x^4-4x^3+4x^2}{(x+4)^5(5-x)^3}\le 0$

Решение:

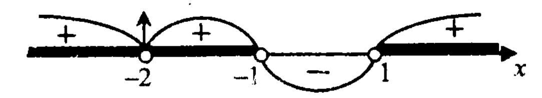
1) $\dfrac{(x-1)(x+2)^2}{(-1-x)^5}<0$

$$\frac{(x-1)(x+2)^2}{(-(1+x))^5}<0$$

$$\frac{(x-1)(x+2)^2}{(x+1)^5}>0$$

Корни числителя: $x=1$, $x=-2^{(2)}$;

корни знаменателя: $x=-1^{(5)}$.



Ответ: $x\in(-\infty;-2)\cup(-2;-1)\cup(1;\infty)$.

2) $$\frac{(1-2x)^3(3-2x)^4}{(2x-5)^5}\le 0$$

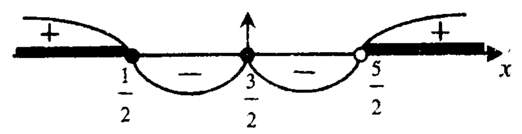
$$\frac{(-(2x-1))^3(-(2x-3))^4}{(2x-5)^5}\le 0$$

$$\frac{-(2x-1)^3(2x-3)^4}{(2x-5)^5}\le 0$$

$$\frac{(2x-1)^3(2x-3)^4}{(2x-5)^5}\ge 0$$

Корни числителя: $x=\frac{1}{2}$, $x=\frac{3}{2}^{(4)}$;

корни знаменателя: $x=\frac{5}{2}^{(5)}$.



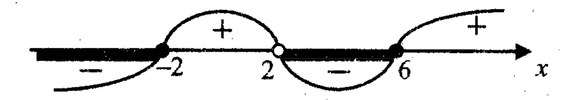
Ответ: $x\in(-\infty;0{,}5]\cup\{1{,}5\}\cup(2{,}5;\infty)$.

3) $\dfrac{x^2-4x-12}{x-2} \le 0$

$\dfrac{(x-6)(x+2)}{x-2} \le 0$

Корни числителя: $x=-2$, $x=6$;

корни знаменателя: $x=2$.



Ответ: $x \in (-\infty;-2] \cup (2;6]$.

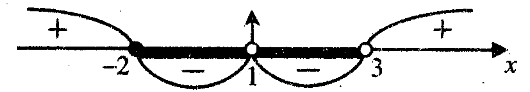
4) $\dfrac{x^2+x-2}{x^2-4x+3} \le 0$

$\dfrac{(x+2)(x-1)}{(x-3)(x-1)} \le 0$

В данном случае число $x=1$ является корнем числителя и корнем знаменателя, следовательно:

1) $x=1$ корень кратности два (точка возврата);

2) $x=1$ отмечается пустым кружком.



Ответ: $x \in [-2;1) \cup (1;3)$.

5) $\dfrac{x^3-3x^2-x+3}{x^2+3x+2} > 0$

Разложим числитель на множители:

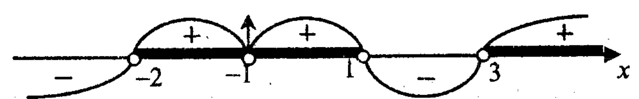
$x^3-3x^2-x+3=(x^3-3x^2)-(x-3)=x^2(x-3)-(x-3)=$

$=(x-3)(x^2-1)=(x-3)(x-1)(x+1)$

Получим неравенство:

$\dfrac{(x-3)(x-1)(x+1)}{(x+2)(x+1)} > 0$.

В данном случае $x = -1$ - корень кратности два.



Ответ: $x \in (-2; -1) \cup (-1; 1) \cup (3; \infty)$.

6) $\dfrac{3x^3 - x^4 + 4x^2}{x^2 + x + 2} > 0$

$\dfrac{x^4 - 3x^3 - 4x^2}{x^2 + x + 2} < 0$

$\dfrac{x^2(x^2 - 3x - 4)}{\underbrace{x^2 + x + 2}_{D<0}} < 0$

$x^2(x-4)(x+1) < 0$

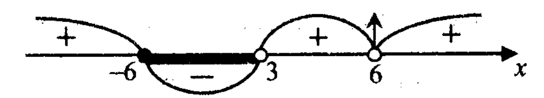


Ответ: $x \in (-1; 0) \cup (0; 4)$.

7) $\dfrac{x^2 - 36}{x^2 - 9x + 18} \le 0$.

$\dfrac{(x+6)(x-6)}{(x-3)(x-6)} \le 0$

В данном случае $x = 6$ - корень кратности два.



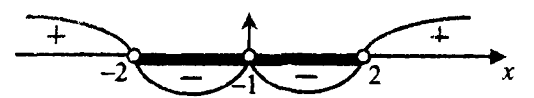
Ответ: $x \in [-6; 3)$.

8) $\dfrac{x^4 - 2x^2 - 8}{x^2 + 2x + 1} < 0$.

$$\frac{(x^2+2)(x^2-4)}{(x+1)^2}<0$$

Так как выражение (x^2+2) всегда больше нуля, исходное неравенство равносильно неравенству:

$$\frac{(x-2)(x+2)}{(x+1)^2}<0$$



Ответ: $x\in(-2;-1)\cup(-1;2)$.

9) $\dfrac{x^4-4x^3+4x^2}{(x+4)^5(5-x)^3}\le 0$.

$$\frac{x^2(x^2-4x+4)}{(x+4)^5(x-5)^3}\ge 0$$

$$\frac{x^2(x-2)^2}{(x+4)^5(x-5)^3}\ge 0$$

Ответ: $x\in(-\infty;-4)\cup\{0;2\}\cup(5;\infty)$.

При решении дробно-рациональных неравенств вида $\dfrac{P_{n_1}(x)}{Q_{m_1}(x)}\vee\dfrac{P_{n_2}(x)}{Q_{m_2}(x)}$ следует помнить, что если знак общего знаменателя дробей неизвестен, то **не имеем права** на него умножать обе части данного неравенства.

Надо перенести $\frac{P_{n_2}(x)}{Q_{m_2}(x)}$ в левую часть неравенства и привести слагаемые к общему знаменателю.

Полученное неравенство:

$$\frac{P_{n_1}(x)\cdot Q_{m_2}(x)-P_{n_2}(x)\cdot Q_{m_1}(x)}{Q_{m_1}(x)\cdot Q_{m_2}(x)}\vee 0$$

следует решать методом интервалов.

5.18. Решите неравенства:

1) $x>\frac{15}{x+2}$

2) $\frac{2}{x^3}-\frac{3}{x^2}-\frac{5}{x}>0$

3) $x\le 3-\frac{1}{x-1}$

4) $\frac{x^2-3x+24}{x^2-3x+3}<4$

5) $\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\ge 1$

6) $\frac{3x^2+x-1}{x^2-6x-7}\le\frac{4x^2+3x-1}{(x+1)(x-7)}$

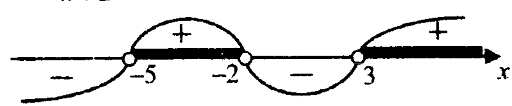
Решение:

1) $x>\frac{15}{x+2}$

$$x-\frac{15}{x+2}>0$$

$$\frac{x^2+2x-15}{x+2}>0$$

$$\frac{(x+5)(x-3)}{x+2}>0$$



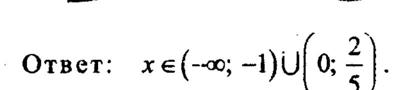
Ответ: $x\in(-5;-2)\cup(3;\infty)$.

2) $\frac{2}{x^3}-\frac{3}{x^2}-\frac{5}{x}>0$

$$\frac{2-3x-5x^2}{x^3}>0$$

$$\frac{5x^2+3x-2}{x^3}<0$$

$$\frac{(5x-2)(x+1)}{x^3}<0$$



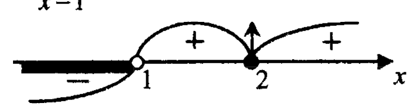
Ответ: $x\in(-\infty;\,-1)\cup\left(0;\,\frac{2}{5}\right)$.

3) $x\le 3-\frac{1}{x-1}$

$$x-3+\frac{1}{x-1}\le 0$$

$$\frac{x^2-4x+4}{x-1}\le 0$$

$$\frac{(x-2)^2}{x-1}\le 0$$



Ответ: $x\in(-\infty;\,1)\cup\{2\}$.

4) $\frac{x^2-3x+24}{x^2-3x+3}<4$

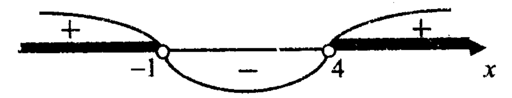
$$4-\frac{x^2-3x+24}{x^2-3x+3}>0$$

$$\frac{3x^2-9x-12}{x^2-3x+3}>0$$

$$\frac{x^2-3x-4}{x^2-3x+3}>0$$

$$\frac{(x-4)(x+1)}{\underbrace{x^2-3x+3}_{D<0}}>0$$

$$(x-4)(x+1)>0$$



Ответ: $x\in(-\infty;-1)\cup(4;\infty)$.

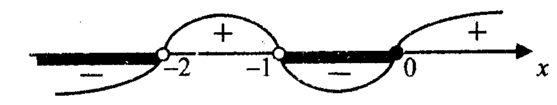
5) $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\geq 1$

$$\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}-1\geq 0$$

$$\frac{x^2-3x+2-(x^2+3x+2)}{x^2+3x+2}\geq 0$$

$$\frac{-6x}{x^2+3x+2}\geq 0$$

$$\frac{6x}{(x+2)(x+1)}\leq 0$$



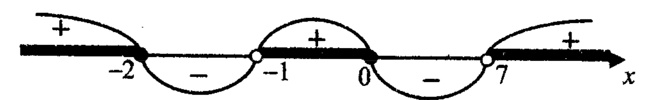
Ответ: $x\in(-\infty;-2)\cup(-1;0]$.

6) $\dfrac{3x^2+x-1}{x^2-6x-7}\leq\dfrac{4x^2+3x-1}{(x+1)(x-7)}$

$$\frac{3x^2+x-1}{(x+1)(x-7)}\leq\frac{4x^2+3x-1}{(x+1)(x-7)}$$

$$\frac{x^2+2x}{(x+1)(x-7)}\geq 0$$

$$\frac{x(x+2)}{(x+1)(x-7)} \geq 0$$



Ответ: $x \in (-\infty;\ -2] \cup (-1;\ 0] \cup (7;\ \infty)$.

5.19. Решите неравенства:

1) $\left(\frac{x+1}{4-x}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$

2) $\frac{(x+5)(3x^2-3x+1)}{x^2-6x+9} > \frac{(x+5)(x^2+2x-1)}{x^2-6x+9}$

3) $\frac{(x^2-5x-6)(3x^2-2x-1)}{5-x} \leq \frac{(x^2-5x-6)(2+2x-4x^2)}{5-x}$

4) $\frac{(x+3)^2(x^2+x+1)}{x^2+x+1} \leq 1$

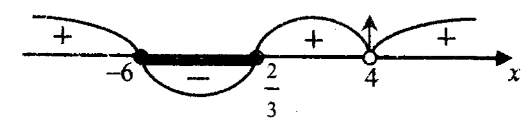
5) $\frac{1}{x+1} - \frac{2}{x^2-x+1} \leq \frac{1-2x}{1+x^3}$

Решение:

1) $\left(\frac{x+1}{x-4}\right)^2 - \frac{1}{4} \leq 0$

$$\left(\frac{x+1}{x-4} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{x+1}{x-4} + \frac{1}{2}\right) \leq 0$$

$$\frac{(x+6)(3x-2)}{4(x-4)^2} \leq 0$$



Ответ: $x \in \left[-6;\ \frac{2}{3}\right]$.

2) $\dfrac{(x+5)(3x^2-3x+1)}{x^2-6x+9} > \dfrac{(x+5)(x^2+2x-1)}{x^2-6x+9}$

$$\frac{(x+5)(3x^2-3x+1)}{x^2-6x+9} - \frac{(x+5)(x^2+2x-1)}{x^2-6x+9} > 0$$

$$\frac{(x+5)}{x^2-6x+9}\cdot(3x^2-3x+1-x^2-2x+1) > 0$$

$$\frac{(x+5)(2x^2-5x+2)}{x^2-6x+9} > 0$$

$$\frac{(x+5)(2x-1)(x-2)}{(x-3)^2} > 0$$

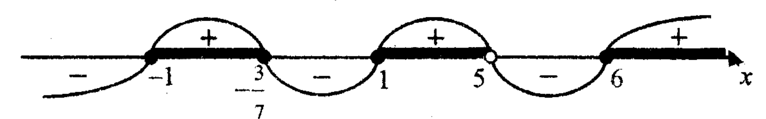
Ответ: $x \in \left(-5;\ \frac{1}{2}\right) \cup (2;\ 3) \cup (3;\ \infty)$.

3) $\dfrac{(x^2-5x-6)(3x^2-2x-1)}{5-x} \le \dfrac{(x^2-5x-6)(2+2x-4x^2)}{5-x}$

$$\frac{x^2-5x-6}{5-x}(3x^2-2x-1-2-2x+4x^2) \le 0$$

$$\frac{(x^2-5x-6)(7x^2-4x-3)}{x-5} \ge 0$$

$$\frac{7(x-6)(x+1)(x-1)\left(x+\frac{3}{7}\right)}{x-5} \ge 0$$



Ответ: $x \in \left[-1;\ -\frac{3}{7}\right] \cup [1;\ 5) \cup [6;\ \infty)$.

4) $\dfrac{(x+3)^2(x^2+x+1)}{x^2+x+1} \le 1$

В данном случае $x^2+x+1>0$, поэтому исходное неравенство равносильно следующему неравенству:

$(x+3)^2 \le 1$

$(x+3)^2 - 1 \le 0$

$(x+2)(x+4) \le 0$

+ − + ; −4, −2, x

Ответ: $x \in [-4;\ -2]$.

5) $\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{2}{x^2-x+1} \le \dfrac{1-2x}{1+x^3}$

$\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{2}{x^2-x+1} - \dfrac{1-2x}{(x+1)(x^2-x+1)} \le 0$

$\dfrac{x^2-x+1-2x-2-1+2x}{(x+1)(x^2-x+1)} \le 0$

$\dfrac{x^2-x-2}{(x+1)(x^2-x+1)} \le 0$

$\dfrac{(x+1)(x-2)}{(x+1)\underbrace{(x^2-x+1)}_{D<0}} \le 0$

− − + ; −1, 2, x

Ответ: $x \in (-\infty;\ -1) \cup (-1;\ 2]$.

5.20. Решите неравенство: $\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\le\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-2}$.

Решение:

$$\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\le\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-2}$$

$$\frac{-1}{(x+1)x}\le\frac{-1}{(x-1)(x-2)}$$

$$\frac{4x-2}{x(x+1)(x-1)(x-2)}\le 0$$

Ответ: $x\in(-\infty;-1)\cup\left(0;\frac{1}{2}\right]\cup(1;2)$.

Распространенный прием решения более сложных неравенств – замена переменных.

5.21. Решите неравенство: $\frac{1}{x-1}-\frac{4}{x-2}+\frac{4}{x-3}-\frac{1}{x-4}<\frac{1}{30}$.

Решение:

$$\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-4}\right)-\left(\frac{4}{x-2}-\frac{4}{x-3}\right)<\frac{1}{30}$$

$$\frac{-3}{(x-1)(x-4)}+\frac{4}{(x-2)(x-3)}<\frac{1}{30}$$

$$\frac{4}{x^2-5x+6}-\frac{3}{x^2-5x+4}<\frac{1}{30}$$

Замена: $x^2-5x+4=t$.

$$\frac{4}{t+2}-\frac{3}{t}-\frac{1}{30}<0$$

$$\frac{t^2-28t+180}{30t(t+2)}>0$$

$$\frac{(t-10)(t-18)}{30t(t+2)}>0$$

$$\frac{(x^2-5x-6)(x^2-5x-14)}{(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)}>0$$

$$\frac{(x-6)(x+1)(x-7)(x+2)}{(x-4)(x-1)(x-2)(x-3)}>0$$

Ответ: $x\in(-\infty;-2)\cup(-1;1)\cup(2;3)\cup(4;6)\cup(7;\infty)$.

Решение систем и совокупностей рациональных неравенств

Умение решать системы и совокупности неравенств требуется не только в заданиях, которые начинаются словами «решите систему ...». Чаще решение одного неравенства (например, иррационального, логарифмического, с модулем) сводится к решению равносильных им совокупностей или систем неравенств.

Решение систем неравенств

Если ставится задача найти множество общих решений двух или нескольких неравенств, то говорят, что требуется решить систему неравенств.

Для определения искомого множества решений находим решение каждого неравенства отдельно и отмечаем его на числовой оси.

Целесообразно при этом решение каждого неравенства отмечать на различных числовых осях, соблюдая упорядоченность значений. Затем находим **пересечение** полученных множеств.

Рассмотрим на примерах основные случаи, которые получаются при решении систем неравенств.

Предварительно отметим следующие теоремы:

1) Если $a_1 > a_2 > \ldots > a_n$, то

$$\begin{cases} x > a_1 \\ x > a_2 \\ \ldots \\ x > a_n \end{cases} \Leftrightarrow \quad x > a_1$$

2) Если $b_1 > b_2 > \ldots > b_n$, то

$$\begin{cases} x < b_1 \\ x < b_2 \\ \ldots \\ x < b_n \end{cases} \Leftrightarrow \quad x < b_n$$

5.22. Решите систему неравенств: $\begin{cases} 3x-4<8x+6, \\ 2x-1>5x-4, \\ 11x-9\le 15x+3. \end{cases}$

Решение:

Решим каждое неравенство системы:

$$\begin{cases} 3x-4<8x+6, \\ 2x-1>5x-4, \\ 11x-9\le 15x+3; \end{cases} \quad \begin{cases} 5x>-10, \\ 3x<3, \\ 4x\ge -12; \end{cases} \quad \begin{cases} x>-2, \\ x<1, \\ x\ge -3; \end{cases} \quad \begin{cases} x>-2, \\ x<1. \end{cases}$$

Ответ: $x \in (-2;1)$.

5.23. Найдите наименьшее целое решение системы неравенств:

$$\begin{cases} \frac{7-x}{2}-3<\frac{3+4x}{5}-4, \\ \frac{5}{3}x+5(4-x)<2(4-x). \end{cases}$$

Решение:

$$\begin{cases} \dfrac{7-x}{2}-3<\dfrac{3+4x}{5}-4, & \Big| \cdot 10 \\ \dfrac{5}{3}x+5(4-x)<2(4-x); & \Big| \cdot 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 35-5x-30<6+8x-40, \\ 5x+60-15x<24-6x; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 13x>39, \\ 4x>36; \end{cases} \qquad \begin{cases} x>3, \\ x>9; \end{cases} \qquad x>9.$$

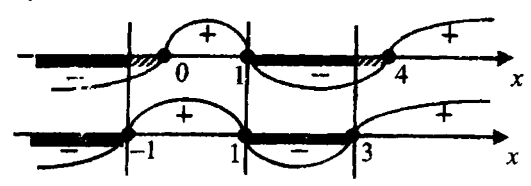
Наименьшим целым решением из промежутка $(9;\infty)$ будет число 10.

Ответ: 10.

5.24. Решите систему неравенств: $\begin{cases} (x^2-4x)(x-1)\le 0, \\ (x^2-1)(3-x)\ge 0. \end{cases}$

Решение:

$$\begin{cases} x(x-1)(x-4)\le 0, \\ (x+1)(x-1)(x-3)\le 0. \end{cases}$$

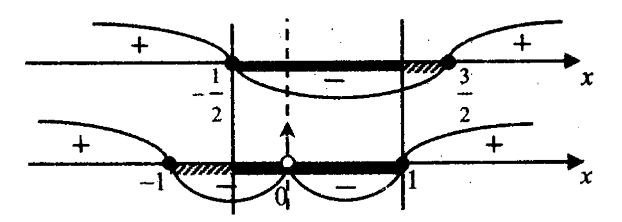


Ответ: $x\in(-\infty;\,-1]\cup[1;\,3]$.

5.25. Решите систему неравенств: $\begin{cases} 4x^2-4x-3\le 0, \\ \dfrac{1}{x^2}\ge 1. \end{cases}$

Решение:

$$\begin{cases} 4x^2-4x-3\le 0, \\ 1-\dfrac{1}{x^2}\le 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x^2-4x-3\le 0, \\ \dfrac{x^2-1}{x^2}\le 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} (2x+1)(2x-3)\le 0, \\ \dfrac{(x-1)(x+1)}{x^2}\le 0. \end{cases}$$



Ответ: $x \in \left[-\frac{1}{2}; 0\right) \cup (0; 1]$.

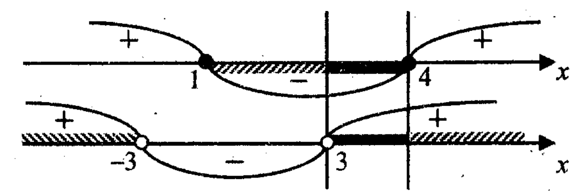
5.26. Решите систему неравенств: $\begin{cases} \dfrac{x^2-5x+4}{x^2-x+1} \le 0, \\ x^2 > 9. \end{cases}$

Решение:

Рассмотрим уравнение $x^2 - x + 1 = 0$.

Поскольку $D < 0$, уравнение решений не имеет, систему можно переписать в виде:

$\begin{cases} x^2-5x+4 \le 0, \\ x^2-9 > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} (x-4)(x-1) \le 0, \\ (x-3)(x+3) > 0. \end{cases}$



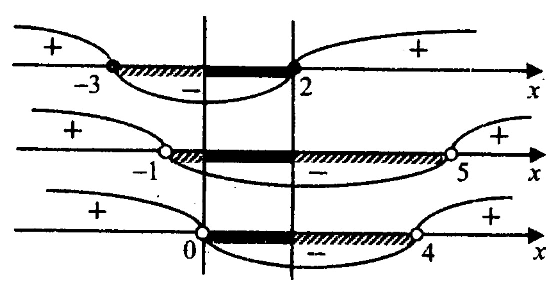
Ответ: $x \in (3; 4]$.

5.27. Найдите сумму целых решений системы неравенств:

$$\begin{cases} x^2 + x - 6 \le 0, \\ (x+1)(5-x) > 0, \\ \dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

Решение:

$$\begin{cases} x^2+x-6\le 0, \\ (x+1)(5-x)>0, \\ \dfrac{1}{x}>\dfrac{1}{4}; \end{cases} \qquad \begin{cases} (x+3)(x-2)\le 0, \\ (x+1)(x-5)<0, \\ \dfrac{x-4}{4x}<0. \end{cases}$$



$x\in(0;2]$.

Целыми решениями неравенства будут числа 1 и 2.

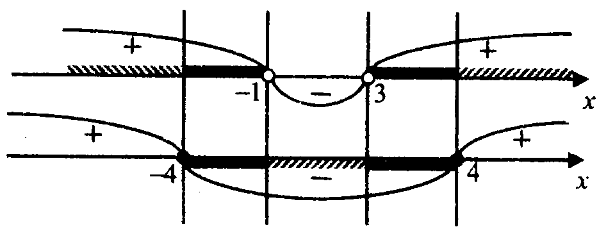
В ответе укажем их сумму.

Ответ: 3.

5.28. Решите систему неравенств: $\begin{cases} \dfrac{(x-3)^2}{(x-3)(x+1)}\ge 0, \\ (x-4)(x+4)\le 0. \end{cases}$

Решение:

Точка $x=3$ «выколота», так как множитель $(x-3)$ присутствует и в знаменателе дроби.



Ответ: $x\in[-4;-1)\cup(3;4]$.

5.29. Решите неравенства:

1) $-1 \le x^2 + x < 12$ 2) $1 \le \dfrac{2-x}{x+1} \le 2$ 3) $5x - 20 \le x^2 \le 8x$

Решение:

1) $-1 \le x^2 + x < 12$

Решить двойное неравенство – значит, решить соответствующую ему систему неравенств:

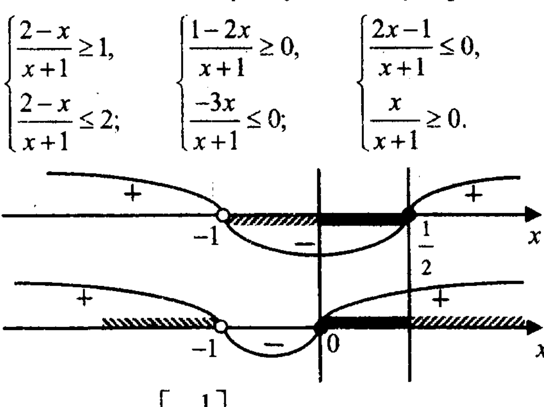
$$\begin{cases} x^2 + x \ge -1, \\ x^2 + x < 12; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + x + 1 \ge 0, \\ x^2 + x - 12 < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \in \mathbb{R}, \\ (x+4)(x-3) < 0. \end{cases}$$

Ответ: $x \in (-4; 3)$.

2) $1 \le \dfrac{2-x}{x+1} \le 2$

Запишем соответствующую систему неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{2-x}{x+1} \ge 1, \\ \dfrac{2-x}{x+1} \le 2; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{1-2x}{x+1} \ge 0, \\ \dfrac{-3x}{x+1} \le 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{2x-1}{x+1} \le 0, \\ \dfrac{x}{x+1} \ge 0. \end{cases}$$



Ответ: $x \in \left[0; \dfrac{1}{2}\right]$.

3) $5x-20\le x^2\le 8x$

$$\begin{cases} x^2\ge 5x-20, \\ x^2\le 8x; \end{cases} \quad \begin{cases} \underbrace{x^2-5x+20}_{D<0}\ge 0, \\ x^2-8x\le 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x\in\mathbb{R}, \\ x(x-8)\le 0; \end{cases}$$

$x\in[0;\,8]$

Ответ: $x\in[0;\,8]$.

Решение совокупностей неравенств

Если ставится задача найти множество всех значений, являющихся решением хотя бы одного из данных неравенств, то говорят, что надо решить совокупность неравенств.

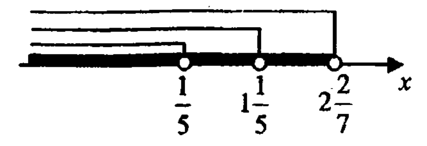
Множество решений совокупности неравенств есть **объединение** множеств решений входящих в нее неравенств.

5.30. Решите совокупность неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} 3x-1<\dfrac{x}{2}+2, \\ 2x-3<\dfrac{x}{4}+1, \\ 3-x>2+4x. \end{array}\right.$$

Решение:

$$\left[\begin{array}{l} 3x-1<\dfrac{x}{2}+2, \\ 2x-3<\dfrac{x}{4}+1, \\ 3-x>2+4x; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \dfrac{5x-6}{2}<0, \\ \dfrac{7x-16}{4}<0, \\ 5x-1<0; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x<\dfrac{6}{5}, \\ x<\dfrac{16}{7}, \\ x<\dfrac{1}{5}. \end{array}\right.$$

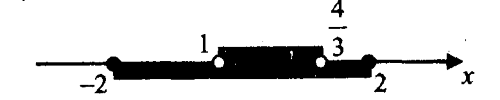


Ответ: $x\in\left(-\infty;\,2\dfrac{2}{7}\right)$.

5.31. Решите совокупность неравенств: $\left[\begin{array}{l}3x^2-7x+4<0,\\ x^2-4\le 0.\end{array}\right.$

Решение:

$\left[\begin{array}{l}3x^2-7x+4<0,\\ x^2-4\le 0;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}3(x-1)\left(x-\frac{4}{3}\right)<0,\\ (x+2)(x-2)\le 0;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x\in\left(1;\ \frac{4}{3}\right),\\ x\in[-2;\ 2].\end{array}\right.$



$x\in[-2;\ 2]$

Ответ: $x\in[-2;\ 2]$.

5.32. Решите совокупность неравенств:

$$\left[\begin{array}{l}(2-x)^3(3x+1)(x-3)(1-x)^2>0,\\ (3x-4)(x-4)<0,\\ x(x+1)(x-5)<0.\end{array}\right.$$

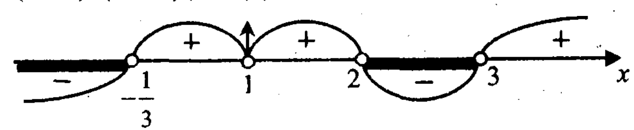
Решение:

Найдем решение каждого неравенства совокупности в отдельности:

1) $(2-x)^3(3x+1)(x-3)(1-x)^2>0$

$(-(x-2))^3(3x+1)(x-3)(-(x-1))^2>0$

$(x-2)^3(3x+1)(x-3)(x-1)^2<0$

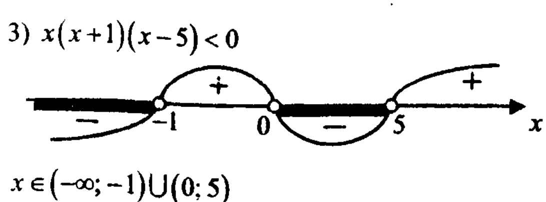


$x\in\left(-\infty;\ -\frac{1}{3}\right)\cup(2;\ 3)$

2) $(3x-4)(x-4)<0$

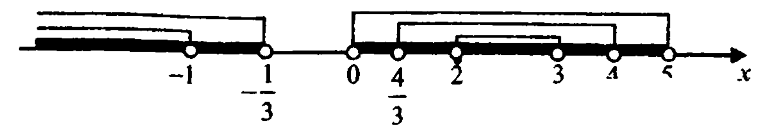
$x\in\left(\frac{4}{3};4\right)$

3) $x(x+1)(x-5)<0$



$x\in(-\infty;-1)\cup(0;5)$

Решение совокупности (объединение промежутков) определяем из рисунка, на котором отмечены решения всех трех неравенств.



Ответ: $x\in\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)\cup(0;5)$.

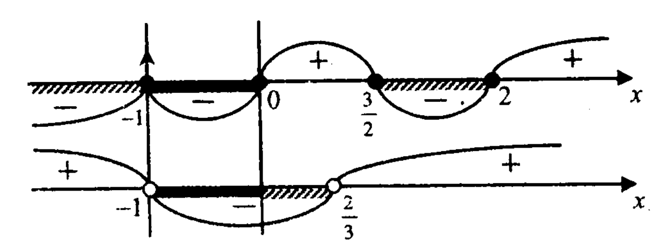
5.33. Решите конструкцию неравенств:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x(x-2)^3(x+1)^2(2x-3)\le 0,\\(2-3x)(x+1)>0,\end{cases}\\(x+1)(3x-4)(2-x)<0.\end{array}\right.$$

Решение:

Найдем решение каждого компонента совокупности:

1) $\begin{cases}x(x-2)^3(x+1)^2(2x-3)\le 0,\\(2-3x)(x+1)>0;\end{cases}$ $\begin{cases}x(x-2)^3(x+1)^2(2x-3)\le 0,\\(3x-2)(x+1)<0.\end{cases}$



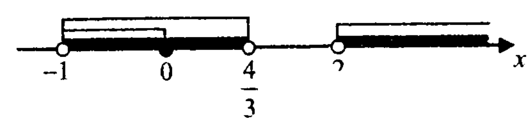
$x \in (-1; 0]$

2) $(x+1)(3x-4)(2-x) < 0$

$(x+1)(3x-4)(x-2) > 0$

$x \in \left(-1; \dfrac{4}{3}\right) \cup (2; \infty)$

Объединим найденные решения:

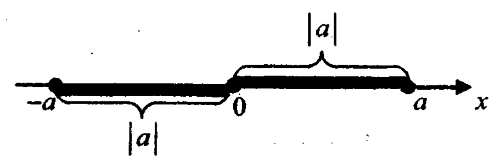


Ответ: $x \in \left(-1; \dfrac{4}{3}\right) \cup (2; \infty)$.

§6. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННОЙ ПОД ЗНАКОМ МОДУЛЯ

По определению: $|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0 \\ -a, & \text{если } a < 0 \end{cases}$

Геометрически $|a|$ означает расстояние от точки, изображающей число a на числовой прямой, до точки, изображающей начало отсчета O на числовой прямой.



$|a-b|$ есть расстояние от точки a до точки b на числовой прямой.

***Некоторые свойства модуля*:**

1) $|a| \geq 0$

2) $|a| = |-a|$

3) $|a|^2 = a^2$

4) $|a-b| = |b-a|$

При решении уравнений, содержащих знак абсолютной величины (знак модуля), как правило, используют следующие основные методы:

- сведение исходного уравнения к <u>равносильному</u> уравнению, системе или совокупности уравнений;
- метод, основанный на раскрытии модуля по определению;
- введение новой переменной;
- метод промежутков.

Рассмотрим каждый из этих методов на примерах.

Метод сведения исходного уравнения к равносильному уравнению, системе или совокупности уравнений

	Уравнение	Равносильный переход	
		Простейшее уравнение	
1)	$\lvert f(x)\rvert = b$ $(b>0)$	$\left[\begin{array}{l} f(x)=b, \\ f(x)=-b. \end{array}\right.$	
2)	$\lvert f(x)\rvert = \lvert g(x)\rvert$	$\left[\begin{array}{l} f(x)=g(x), \\ f(x)=-g(x). \end{array}\right.$ **или** $f^2(x)=g^2(x)$	
		Метод, основанный на неотрицательности правой части уравнения	
3)	$\lvert f(x)\rvert = g(x)$	$\begin{cases} g(x)\geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} f(x)=g(x), \\ f(x)=-g(x). \end{array}\right. \end{cases}$	Применяется в том случае, когда функция $g(x)$ проще, чем $f(x)$
		Метод, основанный на раскрытии модуля по определению	
4)	$\lvert f(x)\rvert = g(x)$	$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x)\geq 0, \\ f(x)=g(x); \end{cases} \\ \begin{cases} f(x)<0, \\ -f(x)=g(x). \end{cases} \end{array}\right.$	Применяется в том случае, когда функция $f(x)$ проще, чем $g(x)$
5)	$\lvert f(x)\rvert = f(x)$	$f(x)\geq 0$	
6)	$\lvert f(x)\rvert = -f(x)$	$f(x)\leq 0$	

1. Начнем с наиболее простого случая, когда уравнение имеет вид:

$$|f(x)| = b\,,\ b \in \mathbb{R}\,.$$

Если $b < 0$, то уравнение $|f(x)| = b$ не имеет корней.

Если $b = 0$, то $f(x) = 0$.

Если $b > 0$, то $|f(x)| = b$ равносильно совокупности уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} f(x) = b, \\ f(x) = -b. \end{array}\right.$$

6.1. Решите уравнение: $|x^2 - 2x - 4| = 4$.

Решение:

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - 2x - 4 = 4, \\ x^2 - 2x - 4 = -4; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x^2 - 2x - 8 = 0, \\ x^2 - 2x = 0; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x_1 = -2,\ \ x_2 = 4, \\ x_1 = \ 0,\ \ x_2 = 2. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{-2; 0; 2; 4\}$.

6.2. Решите уравнение: $\left|\log_{\frac{1}{2}}(1-x)\right| = 2$.

Решение:

ОДЗ: $1 - x > 0$; $x < 1$.

$$\left[\begin{array}{l} \log_{\frac{1}{2}}(1-x) = 2, \\ \log_{\frac{1}{2}}(1-x) = -2; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} 1 - x = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2, \\ 1 - x = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} 1 - x = \dfrac{1}{4}, \\ 1 - x = 4; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3}{4}, \\ x = -3. \end{array}\right.$$

Оба корня принадлежат области допустимых значений $(-\infty; 1)$.

Ответ: $\left\{-3; \dfrac{3}{4}\right\}$.

6.3. Решите уравнение: $\left|\dfrac{x-1}{x+3}\right| = 1$.

Решение:

ОДЗ: $x \neq -3$.

$$\left[\begin{array}{l}\frac{x-1}{x+3}=1,\\ \frac{x-1}{x+3}=-1;\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x-1=x+3,\\ x-1=-x-3;\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}-1\neq 3 \text{ (решений нет)},\\ x=-1.\end{array}\right.$$

Ответ: $x=-1$.

2. Рассмотрим решение уравнения вида $|f(x)|=|g(x)|$.

Модули двух чисел равны, если данные числа либо равны, либо являются противоположными.

Поэтому уравнение вида $|f(x)|=|g(x)|$ равносильно совокупности двух уравнений:

$$\left[\begin{array}{l}f(x)=g(x),\\ f(x)=-g(x).\end{array}\right.$$

или одному уравнению:

$$f^2(x)=g^2(x).$$

6.4. Решите уравнение: $|2x-3|=|x+4|$.

Решение:

$$\left[\begin{array}{l}2x-3=x+4,\\ 2x-3=-(x+4);\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x=7,\\ x=-\frac{1}{3}.\end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{-\frac{1}{3};\ 7\right\}$.

6.5. Решите уравнение: $|x^2-4x+5|=|x^2-2x-1|$.

Решение:

$$\left(x^2-4x+5\right)^2=\left(x^2-2x-1\right)^2$$

$$\left(x^2-4x+5\right)^2-\left(x^2-2x-1\right)^2=0$$

$$\left(x^2-4x+5-x^2+2x+1\right)\left(x^2-4x+5+x^2-2x-1\right)=0$$

$$(-2x+6)(2x^2-6x+4)=0$$

$$4(3-x)(x^2-3x+2)=0$$

$x_1=3$, $x_2=1$, $x_3=2$.

Ответ: $\{1;2;3\}$.

6.6. Решите уравнение: $|x^2-5x+7|=|2x-5|$.

Решение:

$$\left[\begin{array}{l}x^2-5x+7=2x-5,\\ x^2-5x+7=-(2x-5);\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x^2-7x+12=0,\\ x^2-3x+2=0;\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x_1=3,\ x_2=4,\\ x_1=1,\ x_2=2.\end{array}\right.$$

Ответ: $\{1;2;3;4\}$.

6.7. Решите уравнение: $\left|\dfrac{x-1}{2x+1}\right|=\left|\dfrac{2x+1}{x-1}\right|$.

Решение:

ОДЗ: $x\neq-\dfrac{1}{2}$, $x\neq1$.

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{x-1}{2x+1}=\dfrac{2x+1}{x-1},\\ \dfrac{x-1}{2x+1}=-\dfrac{2x+1}{x-1};\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\dfrac{(x-1)^2-(2x+1)^2}{(x-1)(2x+1)}=0,\\ \dfrac{(x-1)^2+(2x+1)^2}{(x-1)(2x+1)}=0;\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\dfrac{3x\cdot(-x-2)}{(x-1)(2x+1)}=0,\\ \dfrac{5x^2+2x+2}{(x-1)(2x+1)}=0;\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x_1=0,\ x_2=-2,\\ \text{решений нет.}\end{array}\right.$$

Ответ: $\{-2;0\}$.

3. *Метод, основанный на неотрицательности правой части уравнения*

Более сложным является случай, когда уравнение имеет вид:

$$|f(x)|=g(x).$$

Из определения модуля следует, что корни уравнения должны удовлетворять условию $g(x) \geq 0$.

При выполнении этого условия искомые корни уравнения должны также удовлетворять совокупности $f(x) = g(x)$ или $f(x) = -g(x)$.

Значит, уравнение $|f(x)| = g(x)$ равносильно системе:

$$\begin{cases} g(x) \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{array} \right. \end{cases}$$

6.8. Решите уравнение: $|x^2 - 4x + 3| = 2x - 5$.

Решение:

$$\begin{cases} 2x - 5 \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} x^2 - 4x + 3 = 2x - 5, \\ x^2 - 4x + 3 = -(2x - 5); \end{array} \right. \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 2{,}5, \\ \left[\begin{array}{l} x^2 - 6x + 8 = 0, \\ x^2 - 2x - 2 = 0; \end{array} \right. \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 2{,}5, \\ \left[\begin{array}{l} x_1 = 2, \quad x_2 = 4, \\ x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}. \end{array} \right. \end{cases}$$

Корни уравнения: $x_1 = 4$, $x_2 = 1 + \sqrt{3}$.

Ответ: $\{1 + \sqrt{3};\ 4\}$.

6.9. Решите уравнение: $9^{|3x-1|} = 3^{8x-2}$.

Решение:

$$3^{2|3x-1|} = 3^{2(4x-1)}$$

$$|3x - 1| = 4x - 1$$

$$\begin{cases} 4x - 1 \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} 3x - 1 = 4x - 1, \\ 3x - 1 = -(4x - 1); \end{array} \right. \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq \frac{1}{4}, \\ \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ 7x = 2; \end{array} \right. \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq \frac{1}{4}, \\ \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = \frac{2}{7}; \end{array} \right. \end{cases} \quad x = \frac{2}{7}.$$

Ответ: $x = \frac{2}{7}$.

6.10. Решите уравнение: $\left|6x^2+2x-2\right|=x-1$.

Решение:

Для решения данного уравнения применяется метод, основанный на неотрицательности правой части уравнения.

$$\begin{cases} x-1\ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} 6x^2+2x-2= \ \ x-1, \\ 6x^2+2x-2=-(x-1); \end{array}\right. \end{cases} \quad \begin{cases} x\ge 1, \\ \left[\begin{array}{l} 6x^2+x-1=0, \\ 6x^2+3x-3=0; \end{array}\right. \end{cases} \quad \begin{cases} x\ge 1, \\ \left[\begin{array}{l} x_1=-\dfrac{1}{2},\ x_2=\dfrac{1}{3}, \\ x_1=-1,\ x_2=\dfrac{1}{2}. \end{array}\right. \end{cases}$$

Решений нет.

Ответ: $x\in\varnothing$.

6.11. Решите уравнение: $\left|x^3-8x+4\right|=8x+4$.

Решение:

$$\begin{cases} 8x+4\ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} x^3-8x+4=8x+4, \\ x^3-8x+4=-8x-4; \end{array}\right. \end{cases} \quad \begin{cases} x\ge -\dfrac{1}{2}, \\ \left[\begin{array}{l} x^3-16x=0, \\ x^3+8=0; \end{array}\right. \end{cases} \quad \begin{cases} x\ge -\dfrac{1}{2}, \\ \left[\begin{array}{l} x(x-4)(x+4)=0, \\ (x+2)\left(x^2-2x+4\right)=0; \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\ge -\dfrac{1}{2}, \\ \left[\begin{array}{l} x_1=0,\ x_2=4,\ x_3=-4, \\ x_1=-2. \end{array}\right. \end{cases}$$

Корни уравнения: $x_1=0$, $x_2=4$.

Ответ: $\{0;\ 4\}$.

4. *Метод, основанный на раскрытии модуля по определению*

Один из распространенных приемов, которым пользуются при решении уравнений с переменной под знаком модуля, состоит в том, что освобождаются от знака модуля, выделяя промежутки, в которых выражение, записанное под знаком модуля, сохраняет знак.

Уравнение вида $|f(x)| = g(x)$ равносильно совокупности систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ f(x) = g(x); \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0, \\ -f(x) = g(x). \end{cases}\end{array}\right.$$

6.12. Решите уравнение: $x^2 - 4|x-3| - 2x - 7 = 0$.

Решение:

Данное уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x-3 \geq 0, \\ x^2 - 4(x-3) - 2x - 7 = 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x-3 < 0, \\ x^2 + 4(x-3) - 2x - 7 = 0; \end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x \geq 3, \\ x^2 - 6x + 5 = 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x < 3, \\ x^2 + 2x - 19 = 0; \end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x \geq 3, \\ x_1 = 1,\ x_2 = 5; \end{cases} \\ \begin{cases} x < 3, \\ x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{20}; \end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 5, \\ x = -1 - 2\sqrt{5}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{-1 - 2\sqrt{5};\ 5\right\}$.

6.13. Решите уравнение: $x^2 - \dfrac{x-3}{|x-3|} = 9$.

Решение:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x-3 > 0, \\ x^2 - \dfrac{x-3}{x-3} = 9; \end{cases} \\ \begin{cases} x-3 < 0, \\ x^2 + \dfrac{x-3}{x-3} = 9; \end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x > 3, \\ x^2 = 10; \end{cases} \\ \begin{cases} x < 3, \\ x^2 = 8; \end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x > 3, \\ x_{1,2} = \pm\sqrt{10}; \end{cases} \\ \begin{cases} x < 3, \\ x_{1,2} = \pm 2\sqrt{2}; \end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{10}, \\ x = \pm 2\sqrt{2}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{-2\sqrt{2};\ 2\sqrt{2};\ \sqrt{10}\right\}$.

6.14. Решите уравнение: $3x^2-5|x-2|-12=0$.

Решение:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-2\ge 0,\\3x^2-5(x-2)-12=0;\end{cases}\\\begin{cases}x-2<0,\\3x^2+5(x-2)-12=0;\end{cases}\end{array}\right.\quad\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 2,\\3x^2-5x-2=0;\end{cases}\\\begin{cases}x<2,\\3x^2+5x-22=0;\end{cases}\end{array}\right.\quad\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 2,\\x_1=-\frac{1}{3},\ x_2=2;\end{cases}\\\begin{cases}x<2,\\x_1=-\frac{11}{3},\ x_2=2;\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x=2,\\x=-\frac{11}{3}.\end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{-\frac{11}{3};\ 2\right\}$.

6.15. Решите уравнение: $|x+1|=-x^2-2x+5$.

Решение:

Для решения будем использовать раскрытие модуля по определению.

Исходное уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+1\ge 0,\\x+1=-x^2-2x+5;\end{cases}\\\begin{cases}x+1<0,\\-(x+1)=-x^2-2x+5;\end{cases}\end{array}\right.\quad\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge -1,\\x^2+3x-4=0;\end{cases}\\\begin{cases}x<-1,\\x^2+x-6=0;\end{cases}\end{array}\right.\quad\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge -1,\\x_1=-4,\ x_2=1;\end{cases}\\\begin{cases}x<-1,\\x_1=-3,\ x_2=2;\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x=1,\\x=-3.\end{array}\right.$$

Ответ: $\{-3;\ 1\}$.

6.16. Решите уравнение: $|x|\cdot\left(x^2-4\right)+3=0$.

Решение:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 0,\\ x\left(x^2-4\right)+3=0;\end{cases}\\ \begin{cases}x<0,\\ -x\left(x^2-4\right)+3=0;\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 0,\\ x^3-4x+3=0;\end{cases}\\ \begin{cases}x<0,\\ x^3-4x-3=0;\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 0,\\ x^3-x-3x+3=0;\end{cases}\\ \begin{cases}x<0,\\ x^3-x-3x-3=0;\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 0,\\ x(x-1)(x+1)-3(x-1)=0;\end{cases}\\ \begin{cases}x<0,\\ x(x-1)(x+1)-3(x+1)=0;\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 0,\\ (x-1)\left(x^2+x-3\right)=0;\end{cases}\\ \begin{cases}x<0,\\ (x+1)\left(x^2-x-3\right)=0;\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 0,\\ x_1=1,\ x_{2,3}=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2};\end{cases}\\ \begin{cases}x<0,\\ x_1=-1,\ x_{2,3}=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2};\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x_1=1,\ x_2=\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2},\\ x_1=-1,\ x_2=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}.\end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{\pm1;\ \dfrac{\sqrt{13}-1}{2};\ \dfrac{1-\sqrt{13}}{2}\right\}$.

Метод введения новой переменной

Рассмотрим уравнение вида $F\left(\left|f(x)\right|\right)=0$. Заменой $\left|f(x)\right|=t$ оно сводится к системе:

$$\begin{cases}F(t)=0,\\ t\ge 0.\end{cases}$$

В зависимости от вида функции $F(t)$ могут использоваться и другие подстановки.

6.17. Решите уравнение: $(x+2)^2 = 2|x+2|+3$.

Решение:

Так как $x^2 = |x^2| = |x|^2$, данное уравнение можно переписать в виде:

$|x+2|^2 = 2|x+2|+3$

Введем новую переменную: $t = |x+2|$ $(t \geq 0)$.

$t^2 - 2t - 3 = 0$

$t_1 = -1$ - посторонний корень

$t_2 = 3$

$|x+2| = 3$ $\left[\begin{array}{l} x+2=3, \\ x+2=-3; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=-5. \end{array}\right.$

Ответ: $\{-5; 1\}$.

6.18. Решите уравнение: $x^2 - 4x = |x-2|+2$.

Решение:

Выражение $(x^2 - 4x)$ дополним до полного квадрата:

$x^2 - 4x + 4 - 4 - |x-2| - 2 = 0$

$(x-2)^2 - |x-2| - 6 = 0$

$|x-2|^2 - |x-2| - 6 = 0$

Замена: $t = |x-2|$ $(t \geq 0)$.

$t^2 - t - 6 = 0$

$t_1 = -2$ - посторонний корень

$t_2 = 3$

$|x-2| = 3$ $\left[\begin{array}{l} x-2=3, \\ x-2=-3; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=5, \\ x=-1. \end{array}\right.$

Ответ: $\{-1; 5\}$.

6.19. Решите уравнение: $4x^2-2|2x-1|-34-4x=0$.

Решение:

$4x^2-4x+1-2|2x-1|-35=0$

$(2x-1)^2-2|2x-1|-35=0$

$|2x-1|^2-2|2x-1|-35=0$

Сделаем замену: $t=|2x-1|$ $(t\ge 0)$.

$t^2-2t-35=0$

$t_1=-5$ - посторонний корень

$t_2=7$

$|2x-1|=7$ $\left[\begin{array}{l}2x-1=7,\\ 2x-1=-7;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x=4,\\ x=-3.\end{array}\right.$

Ответ: $\{-3;\,4\}$.

6.20. Решите уравнение: $\dfrac{4}{|x+1|-2}=|x+1|$.

Решение:

Замена: $t=|x+1|$ $(t\ge 0,\ t\ne 2)$.

$\dfrac{4}{t-2}=t$

$t^2-2t-4=0$

$t_1=1-\sqrt{5}$ - посторонний корень

$t_2=1+\sqrt{5}$

$|x+1|=1+\sqrt{5}$ $\left[\begin{array}{l}x+1=1+\sqrt{5},\\ x+1=-1-\sqrt{5};\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x=\sqrt{5},\\ x=-2-\sqrt{5}.\end{array}\right.$

Ответ: $\{-2-\sqrt{5};\sqrt{5}\}$.

6.21. Решите уравнение: $\frac{|x|-2x^2}{x^2-4|x|-2}=1$.

Решение:

$$\frac{|x|-2|x|^2}{|x|^2-4|x|-2}=1$$

Замена: $t=|x|$ $(t\geq 0)$.

$$\frac{t-2t^2}{t^2-4t-2}=1$$

$$t-2t^2=t^2-4t-2$$

$$3t^2-5t-2=0$$

$t_1=-\frac{1}{3}$ - посторонний корень

$t_2=2$

$|x|=2$; $x=\pm 2$.

Ответ: $\{\pm 2\}$.

6.22. Решите уравнение: $\left(3|x+1|+\frac{1}{3}\right)^2=6(x+1)^2+\frac{10}{9}$.

Решение:

$$\left(3|x+1|+\frac{1}{3}\right)^2=6|x+1|^2+\frac{10}{9}$$

Замена: $t=|x+1|$ $(t\geq 0)$.

$$\left(3t+\frac{1}{3}\right)^2=6t^2+\frac{10}{9}$$

$$9t^2+2t+\frac{1}{9}=6t^2+\frac{10}{9}$$

$$3t^2+2t-1=0$$

$t_1=-1$ - посторонний корень

$t_2 = \frac{1}{3}$

$|x+1| = \frac{1}{3}$; $\left[\begin{array}{l} x+1 = \frac{1}{3}, \\ x+1 = -\frac{1}{3}; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = -\frac{2}{3}, \\ x = -\frac{4}{3}. \end{array}\right.$

Ответ: $\left\{-\frac{4}{3};\ -\frac{2}{3}\right\}$.

6.23. Решите уравнение: $\sqrt{|x|+1} - \sqrt{|x|} = 0{,}5$.

Решение:

Замена: $t = |x|$ $(t \geq 0)$.

Тогда исходное уравнение будет равносильно системе:

$\begin{cases} \sqrt{t+1} - \sqrt{t} = 0{,}5, \\ t \geq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} \sqrt{t+1} = \frac{1}{2} + \sqrt{t}, \\ t \geq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} t+1 = \frac{1}{4} + \sqrt{t} + t, \\ t \geq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} \sqrt{t} = \frac{3}{4}, \\ t \geq 0. \end{cases}$

$t = \frac{9}{16}$; $|x| = \frac{9}{16}$; $x = \pm\frac{9}{16}$.

Ответ: $\left\{\pm\frac{9}{16}\right\}$.

Метод промежутков

Данный метод заключается в следующем:

1) приравниваются к нулю выражения, стоящие под знаком модуля;

2) полученные значения откладываются на числовой прямой и, таким образом, числовая прямая разбивается на промежутки, на каждом из которых всякое подмодульное выражение либо положительно, либо отрицательно. Поэтому каждый из модулей может быть раскрыт или со знаком минус, или со знаком плюс;

3) решаются полученные уравнения в каждом из интервалов;

4) проверяются, принадлежат ли найденные решения уравнений рассматриваемым промежуткам:

- если принадлежат, их включают в ответ,
- если нет – отбрасывают.

На практике метод промежутков обычно применяется тогда, когда уравнение содержит более одного модуля.

Рассмотрим применение данного метода на конкретных примерах.

6.24. Решите уравнение: $|1-2x|+|3x+2|+|x|=5$.

Решение:

Найдем нули выражений, стоящих под знаком модуля:

$x=\frac{1}{2}$, $x=-\frac{2}{3}$, $x=0$.

Отметим полученные значения на числовой прямой и исследуем знаки подмодульных выражений на каждом из полученных промежутков:

		$-\frac{2}{3}$		0		$\frac{1}{2}$		x
$1-2x$	+		+		+		−	
$3x+2$	−		+		+		+	
x	−		−		+		+	

Решим заданное уравнение на каждом из полученных промежутков с учетом знаков выражений под модулем.

1) $x\in\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right)$ $1-2x-3x-2-x=5$ $-6x=6$ $x=-1\in\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right)$	**2)** $x\in\left[-\frac{2}{3};0\right)$ $1-2x+3x+2-x=5$ $3\neq 5$ На данном интервале корней нет
3) $x\in\left[0;\frac{1}{2}\right]$ $1-2x+3x+2+x=5$ $2x=2$ $x=1\notin\left[0;\frac{1}{2}\right]$ - посторонний корень	**4)** $x\in\left(\frac{1}{2};\infty\right)$ $-1+2x+3x+2+x=5$ $6x=4$ $x=\frac{2}{3}\in\left(\frac{1}{2};\infty\right)$

Получаем два решения уравнения: $x = -1$ или $x = \frac{2}{3}$.

Ответ: $\left\{-1; \frac{2}{3}\right\}$.

6.25. Решите уравнение: $|2x+5| - |3-x| = 0,5$.

Решение:

Приравняем к нулю выражения, стоящие под знаком модуля, отметим на числовой прямой полученные значения и исследуем заданное уравнение в каждом из полученных интервалов:

	$(-\infty; -2,5)$	$-2,5$	$(-2,5; 3)$	3	$(3; \infty)$	x
$2x+5$	$-$		$+$		$+$	
$3-x$	$+$		$+$		$-$	

1) $x \in (-\infty; -2,5)$	**2)** $x \in [-2,5; 3]$	**3)** $x \in (3; \infty)$
$-(2x+5)-(3-x)=0,5$	$(2x+5)-(3-x)=0,5$	$(2x+5)+(3-x)=0,5$
$-x-8=0,5$	$3x+2=0,5$	$x+8=0,5$
$x=-8,5 \in (-\infty; -2,5)$	$x=-0,5 \in [-2,5; 3]$	$x=-7,5 \notin (3; \infty)$

Ответ: $\{-8,5; -0,5\}$.

6.26. Решите уравнение: $|3x-5| - 2x = |x+2|$.

Решение:

Решаем методом промежутков.

	$(-\infty; -2)$	-2	$\left(-2; \frac{5}{3}\right)$	$\frac{5}{3}$	$\left(\frac{5}{3}; \infty\right)$	x
$3x-5$	$-$		$-$		$+$	
$x+2$	$-$		$+$		$+$	

1) $x \in (-\infty; -2)$	**2)** $x \in \left[-2; \frac{5}{3}\right]$	**3)** $x \in \left(\frac{5}{3}; \infty\right)$
$-(3x-5)-2x=-(x+2)$	$-(3x-5)-2x=x+2$	$(3x-5)-2x=x+2$
$-4x=-7$	$-6x=-3$	$-5 \neq 2$
$x=\frac{7}{4} \notin (-\infty; -2)$	$x=\frac{1}{2} \in \left[-2; \frac{5}{3}\right]$	корней нет

Решением исходного уравнения является $x=\frac{1}{2}$.

Ответ: $x=0,5$.

6.27. Решите уравнение: $\frac{x}{|x-3|-3|x+1|}=1$.

Решение:

Найдем значения переменной x, при которых обращаются в нуль выражения $(x-3)$ и $(x+1)$. Это точки $x=3$ и $x=-1$.

Они делят числовую ось на три интервала, на каждом из которых рассмотренные выражения сохраняют постоянный знак.

	$(-\infty;-1)$	$(-1;3)$	$(3;\infty)$
$x-3$	$-$	$-$	$+$
$x+1$	$-$	$+$	$+$

1) $x\in(-\infty;-1)$	2) $x\in[-1;3]$	3) $x\in(3;\infty)$
$\frac{x}{-(x-3)+3(x+1)}=1$	$\frac{x}{-(x-3)-3(x+1)}=1$	$\frac{x}{(x-3)-3(x+1)}=1$
$\frac{x}{2x+6}=1$	$\frac{x}{-4x}=1$	$\frac{x}{-2x-6}=1$
$x=-6\in(-\infty;-1)$	корней нет	$x=-2\notin(3;\infty)$

Ответ: $x=-6$.

6.28. Решите уравнение: $\frac{1}{|x|}+\frac{1}{|x-3|}=1$.

Решение:

	$(-\infty;0)$	$(0;3)$	$(3;\infty)$
x	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$+$

1) $x \in (-\infty; 0)$	2) $x \in (0; 3)$	3) $x \in (3; \infty)$
$\frac{1}{-x} + \frac{1}{-(x-3)} = 1$	$\frac{1}{x} + \frac{1}{-(x-3)} = 1$	$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-3} = 1$
$\frac{-2x+3}{x^2-3x} = 1$	$\frac{-3}{x^2-3x} = 1$	$\frac{2x-3}{x^2-3x} = 1$
$x^2 - x - 3 = 0$	$x^2 - 3x + 3 = 0$	$x^2 - 5x + 3 = 0$
$x_1 = \frac{1+\sqrt{13}}{2} \notin (-\infty; 0)$	корней нет	$x_1 = \frac{5+\sqrt{13}}{2} \in (3; \infty)$
$x_2 = \frac{1-\sqrt{13}}{2} \in (-\infty; 0)$		$x_2 = \frac{5-\sqrt{13}}{2} \notin (3; \infty)$

Ответ: $\left\{\frac{1-\sqrt{13}}{2}; \frac{5+\sqrt{13}}{2}\right\}$.

Дополнительные методы решения уравнений с переменной под знаком модуля

1. В некоторых случаях можно обойтись без раскрытия модуля. Прежде всего следует проанализировать структуру уравнения.

6.29. Решите уравнение: $|2x^2 + 3x - 5| + |x^2 - 1| \cdot (2x+5)^2 = 0$.

Решение:

Левая часть уравнения представляет собой сумму двух неотрицательных слагаемых, а правая часть – нуль.

В данном случае левая часть может быть равна нулю только, если каждое слагаемое равно нулю, следовательно, исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} 2x^2 + 3x - 5 = 0, \\ (x^2 - 1) \cdot (2x+5) = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 1, \; x_2 = -2{,}5, \\ x_1 = 1, \; x_2 = -1, \; x_3 = -2{,}5; \end{cases}$$

$x_1 = 1, \quad x_2 = -2{,}5$.

Ответ: $\{-2{,}5; \; 1\}$.

6.30. Решите уравнение: $\left|x^2-1\right|+\left|x^2+10x-11\right|=0$.

Решение:

$\begin{cases} x^2-1=0, \\ x^2+10x-11=0; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1=1, \ x_2=-1, \\ x_1=1, \ x_2=-11; \end{cases}$ $x=1$.

Ответ: $x=1$.

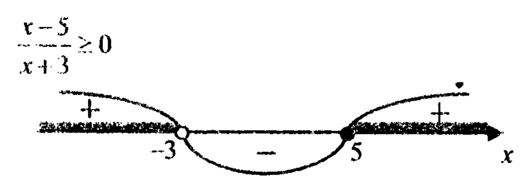
2. Рассмотрим уравнение вида $\left|f(x)\right|=f(x)$.

Данное уравнение представляет собой равенство $|a|=a$, которое по определению модуля, выполнено тогда и только тогда, когда $a\geq 0$.

6.31. Решите уравнение: $\left|\dfrac{x-5}{x+3}\right|=\dfrac{x-5}{x+3}$.

Решение:

$\dfrac{x-5}{x+3}\geq 0$



Ответ: $x\in(-\infty;-3)\cup[5;\infty)$.

6.32. Решите уравнение: $\left|6x^2-5x+1\right|=5x-6x^2-1$.

Решение:

$\left|6x^2-5x+1\right|=-\left(6x^2-5x+1\right)$

$6x^2-5x+1\leq 0$

$6\left(x-\dfrac{1}{3}\right)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\leq 0$



Ответ: $x\in\left[\dfrac{1}{3};\ \dfrac{1}{2}\right]$.

6.33. Решите уравнение: $|2x^2-3x+4|=|3x-2|+2x^2+2$.

Решение:

Так как дискриминант квадратного трехчлена $(2x^2-3x+4)$ отрицательный:

$|2x^2-3x+4|=2x^2-3x+4$

Тогда исходное уравнение перепишется как:

$2x^2-3x+4=|3x-2|+2x^2+2$

$|3x-2|=-3x+2$

$|3x-2|=-(3x-2)$

$3x-2\le 0$

$x\le\frac{2}{3}$.

Ответ: $x\in\left(-\infty;\ \frac{2}{3}\right]$.

3. При решении уравнения, в котором под знаком модуля находится выражение, также содержащее модуль, следует сначала освободиться от внутреннего модуля, а затем в полученных уравнениях раскрыть оставшиеся модули.

6.34. Решите уравнение: $\left|x-|4-x|\right|-2x=4$.

Решение:

Данное уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{cases}4-x\ge 0,\\ |x-4+x|-2x=4;\end{cases}\right.\ \ \begin{cases}4-x<0,\\ |x+4-x|-2x=4;\end{cases}\quad \left[\begin{cases}x\le 4,\\ |2x-4|-2x=4;\end{cases}\right.\ \ \begin{cases}x>4,\\ |4|-2x=4;\end{cases}\quad \left[\begin{cases}x\le 4,\\ |2x-4|=2x+4;\end{cases}\right.\ \ \begin{cases}x>4,\\ 2x=0.\end{cases}$$

Очевидно, что вторая система $\begin{cases}x>4,\\ 2x=0\end{cases}$ решений не имеет.

Рассмотрим первую систему $\begin{cases} x \le 4, \\ |2x-4| = 2x+4. \end{cases}$

Она равносильна системе:

$$\begin{cases} x \le 4, \\ 4+2x \ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} 2x-4 = 2x+4, \\ 2x-4 = -(2x+4); \end{array}\right. \end{cases} \quad \begin{cases} x \le 4, \\ x \ge -2, \\ \left[\begin{array}{l} -4 \ne 4, \\ 4x = 0; \end{array}\right. \end{cases} \quad \begin{cases} x \le 4, \\ x \ge -2, \\ x = 0. \end{cases}$$

Таким образом, получаем единственное решение: $x = 0$.

Ответ: $x = 0$.

6.35. Решите уравнение: $\left||2x-3| - x\right| = 6$.

Решение:

Данное уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x-3 \ge 0, \\ |2x-3-x| = 6; \end{cases} \\ \begin{cases} 2x-3 < 0, \\ |-2x+3-x| = 6; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 1,5, \\ |x-3| = 6; \end{cases} \\ \begin{cases} x < 1,5, \\ |-3x+3| = 6; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 1,5, \\ \left[\begin{array}{l} x-3 = 6, \\ x-3 = -6; \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} x < 1,5, \\ \left[\begin{array}{l} 3-3x = 6, \\ 3-3x = -6; \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 1,5, \\ \left[\begin{array}{l} x = 9, \\ x = -3; \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} x < 1,5, \\ \left[\begin{array}{l} x = -1, \\ x = 3; \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 9, \\ x = -1. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{-1; 9\}$.

Решение систем уравнений, содержащих неизвестные под знаком модуля

6.36. Решите систему уравнений: $\begin{cases} \sqrt{(x+y)^2} = 3, \\ \sqrt{(x-y)^2} = 1. \end{cases}$

Решение:

$$\begin{cases} |x+y|=3, \\ |x-y|=1. \end{cases}$$

Последняя система уравнений равносильна совокупности четырех систем, каждую из которых будем решать методом сложения и вычитания уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=3, \\ x-y=1; \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=-3, \\ x-y=-1; \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=3, \\ x-y=-1; \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=-3, \\ x-y=1; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x=4, \\ 2y=2; \end{cases} \\ \begin{cases} 2x=-4, \\ 2y=-2; \end{cases} \\ \begin{cases} 2x=2, \\ 2y=4; \end{cases} \\ \begin{cases} 2x=-2, \\ 2y=-4; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2, \\ y=1; \end{cases} \\ \begin{cases} x=-2, \\ y=-1; \end{cases} \\ \begin{cases} x=1, \\ y=2; \end{cases} \\ \begin{cases} x=-1, \\ y=-2. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(-2;-1)$, $(-1;-2)$, $(1;2)$, $(2;1)$.

6.37. Решите систему уравнений: $\begin{cases} |x-1|+y=0, \\ 2x-y=1. \end{cases}$

Решение:

$$\begin{cases} |x-1|=-y, \\ y=2x-1; \end{cases} \quad \begin{cases} |x-1|=1-2x, \\ y=2x-1; \end{cases} \quad \begin{cases} 1-2x\ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} x-1=1-2x, \\ x-1=-(1-2x), \end{array}\right. \\ y=2x-1; \end{cases} \quad \begin{cases} x\le 0,5, \\ \left[\begin{array}{l} x=\frac{2}{3}, \ \varnothing \\ x=0, \end{array}\right. \\ y=2x-1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0, \\ y=2x-1; \end{cases} \quad \begin{cases} x=0, \\ y=-1. \end{cases}$$

Ответ: $(0;-1)$.

6.38. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^2-2|x|-3=0, \\ x+y=6. \end{cases}$

Решение:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \ge 0,\\ x^2-2x-3=0,\\ x+y=6;\end{cases}\\ \begin{cases}x<0,\\ x^2+2x-3=0,\\ x+y=6;\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \ge 0,\\ x_1=3,\ \ x_2=-1,\\ x+y=6;\end{cases}\\ \begin{cases}x<0,\\ x_1=-3,\ \ x_2=1,\\ x+y=6;\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=3,\\ x+y=6;\end{cases}\\ \begin{cases}x=-3,\\ x+y=6;\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=3,\\ y=3;\end{cases}\\ \begin{cases}x=-3,\\ y=9.\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: $(-3;9)$, $(3;3)$.

6.39. Решите систему уравнений: $\begin{cases}x+y=2,\\ |3x-y|=1.\end{cases}$

Решение:

$$\begin{cases}|3x-y|=1,\\ y=2-x;\end{cases} \quad \begin{cases}|3x-(2-x)|=1,\\ y=2-x;\end{cases} \quad \begin{cases}|4x-2|=1,\\ y=2-x;\end{cases} \quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}4x-2=1,\\ 4x-2=-1,\end{array}\right.\\ y=2-x;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{3}{4},\\ x=\dfrac{1}{4},\end{array}\right.\\ y=2-x;\end{cases} \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\dfrac{3}{4},\\ y=\dfrac{5}{4};\end{cases}\\ \begin{cases}x=\dfrac{1}{4},\\ y=\dfrac{7}{4}.\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: $\left(\frac{1}{4};\frac{7}{4}\right)$, $\left(\frac{3}{4};\frac{5}{4}\right)$.

6.40. Решите систему уравнений: $\begin{cases}|x+1|+2y=1,\\ x+y=5.\end{cases}$

Решение:

$$\begin{cases}|x+1|=1-2y,\\ y=5-x;\end{cases} \quad \begin{cases}|x+1|=1-2(5-x),\\ y=5-x;\end{cases} \quad \begin{cases}|x+1|=2x-9,\\ y=5-x;\end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+1\ge 0,\\ x+1=2x-9,\\ y=5-x;\end{cases}\\ \begin{cases}x+1<0,\\ -(x+1)=2x-9,\\ y=5-x;\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge -1,\\ -x=-10,\\ y=5-x;\end{cases}\\ \begin{cases}x<-1,\\ -3x=-8,\\ y=5-x;\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge -1,\\ x=10,\\ y=5-x;\end{cases}\\ \begin{cases}x<-1,\\ x=\dfrac{8}{3},\\ y=5-x;\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=10,\\ y=-5;\end{cases}\\ x\in\varnothing;\end{array}\right.$$

$$\begin{cases}x=10,\\ y=-5.\end{cases}$$

Ответ: $(10; -5)$.

§7. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕРАВЕНСТВ С ПЕРЕМЕННОЙ ПОД ЗНАКОМ МОДУЛЯ

Решение неравенств, содержащих модули, в большинстве случаев строится аналогично решению соответствующих уравнений. Но если при решении уравнений можно пользоваться проверкой полученных решений, то для случая неравенств отбросить посторонние решения проверкой может быть затруднительно. Это означает, что при решении неравенств с переменной под знаком модуля нужно использовать, в основном, равносильные переходы.

При решении неравенств с переменной под знаком модуля используют следующие основные методы:

- сведение исходного неравенства к равносильному неравенству, системе или совокупности неравенств;
- метод, основанный на раскрытии модуля по определению;
- введение новой переменной;
- метод промежутков.

Рассмотрим основные типы неравенств с переменной под знаком модуля и методы их решения. Начнем с простейших неравенств с переменной под знаком модуля.

Решение простейших неравенств с модулем

К простейшим неравенствам с модулем будем относить следующие неравенства: $|x|<a$, $|x|>b$.

1) $|x|<a \quad (a>0)$

$|x|<a$; $\begin{cases} x<a, \\ x>-a; \end{cases}$ $-a<x<a$; $x\in(-a;a)$.

Ответ: $x\in(-a;a)$.

2) $|x|>b \quad (b>0)$

$|x|>b$; $\left[\begin{array}{l} x>b, \\ x<-b; \end{array}\right.$ $x\in(-\infty;-b)\cup(b;\infty)$.

Ответ: $x\in(-\infty;-b)\cup(b;\infty)$.

Примеры решений:

а) $|2x+5| \le 8$

$-8 \le 2x+5 \le 8$

$-13 \le 2x \le 3$

$-6,5 \le x \le 1,5$

Ответ: $x \in [-6,5;\ 1,5]$.

б) $|2x-5| \ge 3$

$\left[\begin{array}{l} 2x-5 \ge 3, \\ 2x-5 \le -3; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x \ge 4, \\ x \le 1. \end{array}\right.$

Ответ: $x \in (-\infty; 1] \cup [4; \infty)$.

Метод сведения исходного неравенства к равносильному неравенству, системе или совокупности неравенств

Рассмотрим неравенства с модулем, структуру решений которых надо понять и запомнить, а далее использовать в нужных ситуациях.

При решении неравенств с модулем используют следующие равносильные переходы:

	Неравенство	Равносильный переход
1)	$|f(x)| < g(x)$	$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ -f(x) < g(x). \end{cases}$
2)	$|f(x)| > g(x)$	$\left[\begin{array}{l} f(x) > g(x), \\ -f(x) > g(x). \end{array}\right.$
3)	$|f(x)| \vee |g(x)|$	$f^2(x) \vee g^2(x)$

Замечание. В системе должны выполняться оба неравенства. Система соответствует союзу «*и*».

В совокупности должно выполняться хотя бы одно из неравенств. Совокупность соответствует союзу «*или*».

В случае нестрогих неравенств все неравенства, соответственно, заменяются на нестрогие.

7.1. Решите неравенство: $\left|x^2-x-3\right|<9$.

Решение:

Данное неравенство равносильно <u>системе</u> неравенств:

$$\begin{cases} x^2-x-3<9, \\ -\left(x^2-x-3\right)<9; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-x-3<9, \\ x^2-x-3>-9; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-x-12<0, \\ \underbrace{x^2-x+6}_{D<0}>0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+3)(x-4)<0, \\ x\in\mathbb{R}; \end{cases} \quad x\in(-3;4).$$

Ответ: $x\in(-3;4)$.

7.2. Решите неравенство: $x\le 4-\left|x^2-6x+8\right|$.

Решение:

$\left|x^2-6x+8\right|\le 4-x$

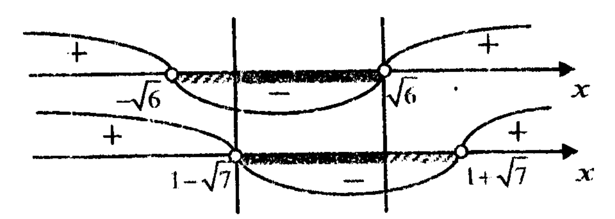
$$\begin{cases} x^2-6x+8\le 4-x, \\ -\left(x^2-6x+8\right)\le 4-x; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-5x+4\le 0, \\ x^2-7x+12\ge 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (x-1)(x-4)\le 0, \\ (x-3)(x-4)\ge 0. \end{cases}$$

Ответ: $x\in[1;3]\cup\{4\}$.

7.3. Решите неравенство: $|x|<-x^2+x+6$.

Решение:

$$\begin{cases} x<-x^2+x+6, \\ -x<-x^2+x+6; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-6<0, \\ x^2-2x-6<0. \end{cases}$$

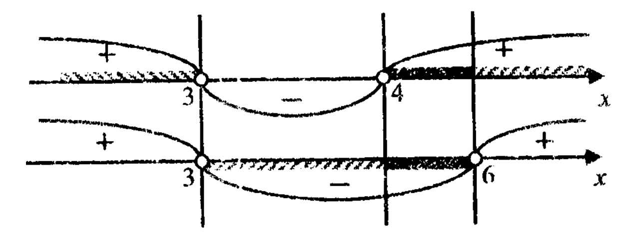


Ответ: $x\in\left(1-\sqrt{7};\sqrt{6}\right)$.

7.4. Решите неравенство: $\left|x^2-8x+15\right|<x-3$.

Решение:

$\begin{cases}x^2-8x+15<x-3,\\-\left(x^2-8x+15\right)<x-3;\end{cases}$ $\begin{cases}x^2-9x+18<0,\\x^2-7x+12>0;\end{cases}$ $\begin{cases}(x-3)(x-6)<0,\\(x-3)(x-4)>0.\end{cases}$



Ответ: $x\in(4;6)$.

7.5. Решите неравенство: $x^2-7x+12<|x-4|$.

Решение:

$|x-4|>x^2-7x+12$

Данное неравенство равносильно <u>совокупности</u> неравенств:

$\left[\begin{array}{l}x-4>x^2-7x+12,\\-(x-4)>x^2-7x+12;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x^2-8x+16<0,\\x^2-6x+8<0;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}(x-4)^2<0,\\(x-2)(x-4)<0;\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}x\in\varnothing,\\x\in(2;4);\end{array}\right.$ $x\in(2;4)$.

Ответ: $x\in(2;4)$.

7.6. Решите неравенство: $\left|\dfrac{x^2+5x+8}{x+6}\right|+x>3$.

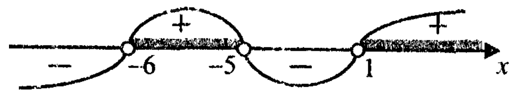
Решение:

$$\left|\frac{x^2+5x+8}{x+6}\right|>3-x$$

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{x^2+5x+8}{x+6}>3-x,\\ -\left(\dfrac{x^2+5x+8}{x+6}\right)>3-x;\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\dfrac{x^2+5x+8}{x+6}+x-3>0,\\ \dfrac{x^2+5x+8}{x+6}-x+3<0;\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\dfrac{2x^2+8x-10}{x+6}>0,\\ \dfrac{2x+26}{x+6}<0;\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{(x+5)(x-1)}{x+6}>0,\\ \dfrac{x+13}{x+6}<0.\end{array}\right.$$

Решение первого неравенства:



$x\in(-6;-5)\cup(1;\infty)$

Решение второго неравенства:



$x\in(-13;-6)$

Решение совокупности состоит из объединения решений двух неравенств:

Ответ: $x\in(-13;-6)\cup(-6;-5)\cup(1;\infty)$.

7.7. Решите неравенство: $3|x-1|+x^2-7>0$.

Решение:

$3|x-1|>7-x^2$

$\left[\begin{array}{l}3(x-1)>7-x^2,\\-3(x-1)>7-x^2;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x^2+3x-10>0,\\x^2-3x-4>0;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}(x+5)(x-2)>0,\\(x+1)(x-4)>0;\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}x\in(-\infty;-5)\cup(2;\infty),\\x\in(-\infty;-1)\cup(4;\infty).\end{array}\right.$

Объединяя найденные решения, получаем промежутки: $(-\infty;-1)$ и $(2;\infty)$.



Ответ: $x\in(-\infty;-1)\cup(2;\infty)$.

7.8. Решите неравенство: $|x^2-6|>4x+1$.

Решение:

$\left[\begin{array}{l}x^2-6>4x+1,\\-(x^2-6)>4x+1;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x^2-4x-7>0,\\x^2+4x-5<0;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x^2-4x-7>0,\\(x+5)(x-1)<0;\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}x\in\left(-\infty;2-\sqrt{11}\right)\cup\left(2+\sqrt{11};\infty\right),\\x\in(-5;1).\end{array}\right.$



Объединение решений первого и второго неравенств: $x\in(-\infty;1)\cup\left(2+\sqrt{11};\infty\right)$.

Ответ: $x\in(-\infty;1)\cup\left(2+\sqrt{11};\infty\right)$.

7.9. Решите неравенство: $x\le|x^2-2x|$.

Решение:

$|x^2-2x|\ge x$

$$\left[\begin{array}{l} x^2-2x\ge x, \\ -\left(x^2-2x\right)\ge x; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x^2-3x\ge 0, \\ x^2-x\le 0; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x(x-3)\ge 0, \\ x(x-1)\le 0; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x\in(-\infty;0]\cup[3;\infty), \\ x\in[0;1]. \end{array}\right.$$



Ответ: $x\in(-\infty;1]\cup[3;\infty)$.

7.10. Решите неравенство: $|x-3|>|x^2-3|$.

Решение:

$$(x-3)^2>(x^2-3)^2$$

$$(x-3)^2-(x^2-3)^2>0$$

$$(x-3-x^2+3)(x-3+x^2-3)>0$$

$$(x^2-x)(x^2+x-6)<0$$

$$x(x-1)(x+3)(x-2)<0$$

Ответ: $x\in(-3;0)\cup(1;2)$.

7.11. Решите неравенство: $|x^2+x-2|>|x+2|$.

Решение:

$$(x^2+x-2)^2>(x+2)^2$$

$$(x+2)^2(x-1)^2-(x+2)^2>0$$

$$\left((x-1)^2-1\right)(x+2)^2>0$$

$$x(x-2)(x+2)^2>0$$

Ответ: $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 0) \cup (2; \infty)$.

7.12. Решите неравенство: $\left|\frac{-5}{x+2}\right| < \left|\frac{10}{x-1}\right|$.

Решение:

$$\frac{5}{|x+2|} < \frac{10}{|x-1|}$$

Замечание. Свойство неравенства: Если $a < b$, то $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

Тогда: $\frac{|x+2|}{5} > \frac{|x-1|}{10}$ при условии, что $x \neq -2$ и $x \neq 1$.

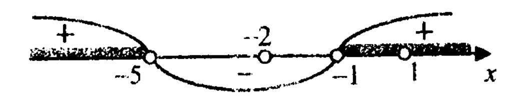
$$2|x+2| > |x-1|$$

$$(2(x+2))^2 > (x-1)^2$$

$$(2x+4-x+1)(2x+4+x-1) > 0$$

$$(x+5)(3x+3) > 0$$

$$3(x+5)(x+1) > 0$$

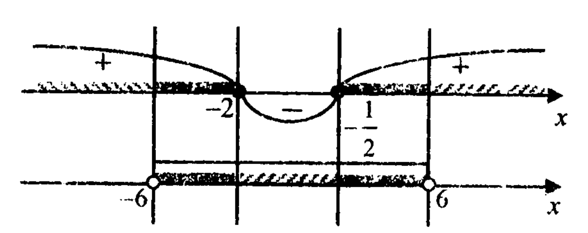


Ответ: $x \in (-\infty; -5) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$.

7.13. Решите систему неравенств: $\begin{cases} x^2 + x + 1 \geq -1 - 4x - x^2, \\ |x| < 6. \end{cases}$

Решение:

$\begin{cases} x^2 + x + 1 \geq -1 - 4x - x^2, \\ |x| < 6; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x^2 + 5x + 2 \geq 0, \\ -6 < x < 6; \end{cases}$ $\begin{cases} 2(x+2)\left(x + \frac{1}{2}\right) \geq 0, \\ -6 < x < 6. \end{cases}$



Ответ: $x \in (-6; -2] \cup \left[-\frac{1}{2}; 6\right)$.

7.14. Решите систему неравенств: $\begin{cases} -2x < 5, \\ x - 3 < 1 - \frac{x}{2}, \\ 2\left(1 - \frac{x}{4}\right) < 3, \\ |x - 3| \le 2. \end{cases}$

Решение:

$\begin{cases} x > -2,5, \\ 3x < 8, \\ \frac{x}{2} > -1, \\ -2 \le x - 3 \le 2; \end{cases}$ $\begin{cases} x > -2,5, \\ x < 2\frac{2}{3}, \\ x > -2, \\ 1 \le x \le 5; \end{cases}$ $\begin{cases} x > -2,5, \\ x > -2, \\ x \ge 1, \\ x < 2\frac{2}{3}, \\ x \le 5; \end{cases}$ $\begin{cases} x \ge 1, \\ x < 2\frac{2}{3}; \end{cases}$

$1 \le x < 2\frac{2}{3}$

Ответ: $x \in \left[1; 2\frac{2}{3}\right)$.

7.15. Решите систему: $\begin{cases} \frac{2}{x} < x + 1, \\ |x - 3| \le 4. \end{cases}$

Решение:

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x} < x+1, \\ |x-3| \le 4; \end{cases} \quad \begin{cases} x+1-\dfrac{2}{x} > 0, \\ -4 \le x-3 \le 4; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{x^2+x-2}{x} > 0, \\ -1 \le x \le 7; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{(x+2)(x-1)}{x} > 0, \\ -1 \le x \le 7. \end{cases}$$

Ответ: $x \in [-1; 0) \cup (1; 7]$.

Метод, основанный на раскрытии модуля по определению

Предложенные выше схемы решения неравенств, содержащих один модуль, оказываются неприменимыми для решения неравенств, в которых модуль входит более сложным образом.

Такие неравенства будем решать, раскрывая модуль по определению.

7.16. Найдите наибольшее целое значение y, удовлетворяющее неравенству $\dfrac{|y-12|}{y} > 2$.

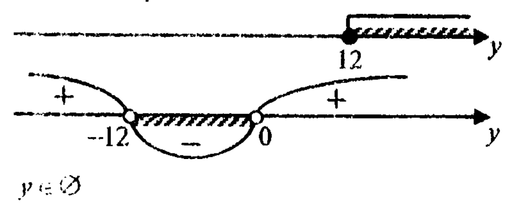
Решение:

По определению модуля: $|y-12| = \begin{cases} y-12, & \text{если } y-12 \ge 0, \\ 12-y, & \text{если } y-12 < 0. \end{cases}$

Таким образом, исходное неравенство равносильно совокупности двух систем:

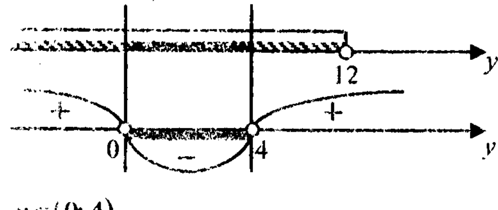
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y \ge 12, \\ \dfrac{y-12}{y} > 2; \end{cases} \\ \begin{cases} y < 12, \\ \dfrac{12-y}{y} > 2; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y \ge 12, \\ \dfrac{y+12}{y} < 0; \end{cases} \\ \begin{cases} y < 12, \\ \dfrac{y-4}{y} < 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Решение первой системы:



$y \in \varnothing$

Решение второй системы:



$y \in (0; 4)$

Окончательно получаем: $y \in (0; 4)$.

Наибольшее целое значение y из данного промежутка: $y = 3$.
Ответ: 3.

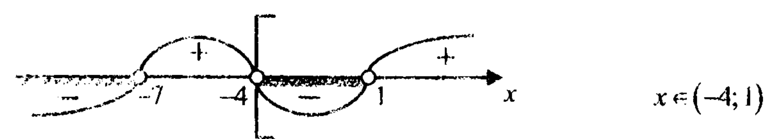
7.17. Решите неравенство: $\dfrac{x^2+6x-7}{|x+4|} < 0$.

Решение:

Решим неравенство, раскрыв модуль по определению:

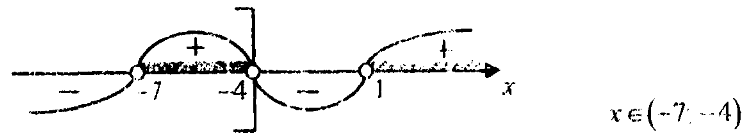
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+4>0, \\ \dfrac{x^2+6x-7}{x+4}<0; \end{cases} \\ \begin{cases} x+4<0, \\ \dfrac{x^2+6x-7}{-(x+4)}<0; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>-4, \\ \dfrac{(x+7)(x-1)}{x+4}<0; \end{cases} \\ \begin{cases} x<-4, \\ \dfrac{(x+7)(x-1)}{x+4}>0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Решение первой системы:



$x \in (-4; 1)$

Решение второй системы:



$x \in (-7; -4)$

Объединяем полученные решения:

$$\left[\begin{aligned} &x \in (-4; 1), \\ &x \in (-7; -4); \end{aligned}\right. \qquad x \in (-7; -4) \cup (-4; 1).$$

Ответ: $x \in (-7; -4) \cup (-4; 1)$.

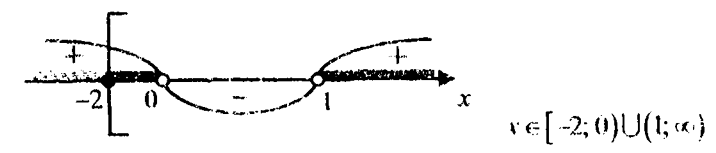
7.18. Решите неравенство: $\dfrac{|x+2|-x}{x} < 2$.

Решение:

Неравенство равносильно совокупности двух систем:

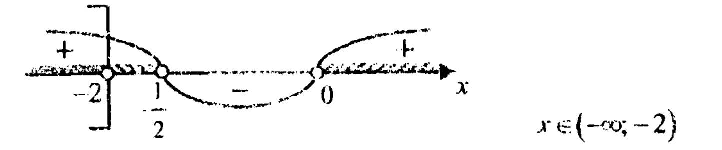
$$\left[\begin{aligned} &\begin{cases} x+2 \geq 0, \\ \dfrac{x+2-x}{x} < 2; \end{cases} \\ &\begin{cases} x+2 < 0, \\ \dfrac{-x-2-x}{x} < 2; \end{cases} \end{aligned}\right. \quad \left[\begin{aligned} &\begin{cases} x \geq -2, \\ \dfrac{2}{x} < 2; \end{cases} \\ &\begin{cases} x < -2, \\ \dfrac{-2x-2}{x} < 2; \end{cases} \end{aligned}\right. \quad \left[\begin{aligned} &\begin{cases} x \geq -2, \\ \dfrac{2-2x}{x} < 0; \end{cases} \\ &\begin{cases} x < -2, \\ \dfrac{-4x-2}{x} < 0; \end{cases} \end{aligned}\right. \quad \left[\begin{aligned} &\begin{cases} x \geq -2, \\ \dfrac{x-1}{x} > 0; \end{cases} \\ &\begin{cases} x < -2, \\ \dfrac{2x+1}{x} > 0. \end{cases} \end{aligned}\right.$$

Решение первой системы:



$x \in [-2; 0) \cup (1; \infty)$

Решение второй системы:



$x \in (-\infty; -2)$

Объединяем полученные решения:

$$\left[\begin{array}{l} x \in [-2; 0) \cup (1; \infty), \\ x \in (-\infty; -2); \end{array}\right. \qquad x \in (-\infty; 0) \cup (1; \infty).$$

Ответ: $x \in (-\infty; 0) \cup (1; \infty)$.

Метод введения новой переменной

Данным методом решаются неравенства, содержащие $|x|$ и x^2 одновременно.

7.19. Решите неравенство: $2x^2 - |x| - 1 \ge 0$.

Решение:

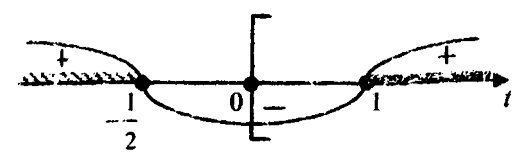
$2x^2 - |x| - 1 \ge 0$

Так как $|x|^2 = x^2$ исходное неравенство можно записать как:

$2|x|^2 - |x| - 1 \ge 0$

Введем новую переменную $t = |x|$ $(t \ge 0)$, получим:

$$\begin{cases} 2t^2 - t - 1 \ge 0, \\ t \ge 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2\left(t + \frac{1}{2}\right)(t - 1) \ge 0, \\ t \ge 0. \end{cases}$$



$t \in [1; \infty)$

Получаем:

$$t \ge 1; \qquad |x| \ge 1; \qquad \left[\begin{array}{l} x \ge 1, \\ x \le -1; \end{array}\right. \qquad x \in (-\infty; -1] \cup [1; \infty).$$

Ответ: $x \in (-\infty; -1] \cup [1; \infty)$.

7.20. Решите неравенство: $x^2+6x-4|x+3|-12>0$.

Решение:

Преобразуем данное неравенство:

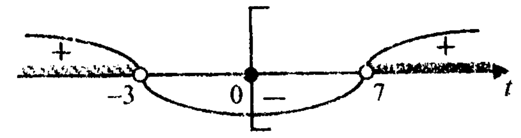
$$x^2+6x+9-9-4|x+3|-12>0$$

$$(x+3)^2-4|x+3|-21>0$$

$$|x+3|^2-4|x+3|-21>0$$

Замена: $|x+3|=t \quad (t\ge 0)$.

$$\begin{cases} t^2-4t-21>0, \\ t\ge 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} (t+3)(t-7)>0, \\ t\ge 0. \end{cases}$$



$t>7$

Получаем:

$$t>7; \qquad |x+3|>7; \qquad \left[\begin{array}{l} x+3>7, \\ x+3<-7; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x>4, \\ x<-10; \end{array}\right.$$

$x\in(-\infty;-10)\cup(4;\infty)$.

Ответ: $x\in(-\infty;-10)\cup(4;\infty)$.

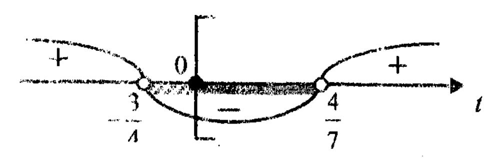
7.21. Решите неравенство: $\dfrac{|x-1|+10}{4|x-1|+3}>2$.

Решение:

Введем замену: $t=|x-1| \quad (t\ge 0)$.

Тогда исходное неравенство можно переписать в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{t+10}{4t+3}>2, \\ t\ge 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{t+10}{4t+3}-2>0, \\ t\ge 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{-7t+4}{4t+3}>0, \\ t\ge 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{7t-4}{4t+3}<0, \\ t\ge 0. \end{cases}$$



$t \in \left[0; \frac{4}{7}\right)$

Получаем:

$|x-1| < \frac{4}{7}$; $-\frac{4}{7} < x-1 < \frac{4}{7}$; $\frac{3}{7} < x < \frac{11}{7}$.

Ответ: $x \in \left(\frac{3}{7}; \frac{11}{7}\right)$.

7.22. Решите неравенство: $\frac{x^2-4x+4}{x^2-6x+9} + \frac{|x-2|}{|x-3|} - 12 < 0$.

Решение:

$$\frac{x^2-4x+4}{x^2-6x+9} + \frac{|x-2|}{|x-3|} - 12 < 0$$

$$\frac{(x-2)^2}{(x-3)^2} + \frac{|x-2|}{|x-3|} - 12 < 0$$

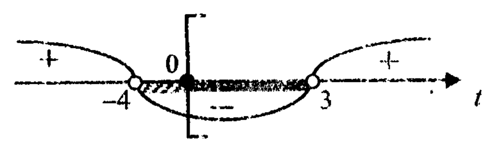
Так как $\frac{|x-2|}{|x-3|} = \left|\frac{x-2}{x-3}\right|$, исходное неравенство можно переписать как:

$$\left(\frac{x-2}{x-3}\right)^2 + \left|\frac{x-2}{x-3}\right| - 12 < 0.$$

$$\left|\frac{x-2}{x-3}\right|^2 + \left|\frac{x-2}{x-3}\right| - 12 < 0$$

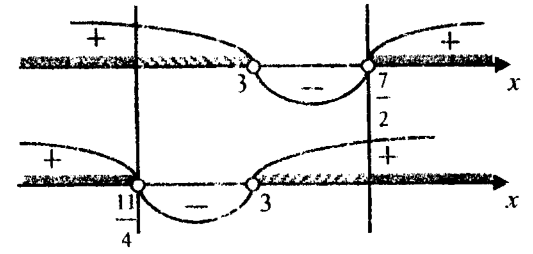
Замена: $\left|\frac{x-2}{x-3}\right| = t \quad (t \geq 0)$.

$\begin{cases} t^2+t-12<0, \\ t \geq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} (t+4)(t-3)<0, \\ t \geq 0. \end{cases}$



$t \in [0;3)$, следовательно, $\left|\frac{x-2}{x-3}\right| < 3$.

$\begin{cases} \frac{x-2}{x-3} < 3, \\ \frac{x-2}{x-3} > -3, \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{x-2}{x-3} - 3 < 0, \\ \frac{x-2}{x-3} + 3 > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{-2x+7}{x-3} < 0, \\ \frac{4x-11}{x-3} > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{2x-7}{x-3} > 0, \\ \frac{4x-11}{x-3} > 0. \end{cases}$



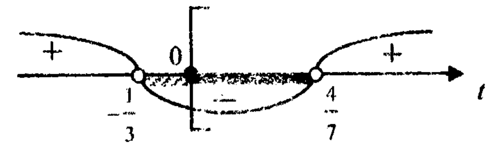
Ответ: $x \in \left(-\infty; \frac{11}{4}\right) \cup \left(\frac{7}{2}; \infty\right)$.

7.23. Решите неравенство: $\frac{16|x+1|-1}{3|x+1|+1} < 3$.

Решение:

Замена: $t = |x+1|$ $(t \geq 0)$.

$\begin{cases} \frac{16t-1}{3t+1} < 3, \\ t \geq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{7t-4}{3t+1} < 0, \\ t \geq 0. \end{cases}$



$0 \leq t < \frac{4}{7}$, следовательно, $|x+1| < \frac{4}{7}$.

$$-\frac{4}{7} < x+1 < \frac{4}{7}$$

$$-\frac{11}{7} < x < -\frac{3}{7}.$$

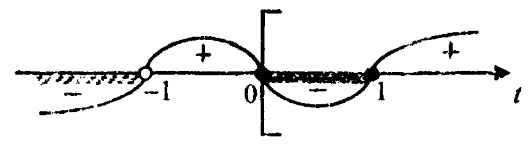
Ответ: $x \in \left(-\frac{11}{7}; -\frac{3}{7}\right)$.

7.24. Решите неравенство: $\frac{-2}{|x|+1} \geq |x|-2$.

Решение:

Замена: $t=|x|$ $(t \geq 0)$.

$$\begin{cases} \frac{-2}{t+1} \geq t-2, \\ t \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{-2}{t+1} - t + 2 \geq 0, \\ t \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{-t^2+t}{t+1} \geq 0, \\ t \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{t(t-1)}{t+1} \leq 0, \\ t \geq 0; \end{cases}$$



$t \in [0; 1]$, $|x| \leq 1$, $-1 \leq x \leq 1$.

Ответ: $x \in [-1; 1]$.

Метод промежутков

Неравенства, содержащие два и более модуля, решаются методом промежутков. Как и в случае уравнений, модули нужно раскрыть согласно определению, а затем решить совокупность систем неравенств.

7.25. Решите неравенство: $|x-1| - 2|x+5| > 3+x$.

Решение:

Найдем нули выражений, стоящих под знаком модуля:

$x=1$, $x=-5$.

Отметим полученные значения на числовой прямой и исследуем знаки подмодульных выражений на каждом из полученных промежутков:

$x-1$	$-$		$-$		$+$
$x+5$	$-$	-5	$+$	1	$+$

Найдем решения неравенства для каждого промежутка в отдельности (при этом безразлично, к какому числовому промежутку относить граничные точки):

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le -5,\\ -(x-1)+2(x+5)>3+x;\end{cases}\\ \begin{cases}-5<x\le 1,\\ -(x-1)-2(x+5)>3+x;\end{cases}\\ \begin{cases}x>1,\\ (x-1)-2(x+5)>3+x;\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le -5,\\ 0\cdot x>-8;\end{cases}\\ \begin{cases}-5<x\le 1,\\ -4x>12;\end{cases}\\ \begin{cases}x>1,\\ -2x>14;\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le -5,\\ 0\cdot x>-8;\end{cases}\\ \begin{cases}-5<x\le 1,\\ x<-3;\end{cases}\\ \begin{cases}x>1,\\ x<-7;\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x\le -5,\\ -5<x<-3,\\ x\in\varnothing.\end{array}\right.$$

Объединением полученных решений является интервал:

$x\in(-\infty;-3)$.

Ответ: $x\in(-\infty;-3)$.

7.26. Решите неравенство: $|x-2|>2+x-|3-x|$.

Решение:

По свойству модуля: $|3-x|=|x-3|$, следовательно, неравенство можно переписать в виде:

$|x-2|>2+x-|x-3|$ (такая запись более удобна).

Найдем нули выражений, стоящих под знаком модуля:

$x=2$, $x=3$.

Отметим полученные значения на числовой прямой и исследуем знаки подмодульных выражений на каждом из полученных промежутков:

	$(-\infty;2)$	2	$(2;3)$	3	$(3;\infty)$	x
$x-2$	$-$		$+$		$+$	
$x-3$	$-$		$-$		$+$	

Решим заданное неравенство на каждом из полученных промежутков с учетом знаков выражений под модулем.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<2,\\ -(x-2)>2+x+(x-3);\end{cases}\\ \begin{cases}2\le x\le 3,\\ x-2>2+x+(x-3);\end{cases}\\ \begin{cases}x>3,\\ x-2>2+x-(x-3);\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<2,\\ -3x>-3;\end{cases}\\ \begin{cases}2\le x\le 3,\\ -x>1;\end{cases}\\ \begin{cases}x>3,\\ x>7;\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<2,\\ x<1;\end{cases}\\ \begin{cases}2\le x\le 3,\\ x<-1;\end{cases}\\ \begin{cases}x>3,\\ x>7;\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x<1,\\ x\in\varnothing,\\ x>7.\end{array}\right.$$

Решение исходного неравенства получается путем объединения полученных промежутков $(-\infty;1)$ и $(7;\infty)$.

Ответ: $x\in(-\infty;1)\cup(7;\infty)$.

7.27. Решите неравенство: $(|1-x|-3)(|x+2|-5)<0$.

Решение:

Перепишем неравенство в виде: $(|x-1|-3)(|x+2|-5)<0$.

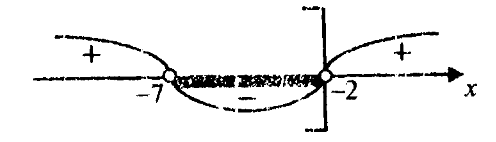
	$(-\infty;-2)$	-2	$(-2;1)$	1	$(1;\infty)$	x
$x-1$	$-$		$-$		$+$	
$x+2$	$-$		$+$		$+$	

Рассмотрим решение неравенства на каждом промежутке:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le -2,\\ (-(x-1)-3)(-(x+2)-5)<0;\end{cases}\\ \begin{cases}-2<x\le 1,\\ (-(x-1)-3)((x+2)-5)<0;\end{cases}\\ \begin{cases}x>1,\\ (x-1-3)((x+2)-5)<0;\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le -2,\\ (-x-2)(-x-7)<0;\end{cases}\\ \begin{cases}-2<x\le 1,\\ (-x-2)(x-3)<0;\end{cases}\\ \begin{cases}x>1,\\ (x-4)(x-3)<0;\end{cases}\end{array}\right.$$

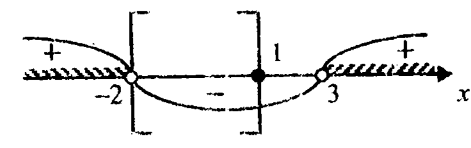
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \le -2,\\(x+2)(x+7)<0,\end{cases}\\\begin{cases}-2<x\le 1,\\(x+2)(x-3)>0\end{cases}\\\begin{cases}x>1,\\(x-4)(x-3)<0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Решение первой системы:



$x \in (-7; -2)$

Решение второй системы:



$x \in \varnothing$

Решение третьей системы:



$x \in (3; 4)$

Объединяем полученные решения:

$$\left[\begin{array}{l}x \in (-7; -2),\\x \in \varnothing,\\x \in (3; 4);\end{array}\right. \qquad x \in (-7; -2) \cup (3; 4).$$

Ответ: $x \in (-7; -2) \cup (3; 4)$.

7.28. Решите неравенство: $|x| \ge \frac{2x}{|3-x|}$.

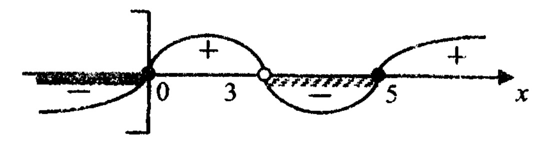
Решение:

$$|x| \geq \frac{2x}{|x-3|}$$

x	$-$		$+$		$+$	
$x-3$	$-$	0	$-$	3	$+$	x

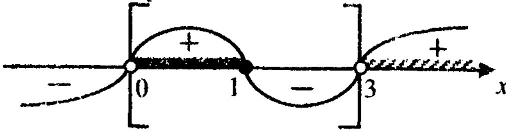
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \leq 0, \\ -x \geq \dfrac{2x}{-(x-3)}; \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < x < 3, \\ x \geq \dfrac{2x}{-(x-3)}; \end{cases} \\ \begin{cases} x > 3, \\ x \geq \dfrac{2x}{x-3}; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \leq 0, \\ \dfrac{2x}{x-3} - x \geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < x < 3, \\ \dfrac{2x}{x-3} + x \geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x > 3, \\ x - \dfrac{2x}{x-3} \geq 0; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \leq 0, \\ \dfrac{-x^2+5x}{x-3} \geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < x < 3, \\ \dfrac{x^2-x}{x-3} \geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x > 3, \\ \dfrac{x^2-5x}{x-3} \geq 0; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \leq 0, \\ \dfrac{x(x-5)}{x-3} \leq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < x < 3, \\ \dfrac{x(x-1)}{x-3} \geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x > 3, \\ \dfrac{x(x-5)}{x-3} \geq 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Решение первой системы:



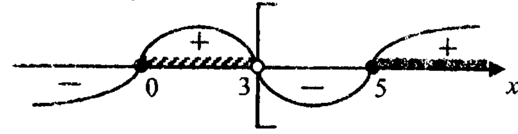
$x \in (-\infty; 0]$

Решение второй системы:



$x \in (0; 1]$

Решение третьей системы:



$x \in [5; \infty)$

Решением исходного неравенства является объединение полученных промежутков:

$$\left[\begin{array}{l} x \in (-\infty; 0], \\ x \in (0; 1], \\ x \in [5; \infty); \end{array}\right. \qquad x \in (-\infty; 1] \cup [5; \infty).$$

Ответ: $x \in (-\infty; 1] \cup [5; \infty)$.

Дополнительные методы решения неравенств с переменной под знаком модуля

В заключении рассмотрим несколько частных случаев, когда можно обойтись без раскрытия модуля, проанализировав структуру неравенства.

7.29. Решите неравенство: $\left|4 - \sqrt{x-2}\right| > -5$.

Решение:

Так как модуль – величина **неотрицательная**, то данное неравенство будет выполнено для всех x из области допустимых значений.

Найдем ОДЗ:

$x - 2 \geq 0$; $\quad x \geq 2$.

Ответ: $x \in [2; \infty)$.

7.30. Решите неравенство: $\left|\dfrac{\sqrt{x+3} - 1}{x^2 - 1}\right| > 0$.

Решение:

Решением данного неравенства будет ОДЗ ($x + 3 \geq 0$, $\; x^2 - 1 \neq 0$) при условии, что дробное выражение под знаком модуля не равно нулю:

$$\begin{cases} x + 3 \geq 0, \\ x^2 - 1 \neq 0, \\ \dfrac{\sqrt{x+3} - 1}{x^2 - 1} \neq 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq -3, \\ x \neq \pm 1, \\ \sqrt{x+3} \neq 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq -3, \\ x \neq \pm 1, \\ x \neq -2. \end{cases}$$

Ответ: $x \in [-3; -2) \cup (-2; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$.

7.31. Решите неравенство: $\left|x^2+x-20\right| \le x^2+x-20$.

Решение:

Данное неравенство имеет место только, если $x^2+x-20 \ge 0$.

$(x+5)(x-4) \ge 0$

$x \in (-\infty; -5] \cup [4; \infty)$

Ответ: $x \in (-\infty; -5] \cup [4; \infty)$.

7.32. Решите неравенство: $\left|x^2+6x+8\right| \le -x^2-6x-8$.

Решение:

$\left|x^2+6x+8\right| \le -\left(x^2+6x+8\right)$.

Так как модуль не может быть меньше отрицательного числа, должно быть выполнено условие:

$x^2+6x+8 \le 0$

$(x+2)(x+4) \le 0$

$x \in [-4; -2]$

Ответ: $x \in [-4; -2]$.

ГЛАВА II. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

§1. ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Определение. Алгебраическое выражение называется *иррациональным*, если оно содержит операции извлечения корня или возведения в степень с рациональным (не целым) показателем под переменными, от которых оно зависит.

Школьной программой предусмотрено умение выполнять тождественные преобразования иррациональных алгебраических выражений. Напомним основные виды преобразований и рассмотрим соответствующие примеры.

- Разложение многочленов на множители. Сокращение дробей.
- Освобождение от иррациональности в знаменателе дроби.
- Упрощение иррациональных алгебраических выражений.
- Преобразование иррациональных алгебраических выражений, содержащих модули.
- Преобразование двойных радикалов.
- Преобразование выражений, содержащих степени с рациональными показателями.

Заметим, что когда для преобразования предложено некоторое иррациональное алгебраическое выражение, но при этом не сделано специальных оговорок о значениях переменных, входящих в данное выражение, подразумевается, что переменные принимают только те значения, при которых выражение имеет смысл.

Разложение многочленов на множители Сокращение дробей

Для преобразования иррациональных алгебраических выражений необходимо уметь группировать слагаемые, приводить подобные члены, выносить за скобки общие множители, сокращать дроби, грамотно использовать формулы сокращенного умножения, владеть приемами разложения многочленов на множители.

1.1. Сократите дробь:

1) $\dfrac{2x-\sqrt{x}}{1-2\sqrt{x}}$ 2) $\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-1}$ 3) $\dfrac{x-9}{\left(\sqrt{x}-3\right)^2}$

4) $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}$ 5) $\dfrac{(x-9)\left(\sqrt{x}+3\right)^{-1}}{x+9-6\sqrt{x}}$ 6) $\dfrac{n^2-m^2}{\left(\sqrt{n}-\sqrt{m}\right)^2+2\sqrt{mn}}$

7) $\frac{y-16y^{0,5}}{5y^{0,25}+20}$ 8) $\frac{x+x^{0,8}+x^{0,6}+x^{0,4}}{x^{0,8}+x^{0,6}+x^{0,4}+x^{0,2}}$ 9) $\frac{2+\sqrt{x}-x}{\sqrt{x}-2}$

10) $\frac{x+9}{\sqrt{-x}+3}$ 11) $\frac{x+y-2\sqrt{xy}}{\sqrt{-x}+\sqrt{-y}}$ 12) $\frac{a+\sqrt{ab}}{b+\sqrt{ab}}$, если $a<0$; $b<0$

13) $\frac{x-2\sqrt[3]{x}+1}{x+2\sqrt[3]{x^2}-1}$. 14) $\frac{2\sqrt{1-x^2}+x^2-2}{1-\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{x+1}}$

Решение:

1) $\frac{2x-\sqrt{x}}{1-2\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}\left(2\sqrt{x}-1\right)}{1-2\sqrt{x}}=-\sqrt{x}$

2) $\frac{x+\sqrt{x}}{x-1}=\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$

3) $\frac{x-9}{\left(\sqrt{x}-3\right)^2}=\frac{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}{\left(\sqrt{x}-3\right)^2}=\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3}$

4) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\left(\sqrt{a}\right)^3+\left(\sqrt{b}\right)^3}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{ab}+b\right)}=\frac{1}{a-\sqrt{ab}+b}$

5) $\frac{(x-9)\left(\sqrt{x}+3\right)^{-1}}{x+9-6\sqrt{x}}=\frac{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-3\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{x}-3}$

6) $\frac{n^2-m^2}{\left(\sqrt{n}-\sqrt{m}\right)^2+2\sqrt{mn}}=\frac{n^2-m^2}{n-2\sqrt{mn}+m+2\sqrt{mn}}=\frac{(n-m)(n+m)}{n+m}=n-m$

7) $\frac{y-16y^{0,5}}{5y^{0,25}+20}=\frac{y^{0,5}\left(y^{0,5}-16\right)}{5\left(y^{0,25}+4\right)}=\frac{y^{0,5}\left(y^{0,25}-4\right)\left(y^{0.25}+4\right)}{5\left(y^{0,25}+4\right)}=\frac{y^{0.5}\left(y^{0,25}-4\right)}{5}$

8) $\frac{x+x^{0,8}+x^{0,6}+x^{0,4}}{x^{0,8}+x^{0,6}+x^{0,4}+x^{0,2}}=\frac{x^{0,4}\left(x^{0,6}+x^{0,4}+x^{0,2}+1\right)}{x^{0,2}\left(x^{0.6}+x^{0,4}+x^{0,2}+1\right)}=x^{0,2}$

9) $\frac{2+\sqrt{x}-x}{\sqrt{x}-2}=-\frac{x-\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-2}$

Определим корни многочлена a^2-a-2. Это числа -1 и 2.

Следовательно: $x-\sqrt{x}-2=\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)$.

$$-\frac{x-\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-2}=-\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}{\sqrt{x}-2}=-\sqrt{x}-1$$

10) $\frac{x+9}{\sqrt{-x}+3}=\frac{-\left(\sqrt{-x}\right)^2+3^2}{\sqrt{-x}+3}=\frac{\left(3+\sqrt{-x}\right)\left(3-\sqrt{-x}\right)}{\sqrt{-x}+3}=3-\sqrt{-x}$

11) $\frac{x+y-2\sqrt{xy}}{\sqrt{-x}+\sqrt{-y}}=\left|\begin{matrix}\textit{Из условия}: \\ x<0;\ \ y<0\end{matrix}\right|=\frac{-\left(\sqrt{-x}\right)^2-\left(\sqrt{-y}\right)^2-2\sqrt{(-x)(-y)}}{\sqrt{-x}+\sqrt{-y}}=$

$$=-\frac{\left(\sqrt{-x}+\sqrt{-y}\right)^2}{\sqrt{-x}+\sqrt{-y}}=-\left(\sqrt{-x}+\sqrt{-y}\right)$$

12) $\frac{a+\sqrt{ab}}{b+\sqrt{ab}}=\frac{-\left(\sqrt{-a}\right)^2+\sqrt{(-a)(-b)}}{-\left(\sqrt{-b}\right)^2+\sqrt{(-a)(-b)}}=\frac{\sqrt{-a}\left(\sqrt{-b}-\sqrt{-a}\right)}{\sqrt{-b}\left(\sqrt{-a}-\sqrt{-b}\right)}=-\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$

13) $\frac{x-2\sqrt[3]{x}+1}{x+2\sqrt[3]{x^2}-1}=\left|\begin{matrix}\sqrt[3]{x}=a \\ x=a^3 \\ \sqrt[3]{x^2}=a^2\end{matrix}\right|=\frac{a^3-2a+1}{a^3+2a^2-1}=\frac{a^3-a-a+1}{a^3+a^2+a^2-1}=\frac{a\left(a^2-1\right)-(a-1)}{a^2(a+1)+\left(a^2-1\right)}=$

$$=\frac{(a-1)\left(a^2+a-1\right)}{(a+1)\left(a^2+a-1\right)}=\frac{a-1}{a+1}=\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}$$

14) $\frac{2\sqrt{1-x^2}+x^2-2}{1-\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{x+1}}=\left|\begin{matrix}\sqrt{1-x^2}=a \\ 1-x^2=a^2 \\ x^2=1-a^2\end{matrix}\right|=\frac{2a+1-a^2-2}{1-a}=\frac{-a^2+2a-1}{1-a}=\frac{-(1-a)^2}{1-a}=$

$$=-(1-a)=a-1=\sqrt{1-x^2}-1.$$

1.2. Найдите наибольшее значение дроби $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{5}}{a-5}$.

Решение:

$$\frac{\sqrt{a}-\sqrt{5}}{a-5}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{5}}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{5}\right)}=\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{5}}$$

Значение выражения $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{5}}$ будет наибольшим, когда знаменатель дроби $\left(\sqrt{a}+\sqrt{5}\right)$ будет наименьшим, т.е. при $a=0$.

Значит, наибольшее значение дроби равно $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Освобождение от иррациональности в знаменателе дроби

Преобразование иррационального выражения к виду, не содержащему операции извлечения корня (степеней с рациональным показателем степени), называют ***освобождением от иррациональности.***

Для исключения иррациональности в знаменателе дроби нужно подобрать выражение, которое в произведении со знаменателем дает рациональное выражение, и умножить на найденный множитель числитель и знаменатель данной дроби.

Рассмотрим основные случаи освобождения от иррациональности в знаменателе дробного выражения.

1.3. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

1) $\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}}$ 2) $\frac{1}{\sqrt[3]{a^2b}}$ 3) $\frac{n}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$

4) $\frac{n}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}$ 5) $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$ 6) $\frac{1}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}$

7) $\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt{b}}$ 8) $\frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}$

Решение:

1) $\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}}\cdot\frac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x^2-4}}=\frac{(x-2)\cdot\sqrt{x^2-4}}{x^2-4}=\frac{(x-2)\cdot\sqrt{x^2-4}}{(x-2)(x+2)}=\frac{\sqrt{x^2-4}}{x+2}$

2) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2b}}\cdot\dfrac{\sqrt[3]{ab^2}}{\sqrt[3]{ab^2}}=\dfrac{\sqrt[3]{ab^2}}{ab}$

3) $\dfrac{n}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}\cdot\dfrac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}=\dfrac{n\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{a+b}$

4) $\dfrac{n}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}\cdot\dfrac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}=\dfrac{n\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)}{a+b}$

5) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}\cdot\dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{2}$

6) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}\cdot\dfrac{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}=\dfrac{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}{\left(\sqrt[4]{c}\right)^2-\left(\sqrt[4]{b}\right)^2}=\dfrac{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\cdot\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\dfrac{\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{a-b}$

7) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt{b}}\cdot\dfrac{\sqrt[3]{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt{b}}-\dfrac{\sqrt[3]{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[3]{a^2}-b}\cdot\dfrac{\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^2+b\sqrt[3]{a^2}+b^2}{\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^2+b\sqrt[3]{a^2}+b^2}=$

$=\dfrac{\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt{b}\right)\left(a\sqrt[3]{a}+b\sqrt[3]{a^2}+b^2\right)}{a^2-b^3}$

8) $\dfrac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}\cdot\dfrac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}=\dfrac{\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}\right)^2}{\left(\sqrt{a+b}\right)^2-\left(\sqrt{a-b}\right)^2}=$

$=\dfrac{a+b+2\sqrt{a^2-b^2}+a-b}{a+b-a+b}=\dfrac{2a+2\sqrt{a^2-b^2}}{2b}=\dfrac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}.$

Упрощение иррациональных алгебраических выражений

Порядок выполнения действий в иррациональных выражениях такой же, как и в рациональных.

Приведем примеры упрощения иррациональных выражений.

1.4. Упростите выражение: $\left(\dfrac{\sqrt{x}+3\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^{-1}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{8\left(\sqrt{y}\right)^3}$.

Решение:

1) $\dfrac{\sqrt{x}+3\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^{-1}=\dfrac{\sqrt{x}+3\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=$

$=\dfrac{\sqrt{x}+3\sqrt{y}-\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\dfrac{4\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

2) $\dfrac{4\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\cdot\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{8\left(\sqrt{y}\right)^3}=\dfrac{4\sqrt{y}}{8y\sqrt{y}}=\dfrac{1}{2y}$.

Ответ: $\dfrac{1}{2y}$.

1.5. Упростите выражение: $\left(\dfrac{2m-3n}{\sqrt{2m}+\sqrt{3n}}+\sqrt{3n}\right)^2$.

Решение:

$\left(\dfrac{2m-3n}{\sqrt{2m}+\sqrt{3n}}+\sqrt{3n}\right)^2=\left(\dfrac{\left(\sqrt{2m}-\sqrt{3n}\right)\left(\sqrt{2m}+\sqrt{3n}\right)}{\sqrt{2m}+\sqrt{3n}}+\sqrt{3n}\right)^2=$

$=\left(\sqrt{2m}-\sqrt{3n}+\sqrt{3n}\right)^2=2m$.

Ответ: $2m$.

1.6. Упростите выражение: $\left(\dfrac{\sqrt{y}}{x+\sqrt{xy}}-\dfrac{\sqrt{y}}{x-\sqrt{xy}}\right)\cdot\dfrac{x-y}{2\sqrt{xy}}$.

Решение:

1) $\dfrac{\sqrt{y}}{x+\sqrt{xy}}-\dfrac{\sqrt{y}}{x-\sqrt{xy}}=\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\right)=\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\left(\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}-\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}\right)=$

$=\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\cdot\dfrac{-2\sqrt{y}}{x-y}=\dfrac{-2y}{\sqrt{x}(x-y)}$.

2) $\dfrac{-2y}{\sqrt{x}(x-y)}\cdot\dfrac{x-y}{2\sqrt{xy}}=-\dfrac{\sqrt{y}}{x}$.

Ответ: $-\dfrac{\sqrt{y}}{x}$.

1.7. Упростите выражение: $\dfrac{\sqrt{\dfrac{m+2}{m-2}}+\sqrt{\dfrac{m-2}{m+2}}}{\sqrt{\dfrac{m+2}{m-2}}-\sqrt{\dfrac{m-2}{m+2}}}$.

Решение:

$$\frac{\sqrt{\dfrac{m+2}{m-2}}+\sqrt{\dfrac{m-2}{m+2}}}{\sqrt{\dfrac{m+2}{m-2}}-\sqrt{\dfrac{m-2}{m+2}}}\cdot\frac{\sqrt{\dfrac{m+2}{m-2}}}{\sqrt{\dfrac{m+2}{m-2}}}=\frac{\dfrac{m+2}{m-2}+1}{\dfrac{m+2}{m-2}-1}=\frac{m+2+m-2}{m+2-m+2}=\frac{2m}{4}=\frac{m}{2}.$$

Ответ: $\dfrac{m}{2}$.

1.8. Упростите выражение: $\left(\dfrac{\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{a}}{1-\sqrt{a}}+\dfrac{1+\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}}\right)\cdot\left(1+\dfrac{2}{\sqrt{a}}+\dfrac{1}{a}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

Решение:

1) $\dfrac{\sqrt[4]{a}\left(\sqrt[4]{a^2}-1\right)}{1-\sqrt{a}}+\dfrac{1+\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}}=\dfrac{\sqrt[4]{a}\left(\sqrt{a}-1\right)}{-\left(\sqrt{a}-1\right)}+\dfrac{1+\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}}=\dfrac{-\sqrt{a}+1+\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}}=\dfrac{1}{\sqrt[4]{a}}$

2) $1+\dfrac{2}{\sqrt{a}}+\dfrac{1}{a}=\dfrac{a+2\sqrt{a}+1}{a}=\dfrac{\left(\sqrt{a}+1\right)^2}{a}$

3) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{a}}\cdot\left(\dfrac{\left(\sqrt{a}+1\right)^2}{a}\right)^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\left(\sqrt{a}+1\right)\cdot\sqrt[4]{a}}=\dfrac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt{a}+1}$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt{a}+1}$.

1.9. Упростите: $\dfrac{a^2+2a-3+(a+1)\sqrt{a^2-9}}{a^2-2a-3+(a-1)\sqrt{a^2-9}}$.

Решение:

$$\frac{a^2+2a-3+(a+1)\sqrt{a^2-9}}{a^2-2a-3+(a-1)\sqrt{a^2-9}}=\frac{(a+3)(a-1)+(a+1)\sqrt{a-3}\sqrt{a+3}}{(a-3)(a+1)+(a-1)\sqrt{a-3}\sqrt{a+3}}=$$

$$=\frac{\sqrt{a+3}\left(\sqrt{a+3}(a-1)+(a+1)\sqrt{a-3}\right)}{\sqrt{a-3}\left(\sqrt{a-3}(a+1)+(a-1)\sqrt{a+3}\right)}=\frac{\sqrt{a+3}}{\sqrt{a-3}}=\sqrt{\frac{a+3}{a-3}}.$$

Ответ: $\sqrt{\frac{a+3}{a-3}}$.

1.10. Упростите выражение: $\sqrt{a}\cdot\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[8]{a}\cdot\ldots\cdot\sqrt[512]{a}$.

Решение:

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[8]{a}\cdot\ldots\cdot\sqrt[512]{a}=a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{4}}\cdot a^{\frac{1}{8}}\cdot\ldots\cdot a^{\frac{1}{512}}=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{512}}$$

Найдем сумму геометрической прогрессии:

$$S_n=\frac{b_1-b_n\cdot q}{1-q}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{512}\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{512}\right)}{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{512}=\frac{511}{512}$$

Значит: $\sqrt{a}\cdot\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[8]{a}\cdot\ldots\cdot\sqrt[512]{a}=a^{\frac{511}{512}}$.

Ответ: $a^{\frac{511}{512}}$.

В процессе преобразования иррационального выражения в ряде случаев целесообразно обозначить радикалы новыми переменными и свести задачу к преобразованию рационального выражения.

Рассмотрим данный прием на конкретных примерах.

1.11. Упростите выражение: $\dfrac{\sqrt{2-a}-\dfrac{5}{\sqrt{a+2}}}{\dfrac{5}{\sqrt{4-a^2}}-1}$.

Решение:

$$\frac{\sqrt{2-a}-\dfrac{5}{\sqrt{a+2}}}{\dfrac{5}{\sqrt{4-a^2}}-1}=\left|\begin{array}{l}\textit{Замена:}\\ \sqrt{2-a}=b\\ \sqrt{2+a}=c\end{array}\right|=\frac{b-\dfrac{5}{c}}{\dfrac{5}{bc}-1}=\frac{\dfrac{bc-5}{c}}{\dfrac{5-bc}{bc}}=\frac{(bc-5)bc}{(5-bc)c}=-b=-\sqrt{2-a}.$$

Ответ: $-\sqrt{2-a}$.

1.12. Упростите выражение: $\dfrac{\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{a^2b^2}+\sqrt[3]{b^4}}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}$.

Решение:

$$\frac{\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{a^2b^2}+\sqrt[3]{b^4}}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}=\left|\begin{array}{l}\text{Замена:}\\ \sqrt[3]{a}=x\\ \sqrt[3]{b}=y\end{array}\right|=\frac{x^4+x^2y^2+y^4}{x^2+xy+y^2}=\frac{\left(x^2+y^2\right)^2-x^2y^2}{x^2+xy+y^2}=$$

$$=\frac{\left(x^2+y^2-xy\right)\left(x^2+y^2+xy\right)}{x^2+xy+y^2}=x^2+y^2-xy=\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{ab}.$$

Ответ: $\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{ab}$.

1.13. Упростите выражение: $\dfrac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}-\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}$.

Решение:

$$\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}=\left|\begin{array}{ll}\sqrt{a+x}=b; & b^2=a+x\\ \sqrt{a-x}=c; & c^2=a-x\\ x=\dfrac{b^2-c^2}{2} & \end{array}\right|=\frac{b+c}{b-c}-\frac{2bc}{b^2-c^2}=$$

$$=\frac{b^2+2bc+c^2-2bc}{b^2-c^2}=\frac{b^2+c^2}{b^2-c^2}=\frac{a+x+a-x}{a+x-a+x}=\frac{2a}{2x}=\frac{a}{x}.$$

Ответ: $\dfrac{a}{x}$.

Преобразование иррациональных алгебраических выражений, содержащих модули

При преобразовании выражений, содержащих радикалы, часто допускаются ошибки, которые вызваны неумением правильно применять определение арифметического корня и абсолютной величины.

1.14. Упростите выражения:

1) $2\sqrt{x^2}+3\sqrt[3]{x^3}-4\sqrt[4]{x^8}$, $x\le 0$ **2)** $\sqrt{x^2-10x+25}+\sqrt{x^2+6x+9}$, $x\le -3$

3) $\sqrt{b^2+2b\sqrt{2}+2}+\sqrt{b^2-2b\sqrt{2}+2}$, $b\ge\sqrt{2}$

4) $\sqrt{x^2-6x+9}+\sqrt{2-x}+x-3$ 5) $x^2\cdot\sqrt{x^2-2+\frac{1}{x^2}}$, если $x<-1$

6) $\frac{\sqrt{(x+2)^2-8x}}{\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}}$ 7) $\frac{\sqrt{a^2-2ab+b^2}}{\sqrt{a^2+2ab+b^2}}+\frac{2a}{a+b}$, если $0<a<b$

8) $\frac{\sqrt{a^4-6a^3+9a^2}+\sqrt{4a^4-4a^3+a^2}}{\sqrt{a^2+4a+4}}$, если $\frac{1}{2}<a<3$

9) $\left(a^4\right)^{\frac{1}{4}}+\left(b^{\frac{1}{8}}\right)^4$, если $a=-1,5$ и $b=2,25$.

Решение:

1) $x\le 0$

$$2\sqrt{x^2}+3\sqrt[3]{x^3}-4\sqrt[4]{x^8}=2\cdot|x|+3x-4\left|x^2\right|=-2x+3x-4x^2=x-4x^2$$

2) $x\le -3$

$$\sqrt{x^2-10x+25}+\sqrt{x^2+6x+9}=\sqrt{(x-5)^2}+\sqrt{(x+3)^2}=|x-5|+|x+3|=$$

$$=-(x-5)-(x+3)=5-x-x-3=2-2x$$

3) $b\ge\sqrt{2}$

$$\sqrt{b^2+2b\sqrt{2}+2}+\sqrt{b^2-2b\sqrt{2}+2}=\sqrt{\left(b+\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{\left(b-\sqrt{2}\right)^2}=\left|b+\sqrt{2}\right|+\left|b-\sqrt{2}\right|=$$

$$=b+\sqrt{2}+b-\sqrt{2}=2b$$

4) $\sqrt{x^2-6x+9}+\sqrt{2-x}+x-3=\sqrt{(x-3)^2}+\sqrt{2-x}+x-3=|x-3|+\sqrt{2-x}+x-3$

Должно быть выполнено условие: $2-x\ge 0$ или $x\le 2$.

Тогда: $|x-3|+\sqrt{2-x}+x-3=3-x+\sqrt{2-x}+x-3=\sqrt{2-x}$.

5) $x<-1$

$$x^2\cdot\sqrt{x^2-2+\frac{1}{x^2}}=x^2\cdot\sqrt{\frac{x^4-2x^2+1}{x^2}}=x^2\cdot\sqrt{\frac{\left(x^2-1\right)^2}{x^2}}=x^2\cdot\frac{\left|x^2-1\right|}{|x|}=\frac{x^2\left(x^2-1\right)}{-x}=$$

$$=-x\left(x^2-1\right)=x-x^3$$

6) $\dfrac{\sqrt{(x+2)^2-8x}}{\sqrt{x}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}}=\dfrac{\sqrt{x^2-4x+4}\cdot\sqrt{x}}{x-2}=\dfrac{\sqrt{(x-2)^2}\cdot\sqrt{x}}{x-2}=\dfrac{|x-2|\sqrt{x}}{x-2}=$

$=\begin{cases}\sqrt{x}, & \text{если } x>2\\ -\sqrt{x}, & \text{если } 0<x<2\end{cases}$

7) $0<a<b$

$\dfrac{\sqrt{a^2-2ab+b^2}}{\sqrt{a^2+2ab+b^2}}+\dfrac{2a}{a+b}=\dfrac{\sqrt{(a-b)^2}}{\sqrt{(a+b)^2}}+\dfrac{2a}{a+b}=\dfrac{|a-b|}{|a+b|}+\dfrac{2a}{a+b}=\dfrac{b-a}{a+b}+\dfrac{2a}{a+b}=$

$=\dfrac{a+b}{a+b}=1$

8) $\dfrac{1}{2}<a<3$

$\dfrac{\sqrt{a^4-6a^3+9a^2}+\sqrt{4a^4-4a^3+a^2}}{\sqrt{a^2+4a+4}}=\dfrac{\sqrt{a^2(a-3)^2}+\sqrt{a^2(2a-1)^2}}{\sqrt{(a+2)^2}}=$

$=\dfrac{\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{(a-3)^2}+\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{(2a-1)^2}}{\sqrt{(a+2)^2}}=\dfrac{|a|\cdot|a-3|+|a|\cdot|2a-1|}{|a+2|}$

При $\dfrac{1}{2}<a<3$: $|a|=a$; $|a-3|=-a+3$; $|2a-1|=2a-1$ и $|a+2|=a+2$.

$\dfrac{|a|\cdot|a-3|+|a|\cdot|2a-1|}{|a+2|}=\dfrac{a(3-a)+a(2a-1)}{a+2}=\dfrac{a^2+2a}{a+2}=a$

9) $\left(a^4\right)^{\frac{1}{4}}+\left(b^{\frac{1}{8}}\right)^4=\sqrt[4]{a^4}+\left(\sqrt[8]{b}\right)^4=|a|+\sqrt{b}=|-1,5|+\sqrt{2,25}=1,5+1,5=3$.

Преобразование двойных радикалов

1.15. Упростите:

1) $\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}$ 2) $\sqrt{a+1-4\sqrt{a-3}}$

3) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$, если $x\in[1;2]$

4) $\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}+\sqrt{a-2\sqrt{a-1}}$, если $1<a<2$

Решение:

1) $\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}=\sqrt{\left(\sqrt{a-1}\right)^2+2\sqrt{a-1}+1}=\sqrt{\left(\sqrt{a-1}+1\right)^2}=\left|\sqrt{a-1}+1\right|=$

$=\sqrt{a-1}+1$

2) $\sqrt{a+1-4\sqrt{a-3}}=\sqrt{\left(\sqrt{a-3}\right)^2-4\sqrt{a-3}+4}=\sqrt{\left(\sqrt{a-3}-2\right)^2}=\left|\sqrt{a-3}-2\right|$

3) $x\in[1,2]$

$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=\sqrt{x-1+2\sqrt{x-1}+1}+\sqrt{x-1-2\sqrt{x-1}+1}=$

$=\sqrt{\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2}=\left|\sqrt{x-1}+1\right|+\left|\sqrt{x-1}-1\right|=$

$=\sqrt{x-1}+1+1-\sqrt{x-1}=2$

4) $1<a<2$

Введем замену: $t=\sqrt{a-1}$. Тогда $a=t^2+1$.

По условию $1<a<2$, значит:

$0<a-1<1$; $\quad 0<\sqrt{a-1}<1$; $\quad 0<t<1$.

$\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}+\sqrt{a-2\sqrt{a-1}}=\sqrt{t^2+1+2t}+\sqrt{t^2+1-2t}=$

$=\sqrt{(t+1)^2}+\sqrt{(t-1)^2}=|t+1|+|t-1|=t+1-(t-1)=2$.

Преобразование выражений, содержащих степени с рациональными показателями

Приведем примеры применения свойств степеней с рациональными показателями в преобразованиях выражений и вычислениях.

1.16. Упростите выражения:

1) $\dfrac{\sqrt[6]{a^5\cdot\sqrt[3]{a^{-1}}}}{a^{-\frac{2}{9}}}$ 2) $\sqrt[5]{x^2\cdot\sqrt[4]{x^{-3}}}$ 3) $\sqrt[3]{\dfrac{125a^3b^6}{0{,}008c^{-6}}}$ 4) $\left(\dfrac{x^{\frac{8}{3}}\cdot x^{-\frac{2}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}}\right)^{-\frac{3}{2}}$

5) $5a^2b\sqrt{\frac{1}{a^3b}}-2b\sqrt{\frac{a}{b}}-\frac{1}{b}\sqrt{4ab^3}+3a^3\sqrt{\frac{b}{a^5}}$

6) $\frac{1}{2}ab\sqrt{8a^3b}+\frac{1}{3}ab\sqrt{18ab^3}-a^2\sqrt{\frac{2b}{a}}-b^2\sqrt{\frac{2a}{b}}$

7) $\sqrt[5]{9b^6}:\left(\frac{1}{3b^3}\right)^{-\frac{3}{20}}\cdot\left(\frac{b^5}{3}\right)^{\frac{1}{4}}$

8) $\frac{1-a^{-\frac{1}{2}}}{1+a^{\frac{1}{2}}}-\frac{a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}}{a-1}$

9) $\frac{x-1}{x^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}+1}\cdot x^{\frac{1}{4}}+1$

10) $\frac{y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{2}}-z}{y^{\frac{2}{3}}-z}+\frac{y}{y+y^{\frac{2}{3}}z^{\frac{1}{2}}}$

11) $\left(\frac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}-\frac{a^{\frac{1}{6}}-b^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{3}}}\right)\cdot\frac{ab^{-\frac{1}{6}}-b^{\frac{5}{6}}}{2a^{\frac{1}{6}}-b^{\frac{1}{6}}}$

12) $\frac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\right)}-\left(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}\right)$

Решение:

1) $\frac{\sqrt[6]{a^5\cdot\sqrt[3]{a^{-1}}}}{a^{-\frac{2}{9}}}=\frac{\sqrt[6]{a^5\cdot a^{-\frac{1}{3}}}}{a^{-\frac{2}{9}}}=\frac{\sqrt[6]{a^{\frac{14}{3}}}}{a^{-\frac{2}{9}}}=\frac{a^{\frac{7}{9}}}{a^{-\frac{2}{9}}}=a^{\frac{7}{9}-\left(-\frac{2}{9}\right)}=a$

2) $\sqrt[5]{x^2\cdot\sqrt[4]{x^{-3}}}=\sqrt[5]{x^2\cdot x^{-\frac{3}{4}}}=\sqrt[5]{x^{\frac{5}{4}}}=x^{\frac{1}{4}}$

3) $\sqrt[3]{\frac{125a^3b^6}{0{,}008c^{-6}}}=\frac{5ab^2}{0{,}2c^{-2}}=25ab^2c^2$

4) $\left(\frac{x^{\frac{8}{3}}\cdot x^{-\frac{2}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}}\right)^{-\frac{3}{2}}=\left(\frac{x^2}{x^{\frac{4}{3}}}\right)^{-\frac{3}{2}}=\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{3}{2}}=x^{-1}=\frac{1}{x}$

5) $5a^2b\sqrt{\frac{1}{a^3b}}-2b\sqrt{\frac{a}{b}}-\frac{1}{b}\sqrt{4ab^3}+3a^3\sqrt{\frac{b}{a^5}}=5\sqrt{\frac{a^4b^2}{a^3b}}-2\sqrt{\frac{ab^2}{b}}-$

$-2\sqrt{\frac{ab^3}{b^2}}+3\sqrt{\frac{a^6b}{a^5}}=5\sqrt{ab}-2\sqrt{ab}-2\sqrt{ab}+3\sqrt{ab}=4\sqrt{ab}$

6) $\frac{1}{2}ab\sqrt{8a^3b}+\frac{1}{3}ab\sqrt{18ab^3}-a^2\sqrt{\frac{2b}{a}}-b^2\sqrt{\frac{2a}{b}}=\frac{1}{2}ab\cdot 2a\sqrt{2ab}+$

$+\frac{1}{3}ab\cdot 3b\sqrt{2ab}-a\sqrt{\frac{2ba^2}{a}}-b\sqrt{\frac{2ab^2}{b}}=a^2b\sqrt{2ab}+ab^2\sqrt{2ab}-a\sqrt{2ab}-b\sqrt{2ab}=$

$=ab\sqrt{2ab}(a+b)-\sqrt{2ab}(a+b)=(a+b)\left(ab\sqrt{2ab}-\sqrt{2ab}\right)=$

$=\sqrt{2ab}(a+b)(ab-1)$

7) $\sqrt[5]{9b^6}:\left(\frac{1}{3b^3}\right)^{-\frac{3}{20}}\cdot\left(\frac{b^5}{3}\right)^{\frac{1}{4}}=\left(3^{\frac{2}{5}}\cdot b^{\frac{6}{5}}\right):\left(3^{\frac{3}{20}}\cdot b^{\frac{9}{20}}\right)\cdot\left(\frac{b^{\frac{5}{4}}}{3^{\frac{1}{4}}}\right)=3^0\cdot b^2=b^2$

8) $\frac{1-a^{-\frac{1}{2}}}{1+a^{\frac{1}{2}}}-\frac{a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}}{a-1}=\frac{1-a^{-\frac{1}{2}}}{1+a^{\frac{1}{2}}}-\frac{a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}}{\left(a^{\frac{1}{2}}-1\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+1\right)}=\frac{a^{\frac{1}{2}}-1-1+a^{-\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}{\left(a^{\frac{1}{2}}-1\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+1\right)}=$

$=\frac{-2}{a-1}=\frac{2}{1-a}$

9) $\frac{x-1}{x^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}+1}\cdot x^{\frac{1}{4}}+1=\frac{\left(x^{\frac{1}{2}}-1\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+1\right)}{x^{\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{4}}+1\right)}\cdot\frac{x^{\frac{1}{4}}\left(x^{\frac{1}{4}}+1\right)}{x^{\frac{1}{2}}+1}\cdot x^{\frac{1}{4}}+1=x^{\frac{1}{2}}-1+1=x^{\frac{1}{2}}$

10) $\frac{y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{2}}-z}{y^{\frac{2}{3}}-z}+\frac{y}{y+y^{\frac{2}{3}}z^{\frac{1}{2}}}=\frac{z^{\frac{1}{2}}\left(y^{\frac{1}{3}}-z^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(y^{\frac{1}{3}}-z^{\frac{1}{2}}\right)\left(y^{\frac{1}{3}}+z^{\frac{1}{2}}\right)}+\frac{y}{y^{\frac{2}{3}}\left(y^{\frac{1}{3}}+z^{\frac{1}{2}}\right)}=$

$=\frac{z^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{1}{3}}+z^{\frac{1}{2}}}+\frac{y^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{1}{3}}+z^{\frac{1}{2}}}=1$

11) $\left(\frac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}-\frac{a^{\frac{1}{6}}-b^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{3}}}\right)\cdot\frac{ab^{-\frac{1}{6}}-b^{\frac{5}{6}}}{2a^{\frac{1}{6}}-b^{\frac{1}{6}}}$

1) $$\frac{a^{\frac{1}{3}}}{\left(a^{\frac{1}{6}}\right)^{3}-\left(b^{\frac{1}{6}}\right)^{3}}-\frac{a^{\frac{1}{6}}-b^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{3}}}=\frac{a^{\frac{1}{3}}-\left(a^{\frac{1}{6}}-b^{\frac{1}{6}}\right)^{2}}{\left(a^{\frac{1}{6}}-b^{\frac{1}{6}}\right)\left(a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{3}}\right)}=$$

$$=\frac{a^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}+2a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}-b^{\frac{1}{3}}}{\left(a^{\frac{1}{6}}-b^{\frac{1}{6}}\right)\left(a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{3}}\right)}=\frac{b^{\frac{1}{6}}\left(2a^{\frac{1}{6}}-b^{\frac{1}{6}}\right)}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}$$

2) $$\frac{ab^{-\frac{1}{6}}-b^{\frac{5}{6}}}{2a^{\frac{1}{6}}-b^{\frac{1}{6}}}=\frac{\frac{a}{b^{\frac{1}{6}}}-b^{\frac{5}{6}}}{2a^{\frac{1}{6}}-b^{\frac{1}{6}}}=\frac{a-b}{b^{\frac{1}{6}}\left(2a^{\frac{1}{6}}-b^{\frac{1}{6}}\right)}$$

3) $$\frac{b^{\frac{1}{6}}\left(2a^{\frac{1}{6}}-b^{\frac{1}{6}}\right)}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{a-b}{b^{\frac{1}{6}}\left(2a^{\frac{1}{6}}-b^{\frac{1}{6}}\right)}=\frac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}=a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}$$

Ответ: $a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}$

12) $$\frac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\right)}-\left(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}\right)=\frac{a-b-a^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)}{a^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\right)}=\frac{-b+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\right)}=$$

$$=\frac{b^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)}{a^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\right)}=\frac{b^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}\right)}{a^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\right)}=\frac{b^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}\right)}{a^{\frac{1}{2}}}.$$

§2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Иррациональным уравнением называется уравнение, содержащее неизвестное под знаком радикала.

Основная цель при решении иррациональных уравнений состоит в том, чтобы освободиться от знака радикала и получить рациональное уравнение.

При решении иррациональных уравнений применяют следующие основные методы:

- возведение в степень обеих частей уравнения;
- введение новой переменной;
- разложение на множители.

Рассмотрим каждый из этих методов.

Метод возведения в степень обеих частей уравнения

Основная идея данного метода состоит в следующем: сначала изолируют один радикал, затем обе части уравнения возводят в степень, потом снова изолируют радикал и т.д. Следует учесть, что при возведении обеих частей уравнения в четную степень, возможно появление посторонних корней. В этом случае обязательна проверка найденных корней подстановкой в исходное уравнение.

При возведении в нечетную степень обеих частей уравнения посторонние корни не появляются.

Рассмотрим решение *простейших иррациональных уравнений*. Так называют уравнения вида:

$$\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)} \quad \text{и} \quad \sqrt{f(x)}=g(x).$$

К решению простейших иррациональных уравнений в итоге сводится решение большинства иррациональных уравнений.

Избавиться от радикалов в простейших уравнениях можно возведением в квадрат. Но, как уже говорилось ранее, при этом могут появиться посторонние корни. Поэтому каждый из найденных корней полученного уравнения должен быть проверен: является ли он решением простейшего уравнения или нет. Проверка осуществляется непосредственной подстановкой в исходное иррациональное уравнение.

2.1. Решите уравнение: $\sqrt{x^2+5x+1}=2x-1$.

Решение:

$$\left(\sqrt{x^2+5x+1}\right)^2=(2x-1)^2$$

$x^2+5x+1=4x^2-4x+1$

$3x^2-9x=0$

$x_1=0,\ \ x_2=3$

Проверка:

1) При $x=0$: $\sqrt{0^2+5\cdot 0+1}=2\cdot 0-1$; $1=-1$ - неверно.

$x=0$ - посторонний корень

2) При $x=3$: $\sqrt{3^2+5\cdot 3+1}=2\cdot 3-1$; $5=5$ - верно.

Ответ: $\{3\}$.

В данном случае проверка оказалась довольно простой. Но могут встретиться уравнения, корни которых иррациональны, и проверка приводит к очень сложным вычислениям. В таких случаях лучше решать простейшие иррациональные уравнения с помощью равносильных преобразований.

Полезно запомнить следующие схемы:

	Уравнение	Равносильный переход
1.	$\sqrt{f(x)}=g(x)$	$\begin{cases} g(x)\ge 0 \\ f(x)=g^2(x) \end{cases}$
2.	$\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}$	$\begin{cases} f(x)\ge 0 \quad (g(x)\ge 0) \\ f(x)=g(x) \end{cases}$

Замечания:

1. В первом случае неравенство $g(x)\ge 0$ выражает условие, при котором иррациональное уравнение можно возвести в квадрат. Оно «отсекает» посторонние решения и позволяет обходиться без проверки.

2. Во втором случае можно проверять любое из неравенств $f(x)\ge 0$ или $g(x)\ge 0$. На практике выбирают то, которое проще в решении.

2.2. Решите уравнение: $\sqrt{2x-3}=4-x$.

Решение:

Данное уравнение равносильно системе:

$\begin{cases} 4-x\ge 0, \\ 2x-3=(4-x)^2; \end{cases}$ $\begin{cases} x\le 4, \\ 2x-3=(4-x)^2; \end{cases}$ $\begin{cases} x\le 4, \\ 2x-3=x^2-8x+16; \end{cases}$

$\begin{cases} x\le 4, \\ x^2-10x+19=0; \end{cases}$ $\begin{cases} x\le 4, \\ x_{1,2}=5\pm\sqrt{6}; \end{cases}$ $x=5-\sqrt{6}$.

$x=5+\sqrt{6}$ - посторонний корень, так как $5+\sqrt{6}>4$.

Ответ: $\{5-\sqrt{6}\}$.

2.3. Решите уравнение: $\sqrt{x^2+3x-4}=\sqrt{2x+2}$.

Решение:

$\begin{cases} 2x+2\ge 0, \\ x^2+3x-4=2x+2; \end{cases}$ $\begin{cases} x\ge -1, \\ x^2+x-6=0; \end{cases}$ $\begin{cases} x\ge -1, \\ x_1=2, \quad x_2=-3; \end{cases}$

$x=2$.

Ответ: $\{2\}$.

2.4. Решите уравнение: $1+\sqrt{1+x\sqrt{x^2-24}}=x$.

Решение:

$\sqrt{1+x\sqrt{x^2-24}}=x-1$

Данное уравнение равносильно системе:

$\begin{cases} x-1\ge 0, \\ 1+x\sqrt{x^2-24}=x^2-2x+1; \end{cases}$ $\begin{cases} x\ge 1, \\ x\left(\sqrt{x^2-24}-(x-2)\right)=0; \end{cases}$

$\begin{cases} x\ge 1, \\ \left[\begin{array}{l} x=0 - \textit{посторон. корень}, \\ \sqrt{x^2-24}=x-2; \end{array}\right. \end{cases}$ $\begin{cases} x\ge 1, \\ \sqrt{x^2-24}=x-2; \end{cases}$

$\begin{cases} x\ge 1, \\ x-2\ge 0, \\ x^2-24=x^2-4x+4; \end{cases}$ $\begin{cases} x\ge 2, \\ 4x-28=0; \end{cases}$ $\begin{cases} x\ge 2, \\ x=7. \end{cases}$

Ответ: $\{7\}$.

Вывод. Если корни, полученные в результате возведения в квадрат, достаточно простые (например, целые), то можно не беспокоиться о равносильности переходов, а просто проверить их непосредственной подстановкой в исходное уравнение.

В случаях, когда проверка затруднительна, нужно аккуратно следить за тем, чтобы преобразования были равносильными и не появились посторонние корни.

Рассмотрим уравнения, содержащие два радикала.

2.5. Решите уравнение: $\sqrt{x+5}+\sqrt{5-x}=\frac{x}{2}$.

Решение:

$$\sqrt{x+5}+\sqrt{5-x}=\frac{x}{2}$$

$$\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{5-x}\right)^2=\left(\frac{x}{2}\right)^2$$

$$x+5+5-x+2\sqrt{25-x^2}=\frac{x^2}{4}$$

$$2\sqrt{25-x^2}=\frac{x^2}{4}-10$$

$$\left(2\sqrt{25-x^2}\right)^2=\left(\frac{x^2}{4}-10\right)^2$$

$$100-4x^2=\frac{x^4}{16}-5x^2+100$$

$$\frac{x^4}{16}-x^2=0$$

$$x^2\left(x^2-16\right)=0$$

$$x_{1,2}=0,\quad x_{3,4}=\pm4$$

Проверка:

1) При $x=-4$: $1+3=-2$ - неверно. $x=-4$ - посторонний корень.

2) При $x=0$: $2\sqrt{5}=0$ - неверно. $x=0$ - посторонний корень.

3) При $x=4$: $3+1=-2$ - неверно. $x=4$ - посторонний корень.

Ответ: решений нет.

2.6. Решите уравнение: $\sqrt{3x-1}-\sqrt{x-2}=3$.

Решение:

$$\begin{cases} 3x-1\ge 0, \\ x-2\ge 0, \\ \left(\sqrt{3x-1}\right)^2=\left(3+\sqrt{x-2}\right)^2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x\ge \frac{1}{3}, \\ x\ge 2, \\ 3x-1=9+6\sqrt{x-2}+x-2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\ge 2, \\ 6\sqrt{x-2}=2x-8; \end{cases} \qquad \begin{cases} x\ge 2, \\ 3\sqrt{x-2}=x-4; \end{cases} \qquad \begin{cases} x\ge 2, \\ x\ge 4, \\ 9(x-2)=x^2-8x+16; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\ge 4, \\ x^2-17x+34=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x\ge 4, \\ x_{1,2}=\frac{17\pm 3\sqrt{17}}{2}; \end{cases} \qquad x=\frac{17+3\sqrt{17}}{2}.$$

$x=\frac{17-3\sqrt{17}}{2}<4$ - посторонний корень.

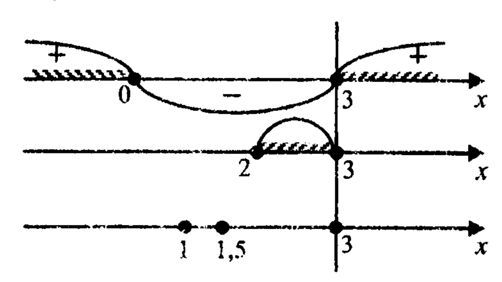
Ответ: $\left\{\frac{17+3\sqrt{17}}{2}\right\}$.

2.7. Решите уравнение: $\sqrt{x^2-3x}\cdot\sqrt{2x-4}=3-x$.

Решение:

$$\begin{cases} x^2-3x\ge 0, \\ 2x-4\ge 0, \\ 3-x\ge 0, \\ x(x-3)(2x-4)=(3-x)^2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x(x-3)\ge 0, \\ x\ge 2, \\ x\le 3, \\ (x-3)\left(2x^2-4x-x+3\right)=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(x-3)\ge 0, \\ 2\le x\le 3, \\ (x-3)\left(2x^2-5x+3\right)=0; \end{cases}$$



Ответ: $\{3\}$.

Метод введения новой переменной

Данный метод применяется в том случае, когда в уравнении неоднократно встречается некоторое выражение, зависящее от неизвестной величины. Тогда имеет смысл принять это выражение за новую переменную и решить уравнение сначала относительно введенной неизвестной, а потом найти исходную величину. В ряде случаев удачная замена переменной облегчает преобразования и упрощает решение задачи.

Рассмотрим метод введения новой переменной на примерах.

2.8. Решите уравнение: $2x^2+3x+\sqrt{2x^2+3x+9}=33$.

Решение:

Введем новую переменную: $\sqrt{2x^2+3x+9}=a$, $a\geq 0$

Тогда исходное уравнение примет вид:

$a^2+a-9=33$

$a^2+a-42=0$

$a_1=-7<0$, $a_2=6$

Тогда: $\sqrt{2x^2+3x+9}=6$.

Замечание: При решении данного уравнения можно не опасаться появления посторонних корней, так как его правая часть положительна при любых значениях переменной x.

$2x^2+3x+9=36$

$2x^2+3x-27=0$

$x_1=-\dfrac{9}{2}$, $x_2=3$.

Ответ: $\left\{-\dfrac{9}{2};\ 3\right\}$.

2.9. Решите уравнение: $x^2-5x+4\sqrt{x^2-5x+10}=2$.

Решение:

$x^2-5x+10+4\sqrt{x^2-5x+10}-12=0$

Сделаем замену: $a=\sqrt{x^2-5x+10}$; $a\geq 0$.

$a^2+4a-12=0$

$a_1=-6<0$, $\quad a_2=2$

Тогда: $\quad \sqrt{x^2-5x+10}=2$.

$x^2-5x+10=4$

$x^2-5x+6=0$

$x_1=2$; $\ x_2=3$.

Ответ: $\{2;3\}$.

2.10. Решите уравнение: $\sqrt{\dfrac{2x+1}{x-1}}-2\sqrt{\dfrac{x-1}{2x+1}}=1$.

Решение:

Сделаем замену: $\sqrt{\dfrac{2x+1}{x-1}}=a$, $\ a>0$

$$a-\frac{2}{a}=1$$

$a^2-a-2=0$

$a_1=-1<0$; $\quad a_2=2$

Тогда: $\quad \sqrt{\dfrac{2x+1}{x-1}}=2$.

$\dfrac{2x+1}{x-1}=4$; $\quad 2x+1=4x-4$; $\quad 2x=5$; $\quad x=2{,}5$.

Ответ: $\{2{,}5\}$.

2.11. Решите уравнение: $\sqrt{\dfrac{2x+2}{x+2}}-\sqrt{\dfrac{x+2}{2x+2}}=\dfrac{7}{12}$.

Решение:

Замена: $a=\sqrt{\dfrac{2x+2}{x+2}}$; $\ a>0$.

$$a-\frac{1}{a}=\frac{7}{12}$$

$12a^2-7a-12=0$

$a_1=-\frac{3}{4}<0$; $a_2=\frac{4}{3}$

$\sqrt{\frac{2x+2}{x+2}}=\frac{4}{3}$; $\frac{2x+2}{x+2}=\frac{16}{9}$; $\frac{x+1}{x+2}=\frac{8}{9}$; $9x+9=8x+16$; $x=7$.

Ответ: $\{7\}$.

2.12. Решите уравнение: $\sqrt{x^2+4x+8}+\sqrt{x^2+4x+4}=\sqrt{2(x^2+4x+6)}$.

Решение:

Введем новую переменную: $x^2+4x+6=a$, $a\geq 0$.

Тогда исходное уравнение примет вид:

$\sqrt{a+2}+\sqrt{a-2}=\sqrt{2a}$

$a+2+a-2+2\sqrt{a^2-4}=2a$

$a^2-4=0$

$a_1=-2<0$, $a_2=2$

$x^2+4x+6=2$; $x^2+4x+4=0$; $x=-2$.

Ответ: $\{-2\}$.

2.13. Решите уравнение: $\sqrt{2x^2+5x-2}-\sqrt{2x^2+5x-9}=1$.

Решение:

Замена: $a=2x^2+5x-9$, $a\geq 0$.

$\sqrt{a+7}-\sqrt{a}=1$

$\sqrt{a+7}=1+\sqrt{a}$

$a+7=1+2\sqrt{a}+a$

$\sqrt{a}=3$; $a=9$.

Тогда: $2x^2+5x-9=9$.

$2x^2+5x-18=0$

$x_1=-4{,}5$; $x_2=2$.

Ответ: $\{-4{,}5;\ 2\}$.

Многие иррациональные уравнения решаются проще, если ввести две вспомогательные переменные с последующим переходом к рациональной системе.

2.14. Решите уравнение: $\sqrt{2x-3}+\sqrt{4x+1}=4$.

Решение:

Введем новые переменные: $\sqrt{2x-3}=a$ $(a\geq 0)$ и $\sqrt{4x+1}=b$ $(b\geq 0)$.

Тогда: $\begin{cases} a^2=2x-3, \\ b^2=4x+1; \end{cases}$ $\quad 2a^2-b^2=-7$.

Можно записать следующую систему уравнений:

$\begin{cases} a+b=4, \\ 2a^2-b^2=-7; \end{cases}$ $\quad \begin{cases} b=4-a, \\ 2a^2-b^2=-7; \end{cases}$

$2a^2-(4-a)^2+7=0$

$a^2+8a-9=0$

$a_1=-9<0$; $\quad a_2=1$

$\sqrt{2x-3}=1$; $\quad x=2$.

Ответ: $\{2\}$.

Метод разложения на множители

Для решения иррациональных уравнений данным методом следует пользоваться ***правилом***:

Произведение равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей, входящих в это произведение, равен нулю, а остальные при этом имеют смысл.

Уравнение $\sqrt{f(x)}\cdot g(x)=0$ равносильно системе:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ g(x)=0 \end{array}\right. \\ f(x)\geq 0 \end{cases}$$

2.15. Решите уравнение: $\left(x^2-5x-6\right)\sqrt{\dfrac{x+2}{x-5}}=0$.

Решение:

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\dfrac{x+2}{x-5}=0,\\ x^2-5x-6=0,\end{array}\right.\\ \dfrac{x+2}{x-5}\geq 0;\end{cases} \qquad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=-2,\\ x=6,\\ x=-1,\end{array}\right.\\ x\in(-\infty;\ -2]\cup(5;\ \infty);\end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l}x=-2,\\ x=6.\end{array}\right.$$

Ответ: $\{-2;\ 6\}$.

2.16. Решите уравнение: $\sqrt{x-3}\cdot x^2=4\sqrt{x-3}$.

Решение:

$$\sqrt{x-3}\cdot\left(x^2-4\right)=0$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x-3=0,\\ x^2-4=0,\end{array}\right.\\ x-3\geq 0;\end{cases} \qquad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=3,\\ x=\pm 2,\end{array}\right.\\ x\geq 3;\end{cases} \qquad x=3.$$

Ответ: $\{3\}$.

2.17. Решите уравнение: $\sqrt{x^2-5x+6}-3\sqrt{x-3}-5\sqrt{x-2}+15=0$.

Решение:

$$\sqrt{(x-3)(x-2)}-3\sqrt{x-3}-5\sqrt{x-2}+15=0$$

$$\sqrt{x-3}\left(\sqrt{x-2}-3\right)-5\left(\sqrt{x-2}-3\right)=0$$

$$\left(\sqrt{x-3}-5\right)\left(\sqrt{x-2}-3\right)=0$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sqrt{x-3}-5=0,\\ \sqrt{x-2}-3=0,\end{array}\right.\\ x-3\geq 0,\\ x-2\geq 0;\end{cases} \qquad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sqrt{x-3}=5,\\ \sqrt{x-2}=3,\end{array}\right.\\ x\geq 3;\end{cases} \qquad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=28,\\ x=11,\end{array}\right.\\ x\geq 3;\end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l}x=28,\\ x=11.\end{array}\right.$$

Ответ: $\{11;\ 28\}$.

2.18. Решите уравнение: $(x-1)\sqrt{x^2-x-6}=6x-6$.

Решение:

$$(x-1)\sqrt{x^2-x-6}-6(x-1)=0$$

$$(x-1)\left(\sqrt{x^2-x-6}-6\right)=0$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x-1=0,\\ \sqrt{x^2-x-6}-6=0,\end{array}\right.\\ x^2-x-6\ge 0;\end{cases}\qquad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=1,\\ x^2-x-6=36,\end{array}\right.\\ (x+2)(x-3)\ge 0;\end{cases}\qquad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=1,\\ x^2-x-42=0,\end{array}\right.\\ x\in(-\infty;\ -2]\cup[3;\ \infty);\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=1,\\ x=-6,\\ x=7,\end{array}\right.\\ x\in(-\infty;\ -2]\cup[3;\ \infty);\end{cases}\qquad \left[\begin{array}{l}x=-6,\\ x=7.\end{array}\right.$$

Ответ: $\{-6;\ 7\}$.

2.19. Решите уравнение: $\sin 2x\cdot\sqrt{4-x^2}=0$.

Решение:

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sin 2x=0,\\ \sqrt{4-x^2}=0,\end{array}\right.\\ 4-x^2\ge 0;\end{cases}\qquad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}2x=\pi k,\ \ k\in\mathbb{Z}\\ x^2=4,\end{array}\right.\\ (x-2)(x+2)\le 0;\end{cases}\qquad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi k}{2},\ \ k\in\mathbb{Z}\\ x=\pm 2\end{array}\right.\\ x\in[-2;\ 2];\end{cases}$$

Учитывая, что решения исходного уравнения должны принадлежать отрезку $[-2;\ 2]$, из всего множества решений $\left\{\dfrac{\pi k}{2}\right\}$ можно взять только следующие три корня:

$k_1=0:\quad x_1=0;$

$k_2=1:\quad x_2=\dfrac{\pi}{2};$

$k_3=-1:\quad x_3=-\dfrac{\pi}{2}.$

Остальные значения не входят в интервал $[-2;\ 2]$, поскольку $\pi\approx 3{,}14$, что больше 2.

Ответ: $\left\{0;\ \pm\dfrac{\pi}{2};\ \pm 2\right\}$.

Дополнительные методы решения иррациональных уравнений

К дополнительным методам решения иррациональных уравнений относятся следующие методы:

- умножение на сопряженное;
- переход к уравнению с модулем;
- метод анализа уравнения;
- использование монотонности функции.

Рассмотрим на примерах каждый из этих методов.

Метод умножения на сопряженное

В основе данного способа решения иррациональных уравнений лежит формула $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)=a-b$.

Иногда использование этой формулы облегчает решение.

2.20. Решите уравнение: $\sqrt{x^2+5x+3}-\sqrt{x^2+3x+2}=2x+1$.

Решение:

Умножим обе части уравнения на сумму корней:

$$\left(\sqrt{x^2+5x+3}-\sqrt{x^2+3x+2}\right)\left(\sqrt{x^2+5x+3}+\sqrt{x^2+3x+2}\right)=$$

$$=(2x+1)\left(\sqrt{x^2+5x+3}+\sqrt{x^2+3x+2}\right)$$

$$x^2+5x+3-x^2-3x-2=(2x+1)\left(\sqrt{x^2+5x+3}+\sqrt{x^2+3x+2}\right)$$

$$2x+1=(2x+1)\left(\sqrt{x^2+5x+3}+\sqrt{x^2+3x+2}\right)$$

$$(2x+1)\left(\sqrt{x^2+5x+3}+\sqrt{x^2+3x+2}-1\right)=0$$

$$\left[\begin{array}{l}2x+1=0\\ \sqrt{x^2+5x+3}+\sqrt{x^2+3x+2}=1\end{array}\right.$$

Решением первого уравнения совокупности является $x=-\frac{1}{2}$.

Для того чтобы решить второе уравнение совокупности, сложим его с исходным иррациональным уравнением:

$$+\begin{cases}\sqrt{x^2+5x+3}+\sqrt{x^2+3x+2}=1\\ \sqrt{x^2+5x+3}-\sqrt{x^2+3x+2}=2x+1\end{cases}$$

$$2\sqrt{x^2+5x+3}=2x+2$$

$$\sqrt{x^2+5x+3}=x+1$$

$$\begin{cases}x+1\ge 0,\\ x^2+5x+3=x^2+2x+1;\end{cases}\qquad \begin{cases}x\ge -1,\\ 3x=-2;\end{cases}\qquad x=-\frac{2}{3}.$$

Проверка показывает, что оба корня удовлетворяют исходному уравнению.

Ответ: $\left\{-\frac{2}{3};\ -\frac{1}{2}\right\}$.

2.21. Решите уравнение: $\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}+\dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}=34$.

Решение:

Освободимся от иррациональности в знаменателе каждой дроби:

$$\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}\cdot\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}+\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\cdot\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}=34$$

$$\frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2}{x^2-\left(x^2-1\right)}+\frac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^2}{x^2-\left(x^2-1\right)}=34$$

$$\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2+\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^2=34$$

$$x^2+x^2-1+2x\sqrt{x^2-1}+x^2+x^2-1-2x\sqrt{x^2-1}=34$$

$$4x^2=36;$$

$$x_1=3,\quad x_2=-3$$

Проверка показывает, что оба корня удовлетворяют исходному уравнению.

Ответ: $\{-3;\ 3\}$.

2.22. Решите уравнение: $\sqrt{2x^2+8x+7}-\sqrt{2x^2-8x+7}=2x$.

Решение:

Умножим обе части уравнения на сумму корней:

$$\left(\sqrt{2x^2+8x+7}-\sqrt{2x^2-8x+7}\right)\left(\sqrt{2x^2+8x+7}+\sqrt{2x^2-8x+7}\right)=$$

$$=2x\left(\sqrt{2x^2+8x+7}+\sqrt{2x^2-8x+7}\right)$$

$$\left(\sqrt{2x^2+8x+7}\right)^2-\left(\sqrt{2x^2-8x+7}\right)^2=2x\left(\sqrt{2x^2+8x+7}+\sqrt{2x^2-8x+7}\right)$$

$$16x=2x\left(\sqrt{2x^2+8x+7}+\sqrt{2x^2-8x+7}\right)$$

$$2x\left(\sqrt{2x^2+8x+7}+\sqrt{2x^2-8x+7}-8\right)=0$$

$$\left[\begin{array}{l}x=0\\ \sqrt{2x^2+8x+7}+\sqrt{2x^2-8x+7}=8\end{array}\right.$$

Для того чтобы решить второе уравнение совокупности, сложим его с исходным иррациональным уравнением:

$$+\begin{cases}\sqrt{2x^2+8x+7}+\sqrt{2x^2-8x+7}=8\\ \sqrt{2x^2+8x+7}-\sqrt{2x^2-8x+7}=2x\end{cases}$$

$$2\sqrt{2x^2+8x+7}=2x+8$$

$$\sqrt{2x^2+8x+7}=x-4$$

$$\begin{cases}x+4\ge 0,\\ 2x^2+8x+7=x^2+8x+16;\end{cases}\quad \begin{cases}x\ge -4,\\ x^2=9;\end{cases}\quad \begin{cases}x\ge -4,\\ x_1=3,\quad x_2=-3.\end{cases}$$

Проверка показывает, что все три корня удовлетворяют исходному уравнению.

Ответ: $\{-3;0;3\}$.

Метод перехода к уравнению с модулем

Данный метод применяется, когда подкоренные выражения в иррациональном уравнении представляют собой полные квадраты.

2.23. Решите уравнение: $\sqrt{\left(x^2-3x+2\right)^2}=3x-x^2-2$.

Решение:

$$\sqrt{\left(x^2-3x+2\right)^2}=3x-x^2-2$$

$$|x^2-3x+2| = -(x^2-3x+2)$$

Полученное соотношение справедливо только в случае, если:

$$x^2-3x+2 \le 0$$

$$(x-1)(x-2) \le 0$$

$$x \in [1;2].$$

Ответ: $x \in [1;2]$.

2.24. Решите уравнение: $\sqrt{|x-7|} = x-1$.

Решение:

Данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} x-1 \ge 0 \\ |x-7| = (x-1)^2 \end{cases}$$

1) $\begin{cases} x \ge 1, \\ x-7 \ge 0, \\ x-7 = (x-1)^2; \end{cases}$ $\begin{cases} x \ge 7, \\ x^2-3x+8 = 0. \end{cases}$

Квадратное уравнение решений не имеет.

2) $\begin{cases} x \ge 1, \\ x-7 < 0, \\ -(x-7) = (x-1)^2; \end{cases}$ $\begin{cases} 1 \le x < 7, \\ x^2-x-6 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 1 \le x < 7, \\ x_1 = -2, \ x_2 = 3; \end{cases}$ $x = 3$.

Ответ: $x = 3$.

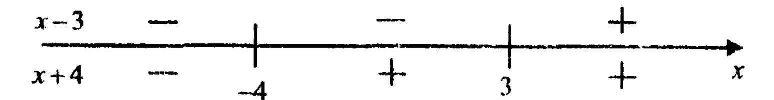
2.25. Решите уравнение: $\sqrt{x^2-6x+9} + \sqrt{x^2+8x+16} = 11$.

Решение:

$$\sqrt{x^2-6x+9} + \sqrt{x^2+8x+16} = 11;$$

$$\sqrt{(x-3)^2} + \sqrt{(x+4)^2} = 11;$$

$$|x-3| + |x+4| = 11;$$



1) $x\in(-\infty;\ -4)$	2) $x\in[-4;\ 3]$	3) $x\in(3;\ \infty)$
$-x+3-x-4=11$	$-x+3+x+4=11$	$x-3+x+4=11$
$-2x-1=11$	$7\neq 11$	$2x=10$
$x_1=-6$	решений нет	$x_2=5$.

Ответ: $\{-6;\ 5\}$.

Метод анализа уравнения

В иррациональных уравнениях встречаются такие, которые не решаются с помощью приведенных выше приемов. В подобных случаях иногда может оказаться полезным анализ области определения функций, входящих в уравнение, а также использование свойств корней степени n.

Отметим следующие свойства корней, которыми мы постоянно будем пользоваться при решении уравнений данным методом:

1. Все корни четной степени являются арифметическими, т.е. если подкоренное выражение отрицательно, то корень лишен смысла; если подкоренное выражение равно нулю, то корень также равен нулю; если подкоренное выражение положительно, то значение корня положительно.

2. Все корни нечетной степени определены при любом значении подкоренного выражения.

3. Функции $y=\sqrt[2n]{x}$ и $y=\sqrt[2n+1]{x}$ являются возрастающими на своей области определения.

В ряде случаев, не прибегая к преобразованиям, можно установить, что уравнение не имеет решения.

а) $\sqrt{x+1}+\sqrt{20}=\sqrt{5}$

$\sqrt{x+1}=-\sqrt{5}$

Арифметический корень не может быть отрицательным числом, поэтому уравнение решений не имеет.

б) $\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2+9}=4$

$\sqrt{x^2+4}\geq 2$; $\sqrt{x^2+9}\geq 3$

уравнение не имеет решений

в) $\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2x^2+5}=1$

$x^2+1<2x^2+5$ при любом значении неизвестного x,

поэтому уравнение не имеет решений.

г) $\sqrt{4-x}-\sqrt{x-6}=2$

ОДЗ:

$\begin{cases} 4-x\ge 0, \\ x-6\ge 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x\le 4, \\ x\ge 6; \end{cases}$ $x\in\varnothing$.

уравнение не имеет решений.

Использование монотонности функций

Использование монотонности функций, входящих в уравнение, нередко значительно упрощает техническую часть решения.

Сформулируем свойства монотонных функций и теорему о корне.

1. Сумма возрастающих функций есть функция, возрастающая на их общей области определения.

2. Сумма убывающих функций есть функция, убывающая на их общей области определения.

3. Разность возрастающей и убывающей функций есть функция, возрастающая на их общей области определения.

4. Разность убывающей и возрастающей функций есть функция, убывающая на их общей области определения.

5. ***Теорема о корне.***

Пусть $y=f(x)$ – монотонная на некотором промежутке функция. Тогда при любом значении a уравнение $f(x)=a$ имеет на этом промежутке не более одного корня.

Наглядный смысл теоремы о корне:

Горизонтальная прямая $y=a$ может пересечь график монотонной функции $y=f(x)$ не более, чем в одной точке (т.е. либо вообще его не пересекает, либо пересекает в единственной точке).

Рассмотрим примеры.

2.26. Решите уравнение: $\sqrt{37x+12}-\sqrt{31-6x}=2$.

Решение:

Данное уравнение можно решать стандартным способом, т.е. почленно возводить промежуточные иррациональные уравнения в квадрат, находить корни полученного квадратного уравнения с большими коэффициентами и произвести после этого проверку, для того чтобы убрать посторонние решения.

Но задача допускает решение «в одну строчку».

Левая часть уравнения есть возрастающая на своей области определения функция как разность возрастающей и убывающей функций (смотри свойство 3). Следовательно, уравнение может иметь не более одного решения. Его легко найти методом подбора: это $x=1$.

Ответ: $\{1\}$.

2.27. Решите уравнение: $\sqrt{2x+5}+\sqrt{x-1}=8$.

Решение:

Левая часть уравнения – возрастающая функция, следовательно, существует не более одного решения данного уравнения.

Корень $x=10$ находится подбором.

Ответ: $\{10\}$.

2.28. Решите уравнение: $\sqrt[3]{4x-1}+\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[9]{x-6}=6$.

Решение:

Левая часть данного уравнения – возрастающая функция. Поэтому найденный подбором корень $x=7$ является единственным.

Ответ: $\{7\}$.

Иррациональные уравнения, содержащие корни высших степеней

Рассмотрим решение уравнений, содержащих кубические радикалы. Основным методом решения таких уравнений является последовательное возведение в куб обеих частей уравнения с использованием формул:

$$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b),$$

$$(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b).$$

2.29. Решите уравнение: $\sqrt[3]{12-x}+\sqrt[3]{14+x}=2$.

Решение:

$$\left(\sqrt[3]{12-x}+\sqrt[3]{14+x}\right)^3=2^3$$

$$12-x+14+x+3\cdot\sqrt[3]{(12-x)(14+x)}\left(\sqrt[3]{12-x}+\sqrt[3]{14+x}\right)=8$$

Заменив выражение в скобках на число 2, получим:

$$26+6\cdot\sqrt[3]{(12-x)(14+x)}=8$$

$$\sqrt[3]{(12-x)(14+x)}=-3$$

$$168-2x-x^2=-27$$

$$x^2+2x-195=0$$

$$x_1=13,\quad x_2=-15$$

При замене суммы кубических радикалов на число 2 мы получили следствие из заданного уравнения, поэтому среди полученных решений могут быть посторонние. Проверка показывает, что оба корня удовлетворяют исходному уравнению.

Ответ: $\{-15;\ 13\}$.

При решении уравнений, содержащих кубические радикалы, можно использовать метод введения двух вспомогательных переменных для последующего перехода к рациональной системе.

2.30. Решите уравнение: $\sqrt[3]{13-x}+\sqrt[3]{22+x}=5$.

Решение:

Обозначим: $\sqrt[3]{13-x}=a$, $\sqrt[3]{22+x}=b$.

Тогда:

$$\begin{cases} a^3=13-x, \\ b^3=22+x; \end{cases} \qquad a^3+b^3=35.$$

Составим систему:

$$\begin{cases} a+b=5, \\ a^3+b^3=35; \end{cases} \qquad \begin{cases} a+b=5, \\ (a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)=35; \end{cases} \qquad \begin{cases} a+b=5, \\ a^2-ab+b^2=7; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b=5, \\ (a+b)^2-3ab=7; \end{cases} \qquad \begin{cases} a+b=5, \\ ab=6; \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=3, \\ b=2; \end{cases} \\ \begin{cases} a=2, \\ b=3. \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt[3]{13-x}=3, \\ \sqrt[3]{13-x}=2; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x=-14, \\ x=5. \end{array}\right.$$

Проверка показывает, что оба корня удовлетворяют исходному уравнению.

Ответ: $\{-14;\ 5\}$.

2.31. Решите уравнение: $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}=1$.

Решение:

Данное уравнение может быть решено с помощью возведения в куб обеих частей уравнения или с помощью введения новых переменных, как в предыдущих примерах. Но в данном случае можно обойтись без указанных сложных преобразований.

Левая часть уравнения является возрастающей функцией как сумма двух возрастающих функций и, следовательно, принимает каждое свое значение только один раз. Поэтому исходное уравнение может иметь только один корень. Методом подбора определяем, что данным корнем является $x=1$.

Ответ: $\{1\}$.

2.32. Решите уравнение: $\sqrt[4]{x+41}+\sqrt[4]{41-x}=4$.

Решение:

Обозначим: $\sqrt[4]{x+41}=a$, $(a\geq 0)$; $\sqrt[4]{41-x}=b$, $(b\geq 0)$.

$$\begin{cases} a^4=x+41, \\ b^4=41-x; \end{cases} \quad a^4+b^4=82.$$

Составим систему:

$$\begin{cases} a+b=4, \\ a^4+b^4=82; \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=1, \\ b=3; \end{cases} \\ \begin{cases} a=3, \\ b=1; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \sqrt[4]{x+41}=1, \\ \sqrt[4]{x+41}=3; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=-40, \\ x=40. \end{array}\right.$$

Проверка показывает, что оба корня удовлетворяют исходному уравнению.

Ответ: $\{-40;\ 40\}$.

2.33. Решите уравнение: $\sqrt[3]{x-2}+\sqrt{x+1}=3$.

Решение:

Сделаем замену:

$$\begin{cases} a = \sqrt[3]{x-2}, \\ b = \sqrt{x+1},\ b \ge 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} a^3 = x-2, \\ b^2 = x+1. \end{cases}$$

Тогда к исходному уравнению $a+b=3$ можно добавить соотношение:

$$a^3 - b^2 = (x-2)-(x+1) = -3 .$$

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} a+b=3, \\ a^3-b^2=-3; \end{cases} \quad \begin{cases} b=3-a, \\ a^3-a^2+6a-6=0; \end{cases} \quad \begin{cases} b=3-a, \\ (a-1)\left(a^2+6\right)=0; \end{cases} \quad \begin{cases} a=1, \\ b=2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x-2}=1, \\ \sqrt{x+1}=2; \end{cases} \quad \begin{cases} x-2=1, \\ x+1=4; \end{cases} \quad x=3 .$$

Ответ: $\{3\}$.

2.34. Решите уравнение: $\sqrt[3]{5x+7}-\sqrt[3]{5x-12}=1$.

***Решение*:**

Сделаем замену:

$$\begin{cases} a=\sqrt[3]{5x+7}, \\ b=\sqrt[3]{5x-12}; \end{cases} \qquad \begin{cases} a^3=5x+7, \\ b^3=5x-12. \end{cases}$$

Тогда $a^3-b^3=(5x+7)-(5x-12)=19$.

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} a-b=1, \\ a^3-b^3=19; \end{cases} \quad \begin{cases} a-b=1, \\ \underbrace{(a-b)}_{=1}\left(a^2+ab+b^2\right)=19; \end{cases} \quad \begin{cases} a-b=1, \\ a^2+ab+b^2=19; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=b+1, \\ b^2+b-6=0; \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=-2, \\ b=-3; \end{cases} \\ \begin{cases} a=3, \\ b=2; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \sqrt[3]{5x+7}=-2, \\ \sqrt[3]{5x+7}=3; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=-3, \\ x=4. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{-3;4\}$.

§3. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

При решении иррациональных систем используют те же методы, что и при решении иррациональных уравнений и рациональных систем.

Метод подстановки

Данный метод позволяет сводить решение системы уравнений с двумя неизвестными к решению одного уравнения с одним неизвестным

3.1. Решите систему уравнений: $\begin{cases} \sqrt{x} + 3y = 9, \\ x - 1 = \left(\sqrt{x} + 1\right) y. \end{cases}$

Решение:

$$\begin{cases} \sqrt{x} = 9 - 3y, \\ x - 1 = \left(\sqrt{x} + 1\right) y. \end{cases}$$

<u>ОДЗ</u>: $\begin{cases} x \geq 0, \\ 9 - 3y \geq 0; \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x \geq 0, \\ y \leq 3. \end{cases}$

$$\begin{cases} \sqrt{x} = 9 - 3y, \\ (9 - 3y)^2 - 1 = (9 - 3y + 1) y; \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{x} = 9 - 3y, \\ 81 - 54y + 9y^2 - 1 = 10y - 3y^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x} = 9 - 3y, \\ 3y^2 - 16y + 20 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{x} = 9 - 3y, \\ \left[\begin{array}{l} y = 2, \\ y = \dfrac{10}{3} > 3; \end{array} \right. \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{x} = 3, \\ y = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 9, \\ y = 2. \end{cases}$$

Ответ: $(9;\ 2)$.

3.2. Решите систему уравнений: $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4, \\ x + y - 3\sqrt{xy} = 1. \end{cases}$

Решение:

<u>ОДЗ</u>: $x \geq 0$; $y \geq 0$.

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4, \\ \left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^2 - 5\sqrt{xy} = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4, \\ 16 - 5\sqrt{xy} = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4, \\ \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = 3; \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt{x}=1,\\ \sqrt{y}=3;\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt{x}=3,\\ \sqrt{y}=1;\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1,\\ y=9;\end{cases}\\ \begin{cases}x=9,\\ y=1.\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: $(1;\ 9)$; $(9;\ 1)$.

3.3. Решите систему уравнений: $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=26,\\ \sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}=6.\end{cases}$

Решение:

ОДЗ: $x\geq 0$; $y\geq 0$.

$$\begin{cases}\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\right)^2-2\cdot\sqrt[4]{xy}=26,\\ \sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}=6;\end{cases} \qquad \begin{cases}36-2\cdot\sqrt[4]{xy}=26,\\ \sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}=6;\end{cases} \qquad \begin{cases}\sqrt[4]{x}\cdot\sqrt[4]{y}=5,\\ \sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}=6;\end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt[4]{x}=1,\\ \sqrt[4]{y}=5;\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt[4]{x}=5,\\ \sqrt[4]{y}=1;\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1,\\ y=625;\end{cases}\\ \begin{cases}x=625,\\ y=1.\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: $(1;\ 625)$; $(625;\ 1)$.

3.4. Решите систему уравнений: $\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=4,\\ x+y=28.\end{cases}$

Решение:

Возведем в куб первое уравнение:

$$x+y+3\cdot\sqrt[3]{xy}\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}\right)=64$$

$$28+3\cdot\sqrt[3]{xy}\cdot 4=64$$

$$\sqrt[3]{xy}=3$$

Составим систему: $\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=4,\\ \sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{y}=3;\end{cases}$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt[3]{x}=1,\\ \sqrt[3]{y}=3;\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt[3]{x}=3,\\ \sqrt[3]{y}=1;\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1,\\ y=27;\end{cases}\\ \begin{cases}x=27,\\ y=1.\end{cases}\end{array}\right.$$

Проверка:

1) $x=1$, $y=27$

$$\begin{cases}\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{27}=4 \text{ - верно}\\ 1+27=28 \text{ - верно}\end{cases}$$

2) $x=27$, $y=1$

$$\begin{cases}\sqrt[3]{27}+\sqrt[3]{1}=4 \text{ - верно}\\ 27+1=28 \text{ - верно}\end{cases}$$

Ответ: $(1;\ 27)$; $(27;\ 1)$.

3.5. Решите систему уравнений: $\begin{cases}\sqrt{x+y-1}=1,\\ \sqrt{x-y+2}=2y-2.\end{cases}$

Решение:

Возведем в квадрат каждое из уравнений:

$$\begin{cases}x+y-1=1,\\ x-y+2=4y^2-8y+4,\\ 2y-2\ge 0;\end{cases} \qquad \begin{cases}x=2-y,\\ 4y^2-6y=0,\\ y\ge 1;\end{cases} \qquad \begin{cases}x=2-y,\\ \left[\begin{array}{l}y=0,\\ y=1,5;\end{array}\right.\\ y\ge 1;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=0,5,\\ y=1,5.\end{cases}$$

Ответ: $(0,5;\ 1,5)$.

3.6. Решите систему уравнений: $\begin{cases}y+2|x|=1,\\ \sqrt{x^2-2x}=y-1.\end{cases}$

Решение:

$$\begin{cases}y=1-2|x|,\\ \sqrt{x^2-2x}=y-1.\end{cases}$$

1) $\begin{cases} x \ge 0, \\ y \ge 1, \\ y = 1 - 2x, \\ \sqrt{x^2 - 2x} = y - 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x \ge 0, \\ y \ge 1 \\ y = 1 - 2x, \\ \sqrt{x^2 - 2x} = -2x; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x < 0, \\ y \ge 1, \\ y = 1 + 2x, \\ \sqrt{x^2 - 2x} = y - 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x < 0, \\ y \ge 1, \\ y = 1 + 2x, \\ \sqrt{x^2 - 2x} = 2x; \end{cases}$ решений нет.

Ответ: $(0;\ 1)$.

3.7. Решите систему уравнений: $\begin{cases} y + \sqrt{x + 23} = 0, \\ 1 + y + \sqrt{x} = 0. \end{cases}$

Решение:

$\begin{cases} y = -\sqrt{x + 23}, \\ 1 + \sqrt{x} = -y, \\ y \le 0; \end{cases}$ $\begin{cases} y = -\sqrt{x + 23}, \\ 1 + \sqrt{x} = \sqrt{x + 23}, \\ y \le 0; \end{cases}$ $\begin{cases} y = -\sqrt{x + 23}, \\ 1 + x + 2\sqrt{x} = x + 23, \\ y \le 0; \end{cases}$

$\begin{cases} y = -\sqrt{x + 23}, \\ \sqrt{x} = 11, \\ y \le 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 121, \\ y = -12. \end{cases}$

Ответ: $(121;\ -12)$.

3.8. Решите систему уравнений: $\begin{cases} \sqrt{2y - x^3} + y + 1 = 0, \\ 0{,}5\sqrt{y^2 + 1} = \sqrt{-x}. \end{cases}$

Решение:

$\begin{cases} \sqrt{2y - x^3} = -y - 1, \\ \sqrt{y^2 + 1} = 2\sqrt{-x} \end{cases}$ $\begin{cases} -y - 1 \ge 0, \\ -x \ge 0, \\ 2y - x^3 = y^2 + 2y + 1, \\ y^2 + 1 = -4x; \end{cases}$ $\begin{cases} y \le -1, \\ x \le 0, \\ y^2 + 1 = -x^3, \\ y^2 + 1 = -4x; \end{cases}$

$$\begin{cases} y \le -1, \\ x \le 0, \\ y^2 + 1 = -4x, \\ x^3 = 4x; \end{cases} \quad \begin{cases} y \le -1, \\ x \le 0, \\ y^2 + 1 = -4x, \\ \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 2, \\ x = -2; \end{array}\right. \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0, \\ y^2 = -1; \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2, \\ y^2 = 7, \\ y \le -1; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \varnothing \\ \begin{cases} x = -2, \\ y = -\sqrt{7}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(-2;\ -\sqrt{7}\right)$.

Метод алгебраических действий

Данный метод поясним на примерах.

3.9. Решите систему уравнений: $\begin{cases} 2 \cdot \sqrt[5]{x} + \sqrt[5]{y} = 5, \\ 3 \cdot \sqrt[5]{x} - 2 \cdot \sqrt[5]{y} = 11. \end{cases}$

Решение:

$$\begin{cases} 2 \cdot \sqrt[5]{x} + \sqrt[5]{y} = 5, \quad | \cdot 2 \\ 3 \cdot \sqrt[5]{x} - 2 \cdot \sqrt[5]{y} = 11; \end{cases} \quad \begin{cases} 4 \cdot \sqrt[5]{x} + 2 \cdot \sqrt[5]{y} = 10, \\ 3 \cdot \sqrt[5]{x} - 2 \cdot \sqrt[5]{y} = 11. \end{cases}$$

Сложим уравнения полученной системы:

$$\begin{cases} 7 \cdot \sqrt[5]{x} = 21, \\ 3 \cdot \sqrt[5]{x} - 2 \cdot \sqrt[5]{y} = 11; \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt[5]{x} = 3, \\ 3 \cdot \sqrt[5]{x} - 2 \cdot \sqrt[5]{y} = 11; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 243, \\ 9 - 2 \cdot \sqrt[5]{y} = 11; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 243, \\ \sqrt[5]{y} = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 243, \\ y = -1. \end{cases}$$

Ответ: $(243;\ -1)$.

3.10. Решите систему уравнений: $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 5, \\ \sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y} = 1. \end{cases}$

Решение:

<u>ОДЗ</u>: $x \ge 0$; $y \ge 0$.

$$\begin{cases} \left(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y}\right)\left(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}\right) = 5, \\ \sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y} = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 5, \\ \sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y} = 1. \end{cases}$$

Сложим и вычтем уравнения системы: $\begin{cases}\sqrt[4]{x}=3,\\ \sqrt[4]{y}=2;\end{cases}$ $\begin{cases}x=81,\\ y=16.\end{cases}$

Ответ: $(81;\ 16)$.

3.11. Решите систему уравнений: $\begin{cases}x^2+y\sqrt{xy}=70,\\ x\sqrt{xy}+y^2=105.\end{cases}$

Решение:

$$\begin{cases}\sqrt{x}\left(x\sqrt{x}+y\sqrt{y}\right)=70,\\ \sqrt{y}\left(x\sqrt{x}+y\sqrt{y}\right)=105.\end{cases}$$

Разделим первое уравнение системы на второе:

$$\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}=\dfrac{2}{3},\\ x^2+y\sqrt{xy}=70;\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{x}{y}=\dfrac{4}{9},\\ x^2+y\sqrt{xy}=70;\end{cases}\quad \begin{cases}y=\dfrac{9x}{4},\\ x^2+\dfrac{27}{8}x^2=70;\end{cases}\quad \begin{cases}y=\dfrac{9x}{4},\\ x^2=16;\end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=4,\\ y=9;\end{cases}\\ \begin{cases}x=-4,\\ y=-9.\end{cases}\end{array}\right.$$

Проверка показывает, что только пара чисел $x=4$, $y=9$ удовлетворяет исходному уравнению.

Ответ: $(4;\ 9)$.

3.12. Решите систему уравнений: $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{16x}{5y}}=\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y},\\ \sqrt{\dfrac{20y}{x}}=\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}.\end{cases}$

Решение:

Умножим первое уравнение системы на второе:

$$\sqrt{\frac{16x\cdot 20y}{5y\cdot x}}=(x+y)-(x-y);$$

$8=2y$; $y=4$.

Подставим $y=4$ в первое уравнение системы:

$$\sqrt{\frac{4x}{5}}=\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4};$$

$$\frac{4x}{5}=x+4-2\sqrt{x^2-16}+x-4;$$

$$\sqrt{x^2-16}=\frac{3x}{5};$$

$$x^2-16=\frac{9x^2}{25};$$

$x=\pm5$.

Таким образом, получено два решения: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=5,\\ y=4;\end{cases}\\ \begin{cases}x=-5,\\ y=4.\end{cases}\end{array}\right.$

Проверка показывает, что исходной системе уравнений удовлетворяет только пара чисел $x=5$, $y=4$.

Ответ: $(5;\ 4)$.

3.13. Решите систему уравнений: $\begin{cases}x\sqrt{x}+3y\sqrt{x}=36,\\ y\sqrt{y}+3x\sqrt{y}=28.\end{cases}$

Решение:

ОДЗ: $x\geq0$; $y\geq0$.

Сложим и вычтем уравнения системы:

$$\begin{cases}x\sqrt{x}+3x\sqrt{y}+3y\sqrt{x}+y\sqrt{y}=64,\\ x\sqrt{x}-3x\sqrt{y}+3y\sqrt{x}-y\sqrt{y}=8;\end{cases} \qquad \begin{cases}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^3=64,\\ \left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^3=8;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=4,\\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=2;\end{cases} \qquad \begin{cases}\sqrt{x}=3,\\ \sqrt{y}=1;\end{cases} \qquad \begin{cases}x=9,\\ y=1.\end{cases}$$

Ответ: $(9;\ 1)$.

Метод введения новых переменных

Суть данного метода поясним на примерах.

3.14. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x+y+\sqrt{xy}=14, \\ x^2+y^2+xy=84. \end{cases}$

Решение:

ОДЗ: $x\cdot y\geq 0$.

$$\begin{cases} x+y+\sqrt{xy}=14, \\ (x+y)^2-xy=84. \end{cases}$$

Замена: $\begin{cases} x+y=a, \\ \sqrt{xy}=b. \end{cases}$

$$\begin{cases} a+b=14, \\ a^2-b^2=84; \end{cases} \quad \begin{cases} a+b=14, \\ (a+b)(a-b)=84; \end{cases} \quad \begin{cases} a+b=14, \\ a-b=6; \end{cases} \quad \begin{cases} a=10, \\ b=4. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=10, \\ \sqrt{xy}=4; \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=10, \\ xy=16; \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2, \\ y=8; \end{cases} \\ \begin{cases} x=8, \\ y=2. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(2;\ 8);\ (8;\ 2)$.

3.15. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=6, \\ x^2y+y^2x=20. \end{cases}$

Решение:

ОДЗ: $x\geq 0$; $y\geq 0$.

$$\begin{cases} \sqrt{xy}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)=6, \\ xy(x+y)=20; \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{xy}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)=6, \\ xy\left(\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2-2\sqrt{xy}\right)=20. \end{cases}$$

Замена: $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=a, \\ \sqrt{xy}=b. \end{cases}$

$$\begin{cases} ab=6, \\ b^2\left(a^2-2b\right)=20; \end{cases} \quad \begin{cases} ab=6, \\ a^2b^2-2b^3=20; \end{cases} \quad \begin{cases} ab=6, \\ 36-2b^3=20; \end{cases} \quad \begin{cases} a=3, \\ b=2. \end{cases}$$

$$\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=3,\\ \sqrt{x}\cdot\sqrt{y}=2;\end{cases}\qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt{x}=1,\\ \sqrt{y}=2;\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt{x}=2,\\ \sqrt{y}=1;\end{cases}\end{array}\right.\qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1,\\ y=4;\end{cases}\\ \begin{cases}x=4,\\ y=1.\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: $(1;\ 4)$; $(4;\ 1)$.

3.16. Решите систему уравнений: $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{5}{2},\\ x+y=15.\end{cases}$

Решение:

<u>ОДЗ</u>: $\dfrac{x}{y}>0$.

Введем новую переменную: $\sqrt{\dfrac{x}{y}}=a$ $\quad(a>0)$, относительно которой первое уравнение системы перепишется в ви :

$a+\dfrac{1}{a}=\dfrac{5}{2}$;

$2a^2-5a+2=0$;

$a_1=\dfrac{1}{2}$, $\quad a_2=2$.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x}{y}}=\dfrac{1}{2},\\ x+y=15;\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt{\dfrac{x}{y}}=2,\\ x+y=15;\end{cases}\end{array}\right.\qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\dfrac{x}{y}=\dfrac{1}{4},\\ x+y=15;\end{cases}\\ \begin{cases}\dfrac{x}{y}=4,\\ x+y=15;\end{cases}\end{array}\right.\qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=4x,\\ x+y=15;\end{cases}\\ \begin{cases}x=4y,\\ x+y=15;\end{cases}\end{array}\right.\qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=3,\\ y=12;\end{cases}\\ \begin{cases}x=12,\\ y=3.\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: $(3;\ 12)$; $(12;\ 3)$.

3.17. Решите систему уравнений: $\begin{cases}\sqrt{2x-1}+\sqrt{y+3}=3,\\ 2xy-y+6x-3=4.\end{cases}$

Решение:

ОДЗ: $\begin{cases} 2x-1\ge 0, \\ y+3\ge 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x\ge \dfrac{1}{2}, \\ y\ge -3. \end{cases}$

Рассмотрим второе уравнение системы:

$2xy-y+6x-3=y(2x-1)+3(2x-1)=(y+3)(2x-1)$.

$\begin{cases} \sqrt{2x-1}+\sqrt{y+3}=3, \\ (2x-1)(y+3)=4. \end{cases}$

Введем новые переменные: $\begin{cases} \sqrt{2x-1}=a & (a\ge 0), \\ \sqrt{y+3}=b & (b\ge 0). \end{cases}$

Исходная система перепишется в виде:

$\begin{cases} a+b=3, \\ a^2b^2=4; \end{cases}$ $\begin{cases} a+b=3, \\ ab=2; \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=2, \\ b=1; \end{cases} \\ \begin{cases} a=1, \\ b=2. \end{cases} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{2x-1}=2, \\ \sqrt{y+3}=1; \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{2x-1}=1, \\ \sqrt{y+3}=2; \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x-1=4, \\ y+3=1; \end{cases} \\ \begin{cases} 2x-1=1, \\ y+3=4; \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\dfrac{5}{2}, \\ y=-2; \end{cases} \\ \begin{cases} x=1, \\ y=1. \end{cases} \end{array}\right.$

Ответ: $(1;\ 1)$; $(2{,}5;\ -2)$.

3.18. Решите систему уравнений: $\begin{cases} \sqrt{2x+3y}+\sqrt{2x-3y}=10, \\ \sqrt{4x^2-9y^2}=16. \end{cases}$

Решение:

ОДЗ: $\begin{cases} 2x+3y\ge 0, \\ 2x-3y\ge 0. \end{cases}$

Замена: $\begin{cases} \sqrt{2x+3y}=a & (a\ge 0), \\ \sqrt{2x-3y}=b & (b\ge 0). \end{cases}$

Исходная система примет вид:

$$\begin{cases} a+b=10, \\ ab=16; \end{cases} \qquad \left[\begin{aligned} &\begin{cases} a=2, \\ b=8; \end{cases} \\ &\begin{cases} a=8, \\ b=2. \end{cases} \end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned} &\begin{cases} \sqrt{2x+3y}=2, \\ \sqrt{2x-3y}=8; \end{cases} \\ &\begin{cases} \sqrt{2x+3y}=8, \\ \sqrt{2x-3y}=2; \end{cases} \end{aligned}\right. \qquad \left[\begin{aligned} &\begin{cases} 2x+3y=4, \\ 2x-3y=64; \end{cases} \\ &\begin{cases} 2x+3y=64, \\ 2x-3y=4; \end{cases} \end{aligned}\right. \qquad \left[\begin{aligned} &\begin{cases} x=17, \\ y=-10; \end{cases} \\ &\begin{cases} x=17, \\ y=10. \end{cases} \end{aligned}\right.$$

Ответ: $(17;\ -10)$; $(17;\ 10)$.

3.19. Решите систему уравнений: $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{x+2y}=10, \\ \sqrt{x+y}+2x+y=16. \end{cases}$

Решение:

Замена: $\begin{cases} \sqrt{x+y}=a \quad (a\geq 0), \\ \sqrt{x+2y}=b \quad (b\geq 0). \end{cases}$

$$\begin{cases} x+y=a^2, \ \ |\cdot 3 \\ x+2y=b^2; \end{cases} \qquad -\begin{cases} 3x+3y=3a^2, \\ x+2y=b^2; \end{cases}$$

$$2x+y=3a^2-b^2.$$

$$\begin{cases} a+b=10, \\ a+3a^2-b^2=16; \end{cases} \qquad \begin{cases} b=10-a, \\ a+3a^2-100+20a-a^2=16; \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=10-a, \\ 2a^2+21a-116=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} a=4, \\ b=6. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+y}=4, \\ \sqrt{x+2y}=6; \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=16, \\ x+2y=36; \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-4, \\ y=20. \end{cases}$$

Ответ: $(-4;\ 20)$.

3.20. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x\cdot\sqrt[3]{x-y}=0, \\ 2y^2+y=21+2xy. \end{cases}$

Решение:

Для первого уравнения системы $x\cdot\sqrt[3]{x-y}=0$ должно быть выполнено одно из соотношений:

1) $x=0$ или 2) $\sqrt[3]{x-y}=0$.

Рассмотрим два данных случая:

1) $\begin{cases} x=0, \\ 2y^2+y=21+2xy; \end{cases}$ $\begin{cases} x=0, \\ 2y^2+y-21=0; \end{cases}$ $\begin{cases} x=0, \\ \left[\begin{array}{l} y=3, \\ y=-\dfrac{7}{2}. \end{array}\right. \end{cases}$

$(0;\ -3,5);\ (0;\ 3)$.

2) $\begin{cases} \sqrt[3]{x-y}=0, \\ 2y^2+y=21+2xy; \end{cases}$ $\begin{cases} x=y, \\ 2y^2+y=21+2y^2; \end{cases}$ $\begin{cases} x=21, \\ y=21. \end{cases}$

$(21;\ 21)$.

Ответ: $(0;\ -3,5);\ (0;\ 3);\ (21;\ 21)$.

3.21. Решите систему уравнений: $\begin{cases} |y|\cdot\sqrt{y^2-4x^2}=0, \\ x+y-\sqrt{y^2-4x^2}=5. \end{cases}$

Решение:

1) $\begin{cases} |y|=0, \\ x+y-\sqrt{y^2-4x^2}=5; \end{cases}$ $\begin{cases} y=0, \\ x-\sqrt{-4x^2}=5. \end{cases}$

Выражение $\sqrt{-4x^2}$ имеет смысл только для $x=0$, но $x=0$ решением уравнения $x-\sqrt{-4x^2}=5$ не является.

Следовательно, в данном случае система решений не имеет.

2) $\begin{cases} \sqrt{y^2-4x^2}=0, \\ x+y-\sqrt{y^2-4x^2}=5; \end{cases}$ $\begin{cases} y^2=4x^2, \\ x+y=5; \end{cases}$ $\begin{cases} y=2|x|, \\ x+2|x|=5; \end{cases}$

В случае если $x > 0$:

$$\begin{cases} x > 0, \\ y = 2x, \\ x + 2x = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{5}{3}, \\ y = \dfrac{10}{3}. \end{cases}$$

В случае если $x < 0$.

$$\begin{cases} x < 0, \\ y = -2x, \\ x - 2x = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -5, \\ y = 10. \end{cases}$$

Ответ: $(-5; 10)$; $\left(\dfrac{5}{3}; \dfrac{10}{3}\right)$.

§4. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ

При решении иррациональных неравенств, так же как и при решении иррациональных уравнений, основная цель состоит в том, чтобы освободиться от знака радикала и свести иррациональное неравенство к рациональному.

Основными методами решения иррациональных неравенств являются:

- возведение в степень обеих частей неравенства;
- введение новой переменной;
- разложение на множители;
- метод интервалов.

Рассмотрим каждый из этих методов в отдельности.

Метод возведения в степень обеих частей неравенства

Данный метод решения иррациональных неравенств состоит в преобразовании их к рациональным неравенствам путем возведения обеих частей неравенства в степень. При таких преобразованиях необходимо следить за тем, чтобы полученное неравенство было равносильно исходному.

При решении иррациональных неравенств пользуются следующими утверждениями.

1. При возведении обеих частей неравенства в нечетную степень всегда получается неравенство, равносильное данному неравенству.

2. Если обе части неравенства возвести в четную степень, то получится неравенство, равносильное исходному, только в том случае, если обе части исходного неравенства неотрицательны.

Иррациональное неравенство, как правило, сводится к равносильной системе (или совокупности систем) неравенств.

	Неравенство	Равносильный переход
1.	$\sqrt{A} \le B \quad \left(\sqrt{A} < B\right)$	$\begin{cases} B \ge 0, \\ A \ge 0, \\ A \le B^2 \quad \left(A < B^2\right). \end{cases}$

	Неравенство	Равносильный переход
2.	$\sqrt{A} \ge B \quad (\sqrt{A} > B)$	$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}B<0,\\A\ge 0;\end{cases}\\\begin{cases}B\ge 0,\\A\ge B^2 \quad (A>B^2).\end{cases}\end{array}\right.$
3.	$\sqrt{A} \ge \sqrt{B} \quad (\sqrt{A} > \sqrt{B})$	$\begin{cases}B\ge 0,\\A\ge B \quad (A>B).\end{cases}$

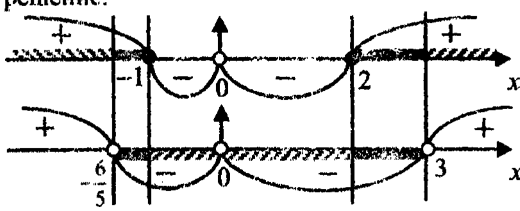
4.1. Решите неравенство: $\sqrt{1-\dfrac{x+2}{x^2}} < \dfrac{2}{3}$.

Решение:

Перейдем к равносильной системе:

$$\begin{cases}1-\dfrac{x+2}{x^2}\ge 0,\\1-\dfrac{x+2}{x^2}<\dfrac{4}{9};\end{cases}\qquad \begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{x^2}\ge 0,\\\dfrac{5x^2-9x-18}{9x^2}<0;\end{cases}\qquad \begin{cases}\dfrac{(x-2)(x+1)}{x^2}\ge 0,\\\dfrac{5(x-3)\left(x+\frac{6}{5}\right)}{9x^2}<0.\end{cases}$$

Каждое неравенство решаем методом интервалов и выделяем общее решение.



Ответ: $x\in\left(-\dfrac{6}{5};\ -1\right]\cup[2;\ 3)$.

4.2. Решите неравенство: $\sqrt{\dfrac{x+4}{x-2}} > 6$.

Решение:

Обе части неравенства неотрицательны, возведем их в квадрат:

$$\frac{x+4}{x-2}>36$$

$$\frac{x+4-36x+72}{x-2}>0$$

$$\frac{35x-76}{x-2}<0$$



Ответ: $2<x<\frac{76}{35}$.

4.3. Решите неравенство: $\sqrt{\frac{(x+2)^2}{(x+1)(2-x)}}>-1$.

Решение:

$$\frac{(x+2)^2}{(x+1)(2-x)}\ge 0$$

$$\frac{(x+2)^2}{(x+1)(x-2)}\le 0$$

Ответ: $x\in\{-2\}\cup(-1;2)$.

4.4. Решите неравенство: $\sqrt{2-x+x^2}\le|x-3|$.

Решение:

Областью допустимых значений данного неравенства $\left(2-x+x^2\ge 0\right)$ являются все действительные числа.

Правая и левая части данного неравенства являются неотрицательными выражениями, поэтому неравенство можно возвести в квадрат:

$$2-x+x^2\le(x-3)^2$$

$$2-x+x^2\le x^2-6x+9$$

$$5x\le 7$$

$$x\le 1{,}4.$$

Ответ: $x\in(-\infty;\ 1{,}4]$.

4.5. Решите неравенство: $\left|2\sqrt{2x-1}-1\right|<3$.

Решение:

Перейдем к равносильной системе:

$$\begin{cases}2\sqrt{2x-1}-1<3,\\1-2\sqrt{2x-1}<3;\end{cases}\quad\begin{cases}\sqrt{2x-1}<2,\\\sqrt{2x-1}>-1;\end{cases}\quad\begin{cases}2x-1<4,\\2x-1\geq 0;\end{cases}\quad\begin{cases}x<2,5,\\x\geq 0,5.\end{cases}$$

$x\in[0,5;\ 2,5)$.

Ответ: $x\in[0,5;\ 2,5)$.

4.6. Решите неравенство: $\sqrt[5]{x^2-4x}>\sqrt[5]{3-2x}$.

Решение:

Перейдем к равносильному неравенству:

$x^2-4x>3-2x$

$x^2-2x-3>0$

$(x-3)(x+1)>0$.

Ответ: $x\in(-\infty;\ -1)\cup(3;\ \infty)$.

4.7. Решите неравенство: $\sqrt{3x-10}>\sqrt{6-x}$.

Решение:

Перейдем к равносильной системе:

$$\begin{cases}3x-10>6-x,\\6-x\geq 0;\end{cases}\quad\begin{cases}4x>16,\\6\geq x;\end{cases}\quad\begin{cases}x>4,\\x\leq 6.\end{cases}$$

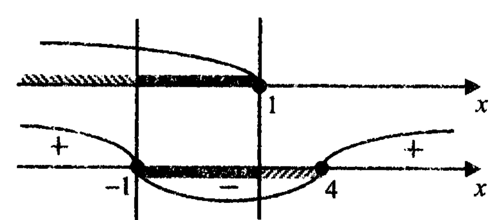
$4<x\leq 6$.

Ответ: $x\in(4;6]$.

4.8. Решите неравенство: $\sqrt{1-x}\leq\sqrt[4]{5+x}$.

Решение:

$$\begin{cases}1-x\geq 0,\\(1-x)^2\leq 5+x;\end{cases}\quad\begin{cases}x\leq 1,\\x^2-3x-4\leq 0;\end{cases}\quad\begin{cases}x\leq 1,\\(x-4)(x+1)\leq 0.\end{cases}$$



Ответ: $x \in [-1; 1]$.

4.9. Решите неравенство: $\sqrt{\dfrac{x+5}{3x-1}} \le \sqrt{x+2}$.

Решение:

Перейдем к равносильной системе:

$$\begin{cases} \dfrac{x+5}{3x-1} \le x+2, \\ \dfrac{x+5}{3x-1} \ge 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x+5-3x^2+x-6x+2}{3x-1} \le 0, \\ \dfrac{x+5}{3x-1} \ge 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{-3x^2-4x+7}{3x-1} \le 0, \\ \dfrac{x+5}{3x-1} \ge 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{(3x+7)(x-1)}{3x-1} \ge 0, \\ \dfrac{x+5}{3x-1} \ge 0. \end{cases}$$

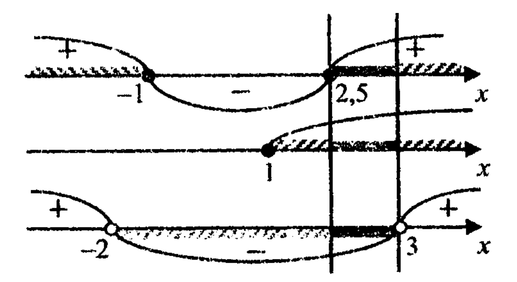
Ответ: $x \in [1; \infty)$.

4.10. Решите неравенство: $\sqrt{2x^2-3x-5} < x-1$.

Решение:

Перейдем к равносильной системе:

$$\begin{cases} 2x^2-3x-5\ge 0, \\ x-1\ge 0, \\ 2x^2-3x-5<x^2-2x+1; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x^2-3x-5\ge 0, \\ x-1\ge 0, \\ x^2-x-6<0; \end{cases} \quad \begin{cases} 2(x+1)\left(x-\dfrac{5}{2}\right)\ge 0, \\ x\ge 1, \\ (x+2)(x-3)<0. \end{cases}$$



Ответ: $2{,}5\le x<3$.

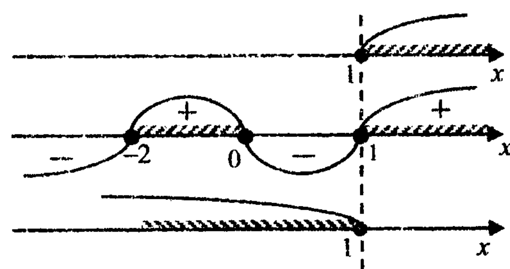
4.11. Решите неравенство: $\sqrt{x^3+x^2-2x}+1\le x$.

Решение:

$\sqrt{x^3+x^2-2x}\le x-1$

Перейдем к равносильной системе:

$$\begin{cases} x-1\ge 0, \\ x^3+x^2-2x\ge 0, \\ x^3+x^2-2x\le (x-1)^2; \end{cases} \quad \begin{cases} x\ge 1, \\ x(x+2)(x-1)\ge 0, \\ x^3-1\le 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x\ge 1, \\ x(x+2)(x-1)\ge 0, \\ x\le 1. \end{cases}$$



$x=1$.

Ответ: $x=1$.

4.12. Решите неравенство: $\sqrt{x+1}>x-1$.

Решение:

Сделаем равносильный переход к двум системам неравенств:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-1<0,\\ x+1\ge 0;\end{cases}\\ \begin{cases}x-1\ge 0,\\ x+1>x^2-2x+1;\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<1,\\ x\ge -1;\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 1,\\ x(x-3)<0;\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}-1\le x<1,\\ 1\le x<3;\end{array}\right. \qquad -1\le x<3\,.$$

Ответ: $x\in[-1;\ 3)$.

4.13. Решите неравенство: $6-\sqrt{8+2x-x^2}<3x$.

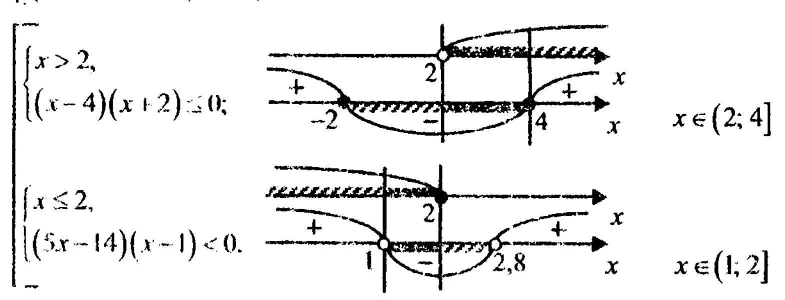
Решение:

$\sqrt{8+2x-x^2}>6-3x$

Сделаем равносильный переход к двум системам неравенств:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}6-3x<0,\\ 8+2x-x^2\ge 0;\end{cases}\\ \begin{cases}6-3x\ge 0,\\ 8+2x-x^2>(6-3x)^2;\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>2,\\ (x-4)(x+2)\le 0;\end{cases}\\ \begin{cases}x\le 2,\\ (5x-14)(x-1)<0.\end{cases}\end{array}\right.$$



$$\left[\begin{array}{l}x\in(2;\ 4],\\ x\in(1;\ 2];\end{array}\right. \qquad x\in(1;\ 4]\,.$$

Ответ: $x\in(1;\ 4]$.

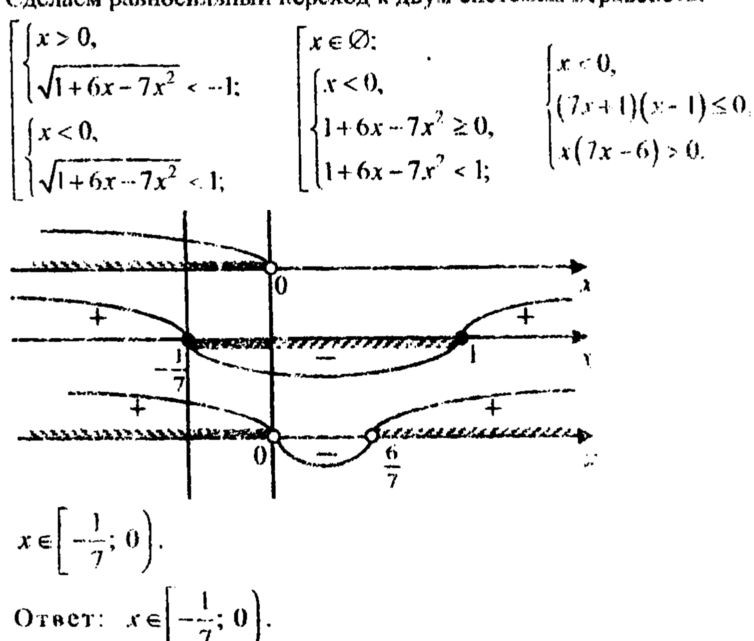
4.14. Решите неравенство: $\sqrt{1+6x-7x^2}+\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}<0$.

Решение:

$\sqrt{1+6x-7x^2}+\dfrac{|x|}{x}<0$

Сделаем равносильный переход к двум системам неравенств:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0,\\ \sqrt{1+6x-7x^2}<-1;\end{cases}\\ \begin{cases}x<0,\\ \sqrt{1+6x-7x^2}<1;\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x\in\varnothing;\\ \begin{cases}x<0,\\ 1+6x-7x^2\ge 0,\\ 1+6x-7x^2<1;\end{cases}\end{array}\right. \qquad \begin{cases}x<0,\\ (7x+1)(x-1)\le 0,\\ x(7x-6)>0.\end{cases}$$



$x\in\left[-\frac{1}{7};\ 0\right)$.

Ответ: $x\in\left[-\frac{1}{7};\ 0\right)$.

Неравенства, содержащие несколько радикалов

Решение таких неравенств нужно начинать с анализа ОДЗ, а затем необходимо освободиться от иррациональности путем равносильных преобразований.

4.15. Решите неравенство: $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}>1$.

Решение:

$\sqrt{x+2}>1+\sqrt{x-1}$

Перейдем к равносильной системе:

$$\begin{cases}x+2\ge 0,\\ x-1\ge 0,\\ x+2>1+2\sqrt{x-1}+x-1;\end{cases} \qquad \begin{cases}x\ge 1,\\ \sqrt{x-1}<1;\end{cases} \qquad \begin{cases}x\ge 1,\\ x-1<1;\end{cases} \qquad \begin{cases}x\ge 1,\\ x<2.\end{cases}$$

$x\in[1;\ 2)$.

Ответ: $x\in[1;\ 2)$.

4.16. Решите неравенство: $3\sqrt{x}-\sqrt{x+3}>1$.

Решение:

Найдем ОДЗ: $\begin{cases} x \ge 0, \\ x+3 \ge 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \ge 0, \\ x \ge -3; \end{cases}$ $x \ge 0$.

Перенесем второй радикал в правую часть, для того чтобы правая и левая части неравенства стали неотрицательными:

$3\sqrt{x}>1+\sqrt{x+3}$

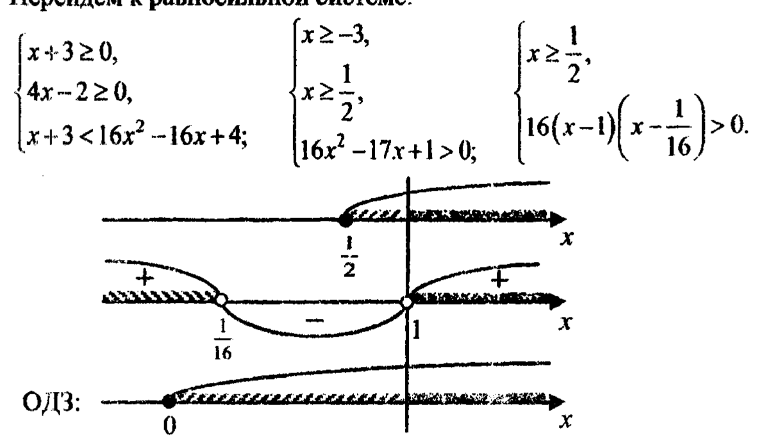
$\left(3\sqrt{x}\right)^2>\left(1+\sqrt{x+3}\right)^2$

$9x>1+2\sqrt{x+3}+x+3$

$\sqrt{x+3}<4x-2$

Перейдем к равносильной системе:

$\begin{cases} x+3 \ge 0, \\ 4x-2 \ge 0, \\ x+3<16x^2-16x+4; \end{cases}$ $\begin{cases} x \ge -3, \\ x \ge \frac{1}{2}, \\ 16x^2-17x+1>0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \ge \frac{1}{2}, \\ 16(x-1)\left(x-\frac{1}{16}\right)>0. \end{cases}$



Ответ: $x>1$.

4.17. Решите неравенство: $\sqrt{x+3}+\sqrt{1-x}>\sqrt{8x-5}$.

Решение:

$\begin{cases} x+3 \ge 0, \\ 1-x \ge 0, \\ 8x-5 \ge 0, \\ x+3+2\sqrt{(x+3)(1-x)}+1-x>8x-5; \end{cases}$ $\begin{cases} x \ge -3, \\ x \le 1, \\ x \ge \frac{5}{8}, \\ 2\sqrt{(x+3)(1-x)}>8x-9; \end{cases}$

$$\begin{cases} \frac{5}{8} \le x \le 1, \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 8x-9<0, \\ (x+3)(1-x) \ge 0; \end{cases} \\ \begin{cases} 8x-9 \ge 0, \\ 4(x+3)(1-x) > (8x-9)^2; \end{cases} \end{array} \right. \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{5}{8} \le x \le 1, \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < \frac{9}{8}, \\ (x+3)(x-1) \le 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge \frac{9}{8}, \\ \underbrace{68x^2 - 136x + 69}_{D<0} < 0; \end{cases} \end{array} \right. \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{5}{8} \le x \le 1, \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < \frac{9}{8}, \\ (x+3)(x-1) \le 0; \end{cases} \\ x \in \varnothing; \end{array} \right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{5}{8} \le x \le 1, \\ x < \frac{9}{8}, \\ (x+3)(x-1) \le 0. \end{cases}$$

Ответ: $x \in \left[\frac{5}{8}; 1\right]$.

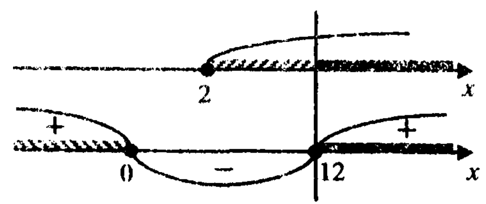
4.18. Решите неравенство: $\sqrt{3x} - \sqrt{2x+1} \ge 1$.

Решение:

$\sqrt{3x} \ge 1 + \sqrt{2x+1}$

$$\begin{cases} 3x \ge 0, \\ 2x+1 \ge 0, \\ 3x \ge 1 + 2\sqrt{2x+1} + 2x + 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x \ge 0, \\ x \ge -\frac{1}{2}, \\ x - 2 \ge 2\sqrt{2x+1}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \ge 0, \\ x - 2 \ge 0, \\ \left(2\sqrt{2x+1}\right)^2 \le (x-2)^2; \end{cases} \quad \begin{cases} x \ge 2, \\ x^2 - 12x \ge 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \ge 2, \\ x(x-12) \ge 0. \end{cases}$$



$x \ge 12$.

Ответ: $x \in [12; \infty)$.

Метод введения новой переменной

4.19. Решите неравенство: $\dfrac{\sqrt[3]{1-x}-2}{\sqrt[3]{1-x}+3} \ge 0$.

Решение:

Введем новую переменную: $\sqrt[3]{1-x} = a$.

$$\frac{a-2}{a+3} \ge 0$$

$$a \in (-\infty; -3) \cup [2; \infty)$$

$$\left[\begin{array}{l} a < -3, \\ a \ge 2; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \sqrt[3]{1-x} < -3, \\ \sqrt[3]{1-x} \ge 2; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} 1-x < -27, \\ 1-x \ge 8; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x > 28, \\ x \le -7. \end{array}\right.$$

Ответ: $x \in (-\infty; -7] \cup (28; \infty)$.

4.20. Решите неравенство: $\sqrt{x^2-x} < \dfrac{6}{\sqrt{x^2-x}}$.

Решение:

Введем новую переменную: $a = \sqrt{x^2-x}$; $(a > 0)$.

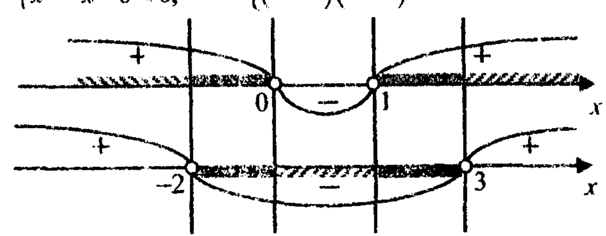
$$\begin{cases} a > 0, \\ a < \dfrac{6}{a}; \end{cases} \qquad \begin{cases} a > 0, \\ \dfrac{a^2-6}{a} < 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} a > 0, \\ \dfrac{(a-\sqrt{6})(a+\sqrt{6})}{a} < 0. \end{cases}$$

$$0 < a < \sqrt{6}$$

$0<\sqrt{x^2-x}<\sqrt{6}$

$0<x^2-x<6$

$\begin{cases} x^2-x>0, \\ x^2-x-6<0; \end{cases}$ $\begin{cases} x(x-1)>0, \\ (x+2)(x-3)<0. \end{cases}$



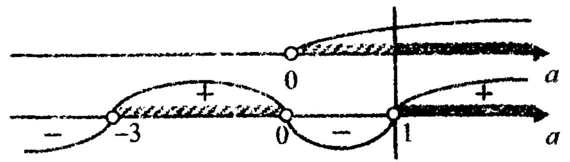
Ответ: $x\in(-2;\,0)\cup(1;\,3)$.

4.21. Решите неравенство: $\dfrac{3}{\sqrt{2-x}}-\sqrt{2-x}<2$.

Решение:

Введем новую переменную: $\sqrt{2-x}=a$; $(a>0)$.

$\begin{cases} a>0, \\ \dfrac{3}{a}-a<2; \end{cases}$ $\begin{cases} a>0, \\ \dfrac{a^2+2a-3}{a}>0; \end{cases}$ $\begin{cases} a>0, \\ \dfrac{(a+3)(a-1)}{a}>0. \end{cases}$



$a>1$

$\sqrt{2-x}>1$

$2-x>1$

$x<1$.

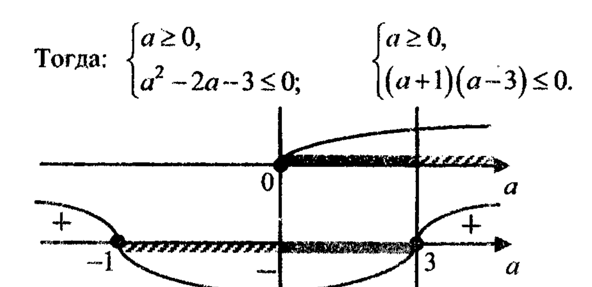
Ответ: $x<1$.

4.22. Решите неравенство: $x^2-8x-2\sqrt{x^2-8x}\le 3$.

Решение:

Замена: $\sqrt{x^2-8x}=a$; $(a\ge 0)$.

Тогда: $\begin{cases} a \geq 0, \\ a^2 - 2a - 3 \leq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} a \geq 0, \\ (a+1)(a-3) \leq 0. \end{cases}$

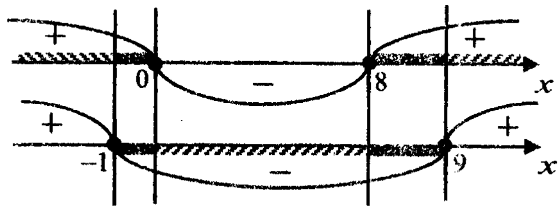


$0 \leq a \leq 3$

$0 \leq \sqrt{x^2 - 8x} \leq 3$

Перейдем к равносильной системе:

$\begin{cases} x^2 - 8x \geq 0, \\ x^2 - 8x \leq 9; \end{cases}$ $\begin{cases} x(x-8) \geq 0, \\ (x-9)(x+1) \leq 0. \end{cases}$



Ответ: $x \in [-1;\ 0] \cup [8;\ 9]$.

4.23. Решите неравенство: $(x+5)(x-2) + 3\sqrt{x(x+3)} > 0$.

Решение:

$x^2 + 3x - 10 + 3\sqrt{x^2 + 3x} > 0$

Введем новую переменную: $\sqrt{x^2 + 3x} = a$; $(a \geq 0)$.

$\begin{cases} a \geq 0, \\ a^2 + 3a - 10 > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} a \geq 0, \\ (a+5)(a-2) > 0; \end{cases}$ $a > 2$.

$\sqrt{x^2 + 3x} > 2$

$\begin{cases} x^2 + 3x > 4, \\ x^2 + 3x \geq 0; \end{cases}$ $x^2 + 3x > 4$; $(x+4)(x-1) > 0$.

Ответ: $x \in (-\infty;\ -4) \cup (1;\ \infty)$.

4.24. Решите неравенство: $\frac{2x+1}{x}-2\sqrt{\frac{2x+1}{x}}-3\geq 0$.

Решение:

Введем новую переменную: $\sqrt{\frac{2x+1}{x}}=a$; $(a\geq 0)$.

$\begin{cases} a\geq 0, \\ a^2-2a-3\geq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} a\geq 0, \\ (a-3)(a+1)\geq 0; \end{cases}$ $a\geq 3$.

$\sqrt{\frac{2x+1}{x}}\geq 3$; $\frac{2x+1}{x}\geq 9$; $\frac{7x-1}{x}\leq 0$.

Ответ: $x\in\left(0;\frac{1}{7}\right]$.

4.25. Решите неравенство: $\frac{3-x}{\sqrt{15-x}}<1$.

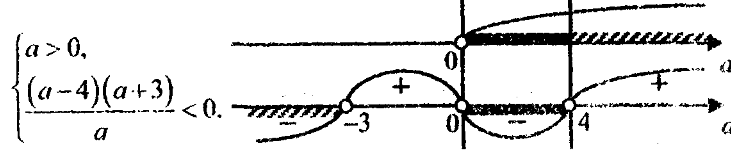
Решение:

Введем замену: $\sqrt{15-x}=a$; $(a>0)$.

Тогда: $x=15-a^2$

$\begin{cases} a>0, \\ \frac{3-(15-a^2)}{a}<1; \end{cases}$ $\begin{cases} a>0, \\ \frac{a^2-12}{a}-1<0; \end{cases}$ $\begin{cases} a>0, \\ \frac{a^2-a-12}{a}<0; \end{cases}$

$\begin{cases} a>0, \\ \frac{(a-4)(a+3)}{a}<0. \end{cases}$



$0<a<4$

$0<\sqrt{15-x}<4$

$0<15-x<16$

$-15<-x<1$

$-1<x<15$.

Ответ: $x\in(-1;\ 15)$.

4.26. Решите неравенство: $\sqrt{3x^2+5x+7}-\sqrt{3x^2+5x+2}>1$.

Решение:

Замена: $3x^2+5x+2=a$; $(a\geq 0)$.

$\sqrt{a+5}-\sqrt{a}>1$

$\sqrt{a+5}>1+\sqrt{a}$

$$\begin{cases} a\geq 0, \\ a+5\geq 0, \\ \left(\sqrt{a+5}\right)^2>\left(1+\sqrt{a}\right)^2; \end{cases} \quad \begin{cases} a\geq 0, \\ a+5>1+2\sqrt{a}+a; \end{cases} \quad \begin{cases} a\geq 0, \\ \sqrt{a}<2; \end{cases}$$

$0\leq a<4$.

$0\leq 3x^2+5x+2<4$

$$\begin{cases} 3x^2+5x+2\geq 0, \\ 3x^2+5x+2<4; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x^2+5x+2\geq 0, \\ 3x^2+5x-2<0; \end{cases} \quad \begin{cases} (3x+2)(x+1)\geq 0, \\ (3x-1)(x+2)<0. \end{cases}$$

+ − + -1 $-\frac{2}{3}$ x
+ − + -2 $\frac{1}{3}$ x

Ответ: $x\in(-2;-1]\cup\left[-\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$.

Метод разложения на множители

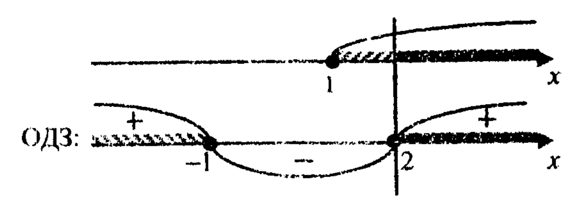
Продемонстрируем данный метод на примерах.

4.27. Решите неравенство: $(x-1)\sqrt{x^2-x-2}\geq 0$.

Решение:

Произведение неотрицательно, если его множители одного знака.

$$\begin{cases} x-1\geq 0, \\ x^2-x-2\geq 0; \quad (\text{ОДЗ}) \end{cases} \quad \begin{cases} x\geq 1, \\ (x-2)(x+1)\geq 0. \end{cases}$$



Ответ: $x \in \{-1\} \cup [2; \infty)$.

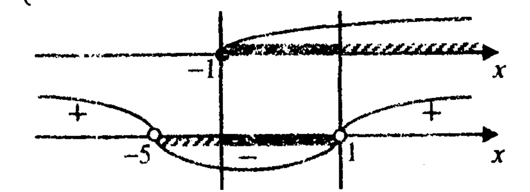
4.28. Решите неравенство: $\dfrac{\log_{0,1}(x+2)}{\sqrt{5-4x-x^2}} \le 0$.

Решение:

Так как квадратный корень может принимать только неотрицательные значения, исходное неравенство с учетом *ОДЗ* равносильно системе:

$$\begin{cases} \log_{0,1}(x+2) \le 0, \\ x+2 > 0, \\ 5-4x-x^2 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x+2 \ge 0,1^0, \\ x+2 > 0, \\ x^2+4x-5 < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x+2 \ge 1, \\ (x+5)(x-1) < 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \ge -1, \\ -5 < x < 1. \end{cases}$$



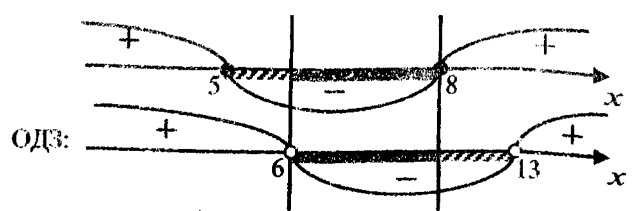
$-1 \le x < 1$.

Ответ: $x \in [-1; 1)$.

4.29. Решите неравенство: $\dfrac{x^2-13x+40}{\sqrt{19x-x^2-78}} \le 0$.

Решение:

$$\begin{cases} x^2-13x+40 \le 0, \\ 19x-x^2-78 > 0; \quad (\text{ОДЗ}) \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-13x+40 \le 0, \\ x^2-19x+78 < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (x-5)(x-8) \le 0, \\ (x-6)(x-13) < 0. \end{cases}$$



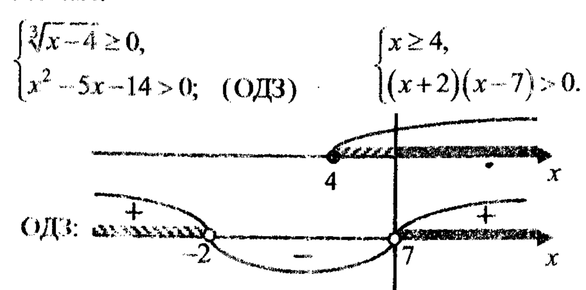
Ответ: $x \in (6;\ 8]$.

4.30. Решите неравенство: $\dfrac{\sqrt[3]{x-4}}{\sqrt[4]{x^2-5x-14}} \geq 0$.

Решение:

$\sqrt[4]{x^2-5x-14} > 0$, поэтому исходное неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x-4} \geq 0, \\ x^2-5x-14 > 0; \quad (\text{ОДЗ}) \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq 4, \\ (x+2)(x-7) > 0. \end{cases}$$



$x > 7$.

Ответ: $x \in (7;\infty)$.

4.31. Решите неравенство: $\dfrac{\sqrt{4+3x-x^2}}{2x+3} \geq \dfrac{\sqrt{4+3x-x^2}}{x+3}$.

Решение:

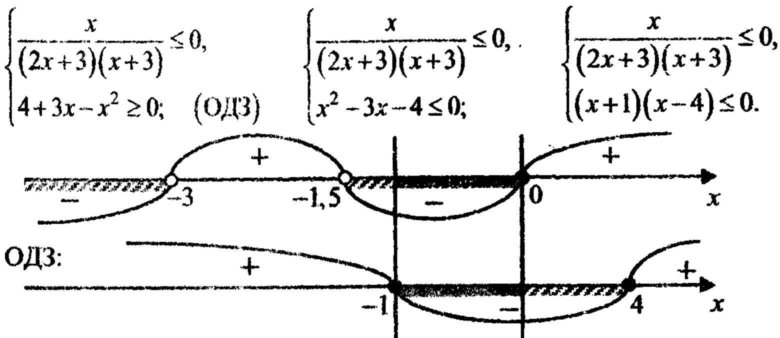
$$\frac{\sqrt{4+3x-x^2}}{2x+3} - \frac{\sqrt{4+3x-x^2}}{x+3} \geq 0$$

$$\sqrt{4+3x-x^2}\left(\frac{1}{2x+3} - \frac{1}{x+3}\right) \geq 0$$

$$\sqrt{4+3x-x^2}\left(\frac{-x}{(2x+3)(x+3)}\right) \geq 0$$

$$\frac{x\cdot\sqrt{4+3x-x^2}}{(2x+3)(x+3)}\le 0$$

$$\begin{cases}\dfrac{x}{(2x+3)(x+3)}\le 0,\\ 4+3x-x^2\ge 0; \quad (\text{ОДЗ})\end{cases} \qquad \begin{cases}\dfrac{x}{(2x+3)(x+3)}\le 0,\\ x^2-3x-4\le 0;\end{cases} \qquad \begin{cases}\dfrac{x}{(2x+3)(x+3)}\le 0,\\ (x+1)(x-4)\le 0.\end{cases}$$



В ответ так же следует включить точку $x=4$, которая обращает в нуль выражение $\sqrt{4+3x-x^2}$, а неравенство в верное равенство.

Ответ: $x\in[-1;0]\cup\{4\}$.

4.32. Решите неравенство: $(x+1)\sqrt{x^2+1}>x^2-1$.

Решение:

$$(x+1)\left(\sqrt{x^2+1}-x+1\right)>0$$

Произведение двух множителей положительно, если выполнено одно из условий:

$$\begin{cases}x+1>0,\\ \sqrt{x^2+1}-x+1>0;\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases}x+1<0,\\ \sqrt{x^2+1}-x+1<0.\end{cases}$$

Рассмотрим каждый из случаев в отдельности:

1) $\begin{cases}x+1>0,\\ \sqrt{x^2+1}-x+1>0;\end{cases}$ $\begin{cases}x>-1,\\ \sqrt{x^2+1}>x-1;\end{cases}$ $\begin{cases}x>-1,\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-1<0,\\ x^2+1\ge 0;\end{cases}\\ \begin{cases}x-1\ge 0,\\ x^2+1>(x-1)^2;\end{cases}\end{array}\right.\end{cases}$

$$\begin{cases} x > -1, \\ \left[\begin{array}{l} x < 1; \\ \begin{cases} x \ge 1, \\ x > 0; \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \quad \begin{cases} x > -1, \\ x \in \mathbb{R}; \end{cases} \quad x > -1.$$

2) $\begin{cases} x+1 < 0, \\ \sqrt{x^2+1} - x + 1 < 0; \end{cases}$

$$\begin{cases} x < -1, \\ \sqrt{x^2+1} < x-1; \end{cases} \quad \begin{cases} x < -1, \\ x^2+1 \ge 0, \\ x-1 \ge 0, \\ x^2+1 < (x-1)^2; \end{cases} \quad \begin{cases} x < -1, \\ x \in \mathbb{R}, \\ x \ge 1, \\ x < 0; \end{cases} \quad x \in \varnothing.$$

Ответ: $x \in (-1; \infty)$.

Иногда при решении иррациональных неравенств бывает достаточно проанализировать ОДЗ и учесть, что значение арифметического корня всегда неотрицательно.

4.33. Решите неравенство: $\sqrt{10x+5} < -3$.

Решение:

Левая часть неравенства неотрицательна при всех значениях x, при которых она определена, поэтому, не может быть меньше числа (-3). Следовательно, неравенство решений не имеет.

4.34. Решите неравенство: $\sqrt{x^2-9} > -2$.

Решение:

Поскольку левая часть неотрицательна, то она больше правой части при всех значениях переменной x, удовлетворяющих условию существования радикала, т.е. на ОДЗ.

Найдем ОДЗ: $x^2 - 9 \ge 0$;

$(x-3)(x+3) \ge 0$.

Ответ: $x \in (-\infty; -3] \cup [3; \infty)$.

Рассмотрим данный метод для решения иррациональных неравенств вида $f(x)\vee 0$.

Алгоритм применения метода:

1. Находим область определения $f(x)$ - $D(f)$.

2. Находим нули функции - значения переменной x, при которых $f(x)=0$.

3. Отмечаем в области определения нули функции, которые разбивают $D(f)$ на несколько промежутков, внутри каждого из которых $f(x)$ определена, непрерывна и сохраняет знак.

4. Определяем с помощью подсчета или рассуждений знак $f(x)$ на каждом полученном промежутке.

5. С учетом знака неравенства записываем ответ.

4.35. Решите неравенство: $\sqrt{x^2-8x+7}>3-x$.

Решение:

$\sqrt{x^2-8x+7}-3+x>0$

$f(x)=\sqrt{x^2-8x+7}-3+x$

1. Область определения функции $D(f)$:

$x^2-8x+7\geq 0$; $\quad x\in(-\infty;\ 1]\cup[7;\ \infty)$.

2. Нули функции:

$\sqrt{x^2-8x+7}-3+x=0$

$\sqrt{x^2-8x+7}=3-x$, $\quad x\leq 3$

$x^2-8x+7=9-6x+x^2$

$x=-1$

3.

+ – + ; −1 1 7 x

Ответ: $x\in(-\infty;\ -1)\cup[7;\ \infty)$.

4.36. Решите неравенство: $\sqrt{x-5}+\sqrt{10-x}<3$.

Решение:

$$\sqrt{x-5}+\sqrt{10-x}-3<0$$

$$f(x)=\sqrt{x-5}+\sqrt{10-x}-3$$

1. Область определения функции $D(f)$:

$$\begin{cases} x-5\geq 0, \\ 10-x\geq 0; \end{cases} \qquad x\in[5;10].$$

2. Нули функции:

$$\sqrt{x-5}+\sqrt{10-x}=3$$

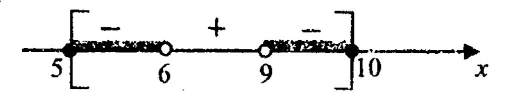
$$x-5+2\sqrt{(x-5)(10-x)}+10-x=9$$

$$\sqrt{(x-5)(10-x)}=2$$

$$x^2-15x+54=0$$

$$x_1=6, \quad x_2=9.$$

3.



Ответ: $x\in[5;\ 6)\cup(9;10]$.

4.37. Решите неравенство: $\dfrac{x-3}{\sqrt{x+3}}<1$.

Решение:

$$\frac{x-3}{\sqrt{x+3}}-1<0$$

$$f(x)=\frac{x-3}{\sqrt{x+3}}-1$$

1. Область определения функции $D(f)$:

$$x+3>0; \qquad x\in(-3;\ \infty).$$

2. Нули функции:

$$\frac{x-3}{\sqrt{x+3}}=1$$

$x-3=\sqrt{x+3}, \quad x \geq 3$

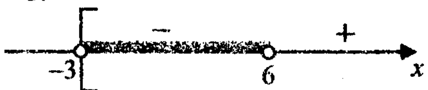
$x^2-6x+9=x+3$

$x^2-7x+6=0$

$x_1=1$ - посторонний корень;

$x_2=6$.

3.



Ответ: $x \in (-3; 6)$.

4.38. Решите неравенство: $\dfrac{(x-2)\sqrt{x^2-5x+4}}{x-5} \leq 0$.

Решение:

$$f(x)=\frac{(x-2)\sqrt{x^2-5x+4}}{x-5}$$

1. Область определения функции $D(f)$:

$$\begin{cases} x^2-5x+4 \geq 0, \\ x-5 \neq 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} (x-1)(x-4) \geq 0, \\ x-5 \neq 0; \end{cases}$$

$x \in (-\infty; 1] \cup [4; 5) \cup (5; \infty)$.

2. Нули функции:

$$\frac{(x-2)\sqrt{x^2-5x+4}}{x-5}=0$$

$$\left[\begin{array}{l} x-2=0, \\ x^2-5x+4=0; \end{array}\right.$$

$x_1=2$ - посторонний корень;

$x_2=1; \quad x_3=4$.

3.



Ответ: $x \in \{1\} \cup [4; 5)$.

4.39. Решите неравенство: $\dfrac{10x^2-7x+1}{\sqrt{x-3}-\sqrt{5-x}}<0$.

Решение:

$$f(x)=\frac{10x^2-7x+1}{\sqrt{x-3}-\sqrt{5-x}}$$

1. Область определения функции $D(f)$:

$$\begin{cases} x-3\ge 0, \\ 5-x\ge 0, \\ \sqrt{x-3}-\sqrt{5-x}\ne 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x\ge 3, \\ x\le 5, \\ x\ne 4; \end{cases} \qquad x\in[3;\ 4)\cup(4;5].$$

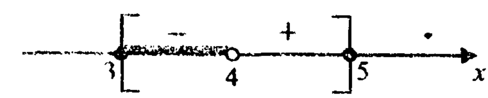
2. Нули функции:

$10x^2-7x+1=0$

$x_1=0,5$ - посторонний корень;

$x_2=0,2$ - посторонний корень.

3.



Ответ: $x\in[3;\ 4)$.

4.40. Решите неравенство: $\dfrac{\sqrt{2-x}+4x-3}{x}\ge 2$.

Решение:

$$\frac{\sqrt{2-x}+4x-3}{x}-2\ge 0$$

$$f(x)=\frac{\sqrt{2-x}+2x-3}{x}$$

1. Область определения функции $D(f)$:

$$\begin{cases} 2-x\ge 0, \\ x\ne 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x\le 2, \\ x\ne 0; \end{cases} \qquad x\in(-\infty;0)\cup(0;2].$$

2. Нули функции:

$\sqrt{2-x}+2x-3=0$

$\sqrt{2-x}=3-2x,\quad x\le 1,5$

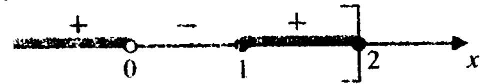
$2-x=9-12x+4x^2$

$4x^2-11x+7=0$

$x_1=\frac{7}{4}$ - посторонний корень;

$x_2=1.$

3.



Ответ: $x\in(-\infty;0)\cup[1;2]$.

4.41. Решите неравенство: $\frac{\sqrt{2x+9}-2-\sqrt{1+2x}}{\sqrt{7x+2}}\geq 0$.

Решение:

$$f(x)=\frac{\sqrt{2x+9}-2-\sqrt{1+2x}}{\sqrt{7x+2}}$$

1. Область определения функции $D(f)$:

$$\begin{cases}2x+9\geq 0,\\ 1+2x\geq 0,\\ 7x+2>0;\end{cases}\qquad \begin{cases}x\geq -4,5,\\ x\geq -0,5,\\ x>-\frac{2}{7};\end{cases}\qquad x>-\frac{2}{7}.$$

$$x\in\left(-\frac{2}{7};\infty\right).$$

2. Нули функции:

$$\sqrt{2x+9}-2-\sqrt{1+2x}=0$$

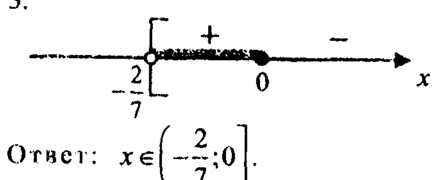
$$\sqrt{2x+9}=2+\sqrt{1+2x}$$

$$2x+9=4+4\sqrt{1+2x}+1+2x$$

$$\sqrt{1+2x}=1$$

$$x=0$$

3.



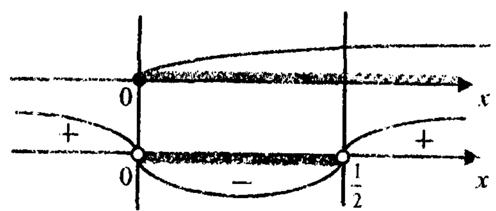
Ответ: $x \in \left(-\frac{2}{7};0\right]$.

Решение систем иррациональных неравенств

4.42. Решите систему неравенств: $\begin{cases} \sqrt{x+1} \ge 1, \\ x-2x^2 > 0. \end{cases}$

Решение:

$\begin{cases} x+1 \ge 1, \\ x(1-2x) > 0; \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x \ge 0, \\ x(2x-1) < 0. \end{cases}$



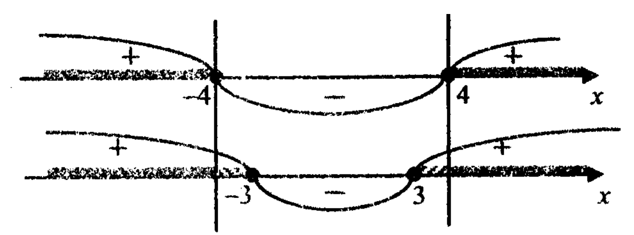
$0 < x < \frac{1}{2}$.

Ответ: $x \in \left(0;\ \frac{1}{2}\right)$.

4.43. Решите систему неравенств: $\begin{cases} \sqrt{x^2-16} > -16, \\ x^2-9 \ge 0. \end{cases}$

Решение:

$\begin{cases} x^2-16 \ge 0, \\ x^2-9 \ge 0; \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} (x-4)(x+4) \ge 0, \\ (x-3)(x+3) \ge 0. \end{cases}$



Ответ: $x \in (-\infty;\ -4] \cup [4;\ \infty)$.

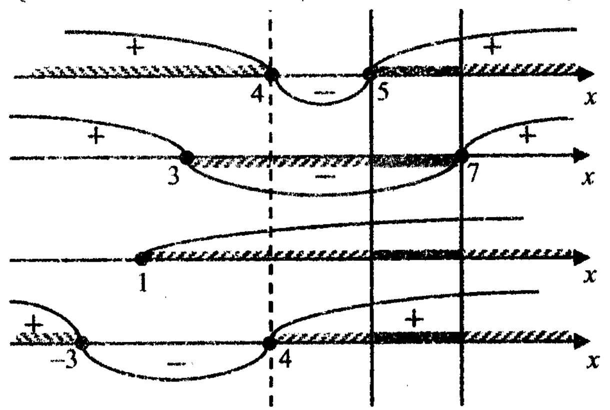
4.44. Решите неравенство: $\sqrt{x^2-9x+20} \le \sqrt{x-1} \le \sqrt{x^2-13}$.

Решение:

Запишем соответствующую систему неравенств:

$$\begin{cases} \sqrt{x-1} \ge \sqrt{x^2-9x+20}, \\ \sqrt{x-1} \le \sqrt{x^2-13}. \end{cases}$$

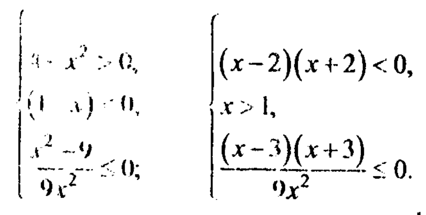
$$\begin{cases} x^2-9x+20 \ge 0, \\ x-1 \ge x^2-9x+20, \\ x-1 \ge 0, \\ x-1 \le x^2-13; \end{cases} \quad \begin{cases} (x-5)(x-4) \ge 0, \\ x^2-10x+21 \le 0, \\ x \ge 1, \\ x^2-x-12 \ge 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (x-5)(x-4) \ge 0, \\ (x-3)(x-7) \le 0, \\ x \ge 1, \\ (x-4)(x+3) \ge 0. \end{cases}$$



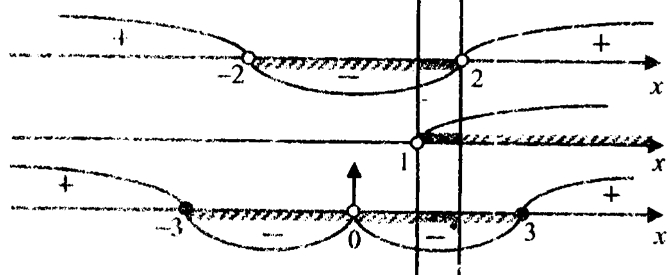
Ответ: $x \in \{4\} \cup [5;\ 7]$.

4.45. Решите систему неравенств: $\begin{cases}(1-x)\sqrt{4-x^2}<0,\\ \dfrac{1}{x^2}\ge\dfrac{1}{9}.\end{cases}$

Решение:



$$\begin{cases}4-x^2>0,\\ (1-x)<0,\\ \dfrac{x^2-9}{9x^2}\le 0;\end{cases}\qquad \begin{cases}(x-2)(x+2)<0,\\ x>1,\\ \dfrac{(x-3)(x+3)}{9x^2}\le 0.\end{cases}$$

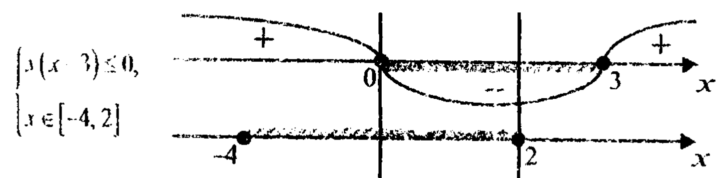


Ответ: $x\in(1;2)$.

4.46. Решите систему неравенств: $\begin{cases}\sqrt{3x-x^2}<4-x,\\ |x+1|\le 3.\end{cases}$

Решение:

$$\begin{cases}3x-x^2<(4-x)^2,\\ 4-x\ge 0,\\ 3x-x^2\ge 0,\\ -3\le x+1\le 3;\end{cases}\qquad \begin{cases}2x^2-11x+16>0,\\ x\le 4,\\ x(x-3)\le 0,\\ -4\le x\le 2;\end{cases}\qquad \begin{cases}x\in\mathbb{R},\\ x\le 4,\\ x(x-3)\le 0,\\ x\in[-4;2];\end{cases}$$



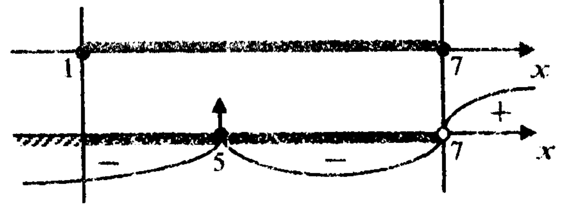
$$\begin{cases}x(x-3)\le 0,\\ x\in[-4,2]\end{cases}$$

Ответ: $x\in[0;2]$.

4.47. Решите систему неравенств: $\begin{cases} \sqrt{x+2}\cdot\sqrt{x-1}\cdot(x-7)\le 0 \\ \sqrt{\dfrac{(5-x)^2}{7-x}}\ge -1. \end{cases}$

Решение:

$\begin{cases} x+2\ge 0, \\ x-1\ge 0, \\ x-7\le 0, \\ \dfrac{(5-x)^2}{7-x}\ge 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x\ge -2, \\ x\ge 1, \\ x\le 7, \\ \dfrac{(x-5)^2}{x-7}\le 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x\in[1;7], \\ \dfrac{(x-5)^2}{x-7}\le 0. \end{cases}$



Ответ: $x\in[1;7)$.

ГЛАВА III. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ

§1. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Уравнение называется ***показательным***, если оно содержит неизвестную величину в показателе степени.

Общих приемов решения показательных уравнений нет. Тем не менее, можно указать некоторые методы, наиболее часто применяющиеся при решении показательных уравнений:

- приведение обеих частей уравнения к одному основанию;
- разложение на множители;
- введение новой переменной;
- логарифмирование обеих частей уравнения.

Каждый из вышеперечисленных методов рассмотрим на примерах.

Метод приведения обеих частей уравнения к одному основанию

Данный метод основан на следующей ***теореме***:

Если $a > 0$ и $a \neq 1$, то уравнения $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ и $f(x) = g(x)$ равносильны.

1.1. Решите уравнение: $5^x \cdot 0,2 = 125^{\frac{x}{2}} \cdot \sqrt{5}$.

Решение:

$$5^x \cdot 5^{-1} = 5^{\frac{3x}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{2}}$$

$$5^{x-1} = 5^{\frac{3x+1}{2}}$$

$$x - 1 = \frac{3x+1}{2}$$

$$x = -3.$$

Ответ: $x = -3$.

1.2. Решите уравнение $0,2^{\sqrt{x-2}} = b^{\log_2 \frac{1}{5}}$, где b – четное простое число.

Решение:

ОДЗ: $x \geq 2$.

$b = 2$ - единственно возможное четное простое число.

$$0,2^{\sqrt{x-2}}=2^{\log_2\frac{1}{5}}$$

$$0,2^{\sqrt{x-2}}=\frac{1}{5}$$

$$0,2^{\sqrt{x-2}}=0,2$$

$$\sqrt{x-2}=1$$

$x=3$.

Ответ: $x=3$.

1.3. Решите уравнение: $\left(\frac{7}{2}\right)^{x^2}=\left(\frac{2}{7}\right)^{4-5x}$.

Решение:

$$\left(\frac{7}{2}\right)^{x^2}=\left(\frac{7}{2}\right)^{5x-4}$$

$$x^2-5x+4=0$$

$x_1=4$; $x_2=1$.

Ответ: $\{1;\ 4\}$

1.4. Решите уравнение: $0,6^x\cdot\left(\frac{25}{9}\right)^{x^2-12}=\left(\frac{27}{125}\right)^3$.

Решение:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x\left(\frac{3}{5}\right)^{-2x^2+24}=\left(\frac{3}{5}\right)^9$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{-2x^2+x+24}=\left(\frac{3}{5}\right)^9$$

$$2x^2-x-15=0$$

$x_1=3$; $x_2=-\frac{5}{2}$.

Ответ: $\{-2,5;\ 3\}$.

1.5. Решите уравнение: $2^{x^2-3}\cdot 5^{x^2-3}=0{,}01\cdot\left(10^{x-1}\right)^3$.

Решение:

Приведем левую и правую части уравнения к степени с основанием 10.

$$(2\cdot 5)^{x^2-3}=10^{-2}\cdot 10^{3x-3}$$

$$10^{x^2-3}=10^{3x-3-2}$$

$$x^2-3=3x-5$$

$$x^2-3x+2=0$$

$$x_1=1;\ \ x_2=2.$$

Ответ: $\{1;\ 2\}$.

1.6. Решите уравнение: $\frac{1}{27}\cdot\sqrt[4]{9^{3x-1}}=27^{-\frac{2}{3}}$.

Решение:

Приведем левую и правую части уравнения к степени с основанием 3.

$$3^{-3}\cdot\sqrt[4]{\left(3^2\right)^{3x-1}}=\left(3^3\right)^{-\frac{2}{3}}$$

$$3^{-3}\cdot\left(3^{6x-2}\right)^{\frac{1}{4}}=3^{3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)}$$

$$3^{-3}\cdot 3^{\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}}=3^{-2}$$

$$3^{1{,}5x-3{,}5}=3^{-2}$$

$$1{,}5x-3{,}5=-2$$

$$x=1.$$

Ответ: $x=1$.

1.7. Решите уравнение: $2^{3+|x-1|}=16\cdot 4^{-0{,}5x}$.

Решение:

$$2^{3+|x-1|}=2^4\cdot\left(2^2\right)^{-0{,}5x}$$

$$2^{3+|x-1|}=2^{4-x}$$

$3+|x-1|=4-x$

$|x-1|=1-x$

$|x-1|=-(x-1)$

По определению модуля должно быть выполнено:
$x-1\le 0$; $x\le 1$.

Ответ: $(-\infty; 1]$.

Метод разложения на множители

Решение показательных уравнений данным методом заключается в вынесении за скобки общего множителя (степени с наименьшим показателем), группировке, применении формул сокращенного умножения.

Поясним данный метод на примерах.

1.8. Решите уравнение: $5^{2x+1}-3\cdot 5^{2x-1}=110$.

Решение:

$5^{2x-1}(5^2-3)=110$

$5^{2x-1}\cdot 22=110$

$5^{2x-1}=5$

$2x-1=1$

$x=1$.

Ответ: $x=1$.

1.9. Решите уравнение: $\left(\frac{1}{3}\right)^{2-x}-6\cdot 9^{\frac{x-4}{2}}+2\cdot 3^{x-6}=29$.

Решение:

$(3^{-1})^{2-x}-6\cdot(3^2)^{\frac{x-4}{2}}+2\cdot 3^{x-6}=29$

$3^{x-2}-6\cdot 3^{x-4}+2\cdot 3^{x-6}=29$

$3^{x-6}\cdot(3^4-6\cdot 3^2+2)=29$

$3^{x-6}\cdot 29=29$

$3^{x-6}=1$

$x-6=0$

$x=6.$

Ответ: $x=6.$

1.10. Решите уравнение: $3^{x-5}+3^{x-7}+3^{x-9}=45,5+22,75+11,375+...$

Решение:

Правая часть уравнения $\left(45,5+45,5\cdot\frac{1}{2}+45,5\cdot\frac{1}{4}+...\right)$ представляет собой сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, которая вычисляется по формуле:

$$S=\frac{b_1}{1-q}=\left|\begin{matrix} b_1=45,5 \\ q=\frac{1}{2}\end{matrix}\right|=\frac{45,5}{1-\frac{1}{2}}=91.$$

Тогда исходное уравнение равносильно:

$3^{x-5}+3^{x-7}+3^{x-9}=91$

$3^{x-9}\left(3^4+3^2+1\right)=91$

$3^{x-9}\cdot 91=91$

$3^{x-9}=1$

$x-9=0$

$x=9.$

Ответ: $x=9.$

1.11. Решите уравнение: $7\cdot 3^{x+1}-5^{x+2}=3^{x+4}-5^{x+3}.$

Решение:

Сгруппируем степени с основанием 5 в левой части уравнения, а степени с основанием 3 - в правой.

$5^{x+3}-5^{x+2}=3^{x+4}-7\cdot 3^{x+1}$

$5^{x+1}\left(5^2-5\right)=3^{x+1}\left(3^3-7\right)$

$5^{x+1}\cdot 20=3^{x+1}\cdot 20$

$5^{x+1}=3^{x+1}$

$$\left(\frac{5}{3}\right)^{x+1} = 1$$

$x+1=0$ или $x=-1$.

Ответ: $x=-1$.

1.12. Решите уравнение: $4^{x+2} - 10\cdot 3^{x} = 2\cdot 3^{x+3} - 11\cdot 2^{2x}$

Решение:

$$4^{x+2} + 11\cdot 2^{2x} = 2\cdot 3^{x+3} + 10\cdot 3^{x}$$

$$4^{x}\left(4^{2}+11\right) = 3^{x}\left(2\cdot 3^{3}+10\right)$$

$$4^{x}\cdot 27 = 3^{x}\cdot 64$$

Разделим обе части уравнения на выражение $\left(3^{x}\cdot 27\right)$.

$$\frac{4^{x}}{3^{x}} = \frac{64}{27}$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{x} = \left(\frac{4}{3}\right)^{3}$$

$x=3$.

Ответ: $x=3$.

1.13. Решите уравнение: $5^{x+6} - 3^{x+7} = 43\cdot 5^{x+4} - 19\cdot 3^{x+5}$.

Решение:

$$19\cdot 3^{x+5} - 3^{x+7} = 43\cdot 5^{x+4} - 5^{x+6}$$

$$3^{x+4}\left(19\cdot 3 - 3^{3}\right) = 5^{x+4}\left(43 - 5^{2}\right)$$

$$3^{x+4}\cdot 30 = 5^{x+4}\cdot 18$$

$$3^{x+4}\cdot 5 = 5^{x+4}\cdot 3$$

Разделим обе части уравнения на выражение $\left(5^{x+4}\cdot 5\right)$.

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{x+4} = \frac{3}{5}$$

$x+4=1$ или $x=-3$.

Ответ: $x=-3$.

1.14. Решите уравнение: $2\cdot 12^x-3^{x+1}+4^{x+1}-6=0$.

Решение:

$$2\cdot 4^x\cdot 3^x-3\cdot 3^x+4\cdot 4^x-2\cdot 3=0$$

$$2\cdot 4^x\left(3^x+2\right)-3\left(3^x+2\right)=0$$

$$\left(3^x+2\right)\left(2\cdot 4^x-3\right)=0$$

$$\left[\begin{array}{l}3^x+2=0,\\ 2\cdot 4^x-3=0;\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}3^x=-2,\\ 4^x=\dfrac{3}{2};\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x\in\varnothing,\\ x=\log_4\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{2}\left(\log_2 3-1\right).\end{array}\right.$$

Ответ: $x=\dfrac{1}{2}\left(\log_2 3-1\right)$.

1.15. Решите уравнение: $27^x-13\cdot 9^x+13\cdot 3^{x+1}-27=0$.

Решение:

$$3^{3x}-13\cdot 3^{2x}+13\cdot 3\cdot 3^x-27=0$$

$$\left(3^{3x}-27\right)-\left(13\cdot 3^{2x}-13\cdot 3\cdot 3^x\right)=0$$

$$\left(3^x-3\right)\left(3^{2x}+3\cdot 3^x+9\right)-13\cdot 3^x\left(3^x-3\right)=0$$

$$\left(3^x-3\right)\left(3^{2x}-10\cdot 3^x+9\right)=0$$

$$\left(3^x-3\right)\left(3^x-1\right)\left(3^x-9\right)=0$$

$$\left[\begin{array}{l}3^x-3=0,\\ 3^x-1=0,\\ 3^x-9=0;\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x=1,\\ x=0,\\ x=2.\end{array}\right.$$

Ответ: $\{0;1;2\}$.

1.16. Решите уравнение: $x^2\cdot 2^{\sqrt{x+2}}-2^{\sqrt{x+2}+4}=x^2\cdot 2^x-2^{x+4}$.

Решение:

<u>ОДЗ</u>: $x\ge -2$.

$$x^2\cdot 2^{\sqrt{x+2}}-x^2\cdot 2^x-2^{\sqrt{x+2}+4}+2^{x+4}=0$$

$$x^2\cdot\left(2^{\sqrt{x+2}}-2^x\right)-2^4\left(2^{\sqrt{x+2}}-2^x\right)=0$$

$$\left(x^2-16\right)\cdot\left(2^{\sqrt{x+2}}-2^x\right)=0$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2-16=0, \\ 2^{\sqrt{x+2}}-2^x=0; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x_1=4, \quad x_2=-4\notin \text{ОДЗ}, \\ \sqrt{x+2}=x; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x=4, \\ \begin{cases} x\ge 0, \\ x+2=x^2; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x=4, \\ \begin{cases} x\ge 0, \\ x^2-x-2=0; \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x=4, \\ \begin{cases} x\ge 0, \\ x_3=2, \quad x_4=-1; \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x=4, \\ x=2. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{2;4\}$.

Метод введения новой переменной

Уравнение вида $A\cdot a^{2x}+B\cdot a^x+C=0$ с помощью замены $a^x=y$ сводится к квадратному уравнению $Ay^2+By+C=0$.

Уравнение вида $A\cdot a^x+B\cdot a^{-x}+C=0$ с помощью замены $a^x=y$ сводится к квадратному уравнению $Ay^2+Cy+B=0$, поскольку a^{-x} можно представить как $\frac{1}{y}$.

1.17. Решите уравнение: $25^x+5^{x+1}-6=0$.

Решение:

$5^{2x}+5\cdot 5^x-6=0$

Замена: $5^x=y \quad (y>0)$.

$y^2+5y-6=0$

$y_1=-6<0; \quad y_2=1$

$5^x=1$

$x=0$.

Ответ: $x=0$.

1.18. Решите уравнение: $5^x-(0,2)^x=4,8$.

Решение:

$$5^x-\frac{1}{5^x}=4,8$$

Замена: $5^x=y$, $(y>0)$.

$$y-\frac{1}{y}=\frac{24}{5}$$

$$5y^2-24y-5=0$$

$$y_1=-\frac{1}{5}<0; \quad y_2=5$$

$$5^x=5$$

$$x=1.$$

Ответ: $x=1$.

1.19. Решите уравнение: $2^{\sqrt{x}}-2\cdot2^{-\sqrt{x}}=1$.

Решение:

ОДЗ: $x\geq0$.

$$2^{\sqrt{x}}-\frac{2}{2^{\sqrt{x}}}=1$$

Замена: $2^{\sqrt{x}}=y$, $(y>0)$.

$$y-\frac{2}{y}-1=0$$

$$y^2-y-2=0$$

$$y_1=-1<0; \quad y_2=2$$

$$2^{\sqrt{x}}=2$$

$$\sqrt{x}=1$$

$$x=1.$$

Ответ: $x=1$.

1.20. Решите уравнение: $3\cdot5^{2x-1}-2\cdot5^{x-1}=0,2$.

Решение:

$3\cdot5^{2x-1}-2\cdot5^{x-1}=0,2 \quad |\cdot5$

$3\cdot5^{2x}-2\cdot5^{x}=1$

Замена: $5^x=y$, $(y>0)$.

$3y^2-2y-1=0$

$y_1=-\dfrac{1}{3}<0;\quad y_2=1$

$5^x=1$

$x=0$.

Ответ: $x=0$.

1.21. Решите уравнение: $17\cdot2^{\sqrt{x^2-8x}}-8=2\cdot4^{\sqrt{x^2-8x}}$.

Решение:

ОДЗ: $x^2-8x\ge0$;

$x\in(-\infty;\,0]\cup[8;\,\infty)$.

$17\cdot2^{\sqrt{x^2-8x}}-8=2\cdot\left(2^2\right)^{\sqrt{x^2-8x}}$

$2\cdot\left(2^{\sqrt{x^2-8x}}\right)^2-17\cdot2^{\sqrt{x^2-8x}}+8=0$

Замена: $y=2^{\sqrt{x^2-8x}}$, $(y>0)$.

$2y^2-17y+8=0$

$y_1=\dfrac{1}{2};\quad y_2=8$

$$\left[\begin{array}{l}2^{\sqrt{x^2-8x}}=\dfrac{1}{2},\\ 2^{\sqrt{x^2-8x}}=8;\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}\sqrt{x^2-8x}=-1,\\ \sqrt{x^2-8x}=3;\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}x\in\varnothing,\\ x_1=-1,\quad x_2=9;\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}x=-1,\\ x=9.\end{array}\right.$$

Ответ: $\{-1;9\}$.

1.22. Решите уравнение: $3\cdot 8^{x-1}-2^{2x-1}-2^{x+2}=0$.

Решение:

$$\frac{3}{8}\cdot 8^x-\frac{1}{2}\cdot 2^{2x}-4\cdot 2^x=0$$

$$\frac{3}{8}\cdot\left(2^x\right)^3-\frac{1}{2}\cdot\left(2^x\right)^2-4\cdot 2^x=0$$

Введем новую переменную: $y=2^x$; $(y>0)$.

$$\frac{3}{8}y^3-\frac{1}{2}y^2-4y=0$$

$$3y^3-4y^2-32y=0$$

$$y\left(3y^2-4y-32\right)=0$$

$$y_1=0;\ \ y_2=-\frac{8}{3};\ \ y_3=4.$$

Условию $y>0$ удовлетворяет только корень $y_3=4$.

$2^x=4$

$x=2$.

Ответ: $x=2$.

1.23. Решите уравнение: $\frac{2^x}{5^{x-1}}+3=\frac{5^x}{2^{x-1}}$.

Решение:

$$\frac{5\cdot 2^x}{5^x}+3=\frac{2\cdot 5^x}{2^x}$$

$$5\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^x+3=2\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^x$$

Сделаем замену: $y=\left(\frac{2}{5}\right)^x$; $(y>0)$.

$$5y+3=\frac{2}{y}$$

$$5y^2+3y-2=0$$

$y_1 = -1 < 0; \;\; y_2 = \frac{2}{5}.$

$\left(\frac{2}{5}\right)^x = \frac{2}{5}$

$x = 1.$

Ответ: $x = 1.$

Рассмотрим однородные ур[illegible]

$4\cdot a^{2x}$ [illegible]

Данное уравнение состоит из трех выражений, представляющих собой степени с одинаковыми показателями и различными основаниями. Суть метода, применяемого для решения таких уравнений, заключается в почленном делении исходного уравнения на одну из степеней.

1.24. Решите уравнение: $6\cdot 4^x - 13\cdot 6^x + 6\cdot 9^x = 0.$

Решение:

$$6\cdot 2^{2x} - 13\cdot 2^x\cdot 3^x + 6\cdot 3^{2x} = 0 \quad \Big| : 2^{2x} = 4^x \neq 0$$

$$6 - 13\cdot\frac{3^x}{2^x} + 6\cdot\frac{3^{2x}}{2^{2x}} = 0$$

$$6 - 13\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^x + 6\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} = 0$$

Замена: $\left(\frac{3}{2}\right)^x = y; \;\; (y > 0).$

$$6y^2 - 13y + 6 = 0$$

$$y_1 = \frac{2}{3}; \;\; y_2 = \frac{3}{2}$$

$$\left[\begin{array}{l} \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{2}{3}, \\ \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{3}{2}; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x = -1, \\ x = 1. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{\pm 1\}.$

1.25. Решите уравнение: $3\cdot 16^x+2\cdot 81^x=5\cdot 36^x$.

Решение:

$$3\cdot 4^{2x}-5\cdot 4^x\cdot 9^x+2\cdot 9^{2x}=0 \quad \Big| : 9^{2x}\neq 0$$

$$3\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{2x}-5\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{x}+2=0$$

Замена: $\left(\frac{4}{9}\right)^{x}=y$; $(y>0)$.

$$3y^2-5y+2=0$$

$$y_1=\frac{2}{3};\quad y_2=1$$

$$\left[\begin{array}{l}\left(\frac{4}{9}\right)^{x}=\frac{2}{3},\\ \left(\frac{4}{9}\right)^{x}=1;\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}=\frac{2}{3},\\ \left(\frac{4}{9}\right)^{x}=1;\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}2x=1,\\ x=0;\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{2},\\ x=0.\end{array}\right.$$

Ответ: $\{0;\ 0{,}5\}$.

1.26. Решите уравнение: $6\cdot\sqrt[x]{9}-13\cdot\sqrt[x]{6}+6\cdot\sqrt[x]{4}=0$.

Решение:

$$6\cdot\sqrt[x]{9}-13\cdot\sqrt[x]{6}+6\cdot\sqrt[x]{4}=0 \quad \Big| :\sqrt[x]{4}\neq 0$$

$$6\cdot\sqrt[x]{\frac{9}{4}}-13\cdot\sqrt[x]{\frac{3}{2}}+6=0$$

$$6\cdot\left(\sqrt[x]{\frac{3}{2}}\right)^2-13\cdot\sqrt[x]{\frac{3}{2}}+6=0$$

Введением новой переменной $a=\sqrt[x]{\frac{3}{2}}$ получаем квадратное уравнение:

$$6a^2-13a+6=0$$

$$a_1=\frac{3}{2};\ a_2=\frac{2}{3}.$$

$$\left[\begin{aligned}&\sqrt[x]{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2},\\&\sqrt[x]{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3};\end{aligned}\right.\qquad\left[\begin{aligned}&\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\frac{3}{2},\\&\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\frac{2}{3};\end{aligned}\right.\qquad\left[\begin{aligned}&\frac{1}{x}=1,\\&\frac{1}{x}=-1;\end{aligned}\right.\qquad\left[\begin{aligned}&x=1,\\&x=-1.\end{aligned}\right.$$

У арифметического корня по определению показатель корня должен удовлетворять условиям:

$$x\geq 2;\ \ x\in\mathbb{N}.$$

Поэтому значение x не может быть равным 1 или -1. Корней нет.

Ответ: $x\in\varnothing$.

Метод логарифмирования обеих частей уравнения

Если уравнение невозможно привести к равенству степеней с одинаковыми основаниями, то приводим обе его части к виду, удобному для логарифмирования, логарифмируем и решаем полученное уравнение.

1.27. Решите уравнение: $3^{x^2-4}=5^{2x}$.

Решение:

Логарифмируем обе части уравнения по основанию 3.

$$\log_3 3^{x^2-4}=\log_3 5^{2x}$$

$$x^2-4=2x\cdot\log_3 5$$

$$x^2-2\log_3 5\cdot x-4=0$$

$$D=\log_3^2 5+4$$

$$x_{1,2}=\log_3 5\pm\sqrt{\log_3^2 5+4}\,.$$

Ответ: $x_{1,2}=\log_3 5\pm\sqrt{\log_3^2 5+4}$.

1.28. Решите уравнение: $6^{\frac{1}{x}}\cdot 2^x=12$.

Решение:

ОДЗ: $x\neq 0$.

Логарифмируем обе части уравнения по основанию 2.

$$\log_2\left(6^{\frac{1}{x}}\cdot 2^x\right)=\log_2 12$$

$$\log_2 6^{\frac{1}{x}}+\log_2 2^x=\log_2 4+\log_2 3$$

$$\frac{1}{x}\cdot\log_2(2\cdot 3)+x=2+\log_2 3$$

$$1+\log_2 3+x^2=2x+x\log_2 3$$

$$x^2-\left(2+\log_2 3\right)x+\left(1+\log_2 3\right)=0$$

$$D=4+4\log_2 3+\log_2^2 3-4-4\log_2 3=\log_2^2 3$$

$$x_{1,2}=\frac{2+\log_2 3\pm\log_2 3}{2}$$

$x_1=1$, $x_2=1+\log_2 3$.

Ответ: $\left\{1;\ 1+\log_2 3\right\}$.

1.29. Решите уравнение: $3^{2x-5}=5^x$.

Решение:

Так как $5=3^{\log_3 5}$, уравнение можно переписать в виде:

$$3^{2x-5}=\left(3^{\log_3 5}\right)^x$$

$$3^{2x-5}=3^{x\cdot\log_3 5}$$

$$2x-5=x\cdot\log_3 5$$

$$x\left(2-\log_3 5\right)=5$$

$$x=\frac{5}{2-\log_3 5}.$$

Ответ: $x=\dfrac{5}{2-\log_3 5}$.

1.30. Решите уравнение: $\left(\frac{7}{5}\right)^{|x-3|}=2$.

Решение:

Логарифмируем обе части уравнения по основанию $\frac{7}{5}$.

$|x-3|=\log_{\frac{7}{5}} 2$

$x-3=\pm\log_{\frac{7}{5}} 2$

$x=3\pm\log_{\frac{7}{5}} 2$.

Ответ: $\left\{3\pm\log_{\frac{7}{5}} 2\right\}$.

Дополнительные методы решения показательных уравнений

При решении показательных уравнений часто пользуются искусственными приемами:

- Рассмотрим уравнение, содержащее степени, произведение которых равно единице.

1.31. Решите уравнение: $\left(4+\sqrt{15}\right)^x+\left(4-\sqrt{15}\right)^x=8$.

Решение:

Числа $4+\sqrt{15}$ и $4-\sqrt{15}$ являются взаимно обратными числами (или сопряженными).

В самом деле: $\left(4+\sqrt{15}\right)\left(4-\sqrt{15}\right)=16-15=1$.

Поэтому: $4-\sqrt{15}=\frac{1}{4+\sqrt{15}}$.

Введем новую переменную: $t=\left(4+\sqrt{15}\right)^x$; $(t>0)$.

В результате получим уравнение:

$t+\frac{1}{t}=8$

$t^2-8t+1=0$

$t_1 = 4+\sqrt{15}$, $t_2 = 4-\sqrt{15}$

$$\left[\begin{array}{l}\left(4+\sqrt{15}\right)^x = 4+\sqrt{15},\\ \left(4+\sqrt{15}\right)^x = 4-\sqrt{15};\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\left(4+\sqrt{15}\right)^x = 4+\sqrt{15},\\ \left(4+\sqrt{15}\right)^x = \dfrac{1}{4+\sqrt{15}};\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x=1,\\ x=-1.\end{array}\right.$$

Ответ: $\{\pm 1\}$.

1.32. Решите уравнение: $\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^{x-1} + \left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^{x+1} = \dfrac{8}{\sqrt{4-\sqrt{15}}}$.

Решение:

$$\frac{\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^x}{\sqrt{4-\sqrt{15}}} + \left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x \cdot \sqrt{4+\sqrt{15}} = \frac{8}{\sqrt{4-\sqrt{15}}}$$

$$\frac{\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^x}{\sqrt{4-\sqrt{15}}} + \left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x \cdot \frac{1}{\sqrt{4-\sqrt{15}}} = \frac{8}{\sqrt{4-\sqrt{15}}}$$

$$\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^x + \left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x = 8$$

Введем новую переменную: $t = \left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^x$; $(t>0)$.

$$t+\frac{1}{t} = 8$$

$$t^2 - 8t + 1 = 0$$

$t_1 = 4+\sqrt{15}$, $t_2 = 4-\sqrt{15}$

$$\left[\begin{array}{l}\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^x = 4+\sqrt{15},\\ \left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^x = 4-\sqrt{15};\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\dfrac{x}{2} = -1,\\ \dfrac{x}{2} = 1;\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x=-2,\\ x=2.\end{array}\right.$$

Ответ: $\{\pm 2\}$.

- Для решения некоторых уравнений полезно воспользоваться свойством монотонной функции, суть которого заключается в следующем:

Пусть функция $f(x)$ монотонно возрастает, а функция $g(x)$ монотонно убывает или константа. Тогда, если уравнение $f(x)=g(x)$ имеет решение $x=x_0$, то это решение единственное.

В этом случае можно найти корень методом перебор

1.33. Решите уравнение: $3^x+4^x=5^x$.

Решение:

Очевидно, $x=2$ является корнем данного уравнения.

Докажем, что других корней уравнение не имеет, разделив его правую и левую части на 4^x:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^x+1=\left(\frac{5}{4}\right)^x.$$

Функция, стоящая в левой части полученного уравнения, монотонно убывает (основание степени меньше единицы). А функция, стоящая в правой части уравнения, монотонно возрастает. Следовательно, данное уравнение не может иметь более одного решения.

Ответ: $x=2$.

1.34. Решите уравнение: $2\cdot3^x+4^x=3$.

Решение:

Очевидно, что $x=0$ является корнем данного уравнения: $2\cdot3^0+4^0=3$.

Рассмотрим функцию $y=2\cdot3^x+4^x$.

Так как $y=2\cdot3^x$ и $y=4^x$ - возрастающие функции, то их сумма $y=2\cdot3^x+4^x$ – возрастающая функция. Значит, каждое свое значение функция $y=2\cdot3^x+4^x$ принимает только один раз.

Следовательно, $x=0$ – единственный корень данного уравнения.

Ответ: $x=0$.

1.35. Решите уравнение: $2^x+3^x=2\cdot5^x$.

Решение:

Разделим уравнение на выражение 5^x:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x+\left(\frac{3}{5}\right)^x=2$$

$f(x)=\left(\frac{2}{5}\right)^x+\left(\frac{3}{5}\right)^x$ - убывающая функция, следовательно, уравнение $f(x)=2$ не может иметь более одного корня.

Очевидно, что данным единственным корнем будет $x=0$:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^0+\left(\frac{3}{5}\right)^0=2.$$

Ответ: $x=0$.

§2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ

При решении показательных неравенств, как правило, используются те же приемы, что и при решении показательных уравнений, но при этом нужно различать свойства показательной функции с основанием большим единицы и меньшим единицы.

Рассмотрим основные методы решения таких неравенств:

- метод приведения обеих частей неравенства к степени с одинаковым основанием;
- метод введения новой переменной;
- метод разложения на множители;
- метод интервалов.

Метод приведения обеих частей неравенства к степени с одинаковым основанием

Решение простейших показательных неравенств основано на свойствах монотонности функции $y = a^x$:

Неравенство	Равносильно неравенству
$a^{f(x)} > a^{g(x)}$	$f(x) > g(x)$, если $a > 1$
	$f(x) < g(x)$, если $0 < a < 1$
$a^{f(x)} < a^{g(x)}$	$f(x) < g(x)$, если $a > 1$
	$f(x) > g(x)$, если $0 < a < 1$

Множество решений нестрогих неравенств $a^{f(x)} \geq a^{g(x)}$ или $a^{f(x)} \leq a^{g(x)}$ находится как объединение множеств решений соответствующих строгих неравенств и уравнения $a^{f(x)} = a^{g(x)}$.

Учитывая эти свойства, многие простейшие показательные неравенства решаются методом приведения обеих частей неравенства к степени с одинаковым основанием.

2.1. Решите неравенство: $\left(\frac{3}{4}\right)^{6x+10-x^2} < \frac{27}{64}$.

Решение:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{6x+10-x^2} < \left(\frac{3}{4}\right)^3$$

Так как основание $\frac{3}{4} < 1$, знак неравенства при переходе к равносильному неравенству меняется на противоположный:

$$6x+10-x^2 > 3$$

$$x^2-6x-7<0$$

$$(x+1)(x-7)<0.$$

Ответ: $x \in (-1;\ 7)$.

2.2. Решите неравенство: $\left(0,4^{\frac{1}{x^2-2x-3}}\right)^{6-x} > 1$.

Решение:

$$0,4^{\frac{6-x}{x^2-2x-3}} > 1$$

$$0,4^{\frac{6-x}{x^2-2x-3}} > (0,4)^0$$

Так как основание $0,4<1$, знак неравенства при переходе к равносильному неравенству меняется на противоположный:

$$\frac{6-x}{x^2-2x-3}<0$$

$$\frac{x-6}{(x+1)(x-3)}>0$$

$-$ -1 $+$ 3 $-$ 6 $+$ x

Ответ: $x \in (-1;\ 3) \cup (6;\ \infty)$.

2.3. Решите неравенство: $4^{\frac{1}{x}-2} \geq \frac{\lg\sqrt{10}}{2}$.

Решение:

Преобразуем правую часть неравенства:

$$\frac{\lg\sqrt{10}}{2} = \frac{\lg 10^{\frac{1}{2}}}{2} = \frac{1}{4} = 4^{-1}$$

Получаем: $4^{\frac{1}{x}-2} \geq 4^{-1}$.

Так как основание $4>1$, знак неравенства при переходе к равносильному неравенству сохраняется:

$$\frac{1}{x}-2 \geq -1$$

$$\frac{x-1}{x} \leq 0$$

+ 0 − 1 + x

Ответ: $x \in (0;\ 1]$.

2.4. Решите неравенство: $3^{\frac{6x-3}{x}} < \sqrt[3]{27^{2x-1}}$.

Решение:

$$3^{\frac{6x-3}{x}} < \sqrt[3]{27^{2x-1}}$$

$$3^{\frac{6x-3}{x}} < \sqrt[3]{\left(3^3\right)^{2x-1}}$$

$$3^{\frac{6x-3}{x}} < 3^{3\cdot(2x-1)\cdot\frac{1}{3}}$$

Так как основание $3>1$, знак неравенства при переходе к равносильному неравенству сохраняется:

$$\frac{6x-3}{x} < 2x-1$$

$$2x-1-\frac{6x-3}{x} > 0$$

$$\frac{2x^2-7x+3}{x} > 0$$

$$\frac{(2x-1)(x-3)}{x}>0$$

Ответ: $x\in\left(0;\ \frac{1}{2}\right)\cup(3;\ \infty)$.

2.5. Решите неравенство: $2^{x-6}<\sqrt[x]{\frac{1}{32}}$.

Решение:

Данное неравенство определено лишь на множестве натуральных чисел.

$$\sqrt[x]{\frac{1}{32}}=\left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{1}{x}}=2^{-\frac{5}{x}}$$

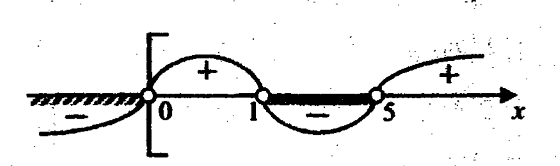
$$2^{x-6}<2^{-\frac{5}{x}}$$

Так как основание $2>1$, знак неравенства при переходе к равносильному неравенству сохраняется:

$$x-6<-\frac{5}{x}$$

$$\frac{x^2-6x+5}{x}<0$$

$$\frac{(x-1)(x-5)}{x}<0$$



Решением исходного неравенства будут числа 2, 3 и 4.

Ответ: $\{2;\ 3;\ 4\}$.

2.6. Решите неравенство: $\sqrt{27}\cdot 3^{-6x^2}\geq 9^{4x}$.

Решение:

$$3^{\frac{3}{2}-6x^2}\geq 3^{8x}$$

Так как основание $3>1$, знак неравенства при переходе к равносильному неравенству сохраняется:

$$\frac{3}{2}-6x^2\geq 8x$$

$12x^2+16x-3\le 0$

$12\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{1}{6}\right)\le 0.$

Ответ: $x\in\left[-\frac{3}{2};\ \frac{1}{6}\right].$

2.7. Решите неравенство: $2^{x^2-3}\cdot 5^{x^2-3}-0{,}01\cdot\left(10^{x-1}\right)^3<0.$

Решение:

$2^{x^2-3}\cdot 5^{x^2-3}<0{,}01\cdot 10^{3x-3}$

$10^{x^2-3}<10^{-2}\cdot 10^{3x-3}$

$10^{x^2-3}<10^{3x-5}$

Так как основание $10>1$, знак неравенства при переходе к равносильному неравенству сохраняется:

$x^2-3<3x-5$

$x^2-3x+2<0$

$(x-1)(x-2)<0$

$1<x<2.$

Ответ: $x\in(1;\ 2).$

2.8. Решите неравенство: $\left(\frac{2}{9}\right)^{x^2+x}\ge(20{,}25)^{2x-7}.$

Решение:

Преобразуем правую часть неравенства:

$(20{,}25)^{2x-7}=\left(20\frac{1}{4}\right)^{2x-7}=\left(\frac{81}{4}\right)^{2x-7}=\left(\frac{9}{2}\right)^{4x-14}=\left(\frac{2}{9}\right)^{14-4x}.$

Тогда исходное неравенство равносильно: $\left(\frac{2}{9}\right)^{x^2+x}\ge\left(\frac{2}{9}\right)^{14-4x}.$

Так как основание $\frac{2}{9}<1$, знак неравенства при переходе к равносильному неравенству меняется на противоположный:

$x^2+x\le 14-4x$

$x^2+5x-14\le 0$

$(x+7)(x-2)\le 0$

$-7\le x\le 2$.

Ответ: $x\in[-7;\ 2]$.

2.9. Решите неравенство: $3^{x^2-x}\ge\left(5^{x-1}\right)^x$.

Решение:

$3^{x^2-x}\ge 5^{x^2-x}\quad\Big|:5^{x^2-x}>0$

$\left(\frac{3}{5}\right)^{x^2-x}\ge 1$

$\left(\frac{3}{5}\right)^{x^2-x}\ge\left(\frac{3}{5}\right)^0$

Так как в полученном неравенстве основание $\frac{3}{5}<1$, данное неравенство равносильно:

$x^2-x\le 0$

$0\le x\le 1$.

Ответ: $x\in[0;\ 1]$.

2.10. Решите неравенство: $5^{\frac{x}{2}}>7$.

Решение:

Приведем правую часть неравенства к степени с основанием 5:

$5^{\frac{x}{2}}>5^{\log_5 7}$.

Так как основание $5>1$, знак неравенства при переходе к равносильному неравенству сохраняется:

$\frac{x}{2} > \log_5 7$; $\quad x > 2\log_5 7$; $\quad x > \log_5 49$.

Ответ: $x \in (\log_5 49;\ \infty)$.

2.11. Решите неравенство: $2^{\sqrt{2x+3}} \geq \frac{1}{2^x}$.

Решение:

<u>ОДЗ</u>: $2x+3 \geq 0$; $\quad x \geq -1{,}5$.

$2^{\sqrt{2x+3}} \geq 2^{-x}$

$\sqrt{2x+3} \geq -x$

Полученное иррациональное неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-x < 0,\\ 2x+3 \geq 0;\end{cases}\\ \begin{cases}-x \geq 0,\\ 2x+3 \geq x^2;\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x > 0,\\ x \geq -1,5;\end{cases}\\ \begin{cases}x \leq 0,\\ x^2-2x-3 \leq 0;\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x > 0,\\ x \geq -1,5;\end{cases}\\ \begin{cases}x \leq 0,\\ (x-3)(x+1) \leq 0;\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x > 0;\\ \begin{cases}x \leq 0,\\ x \in [-1;\ 3];\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x > 0,\\ x \in [-1;\ 0].\end{array}\right.$$

Полученные промежутки можно объединить: $x \in [-1;\ \infty)$.

Ответ: $x \in [-1;\ \infty)$.

2.12. Решите неравенство: $5^{|4x-6|} \geq 25^{3x-4}$.

Решение:

$5^{|4x-6|} \geq 5^{6x-8}$

$|4x-6| \geq 6x-8$

$$\left[\begin{array}{l}4x-6 \geq 6x-8,\\ -4x+6 \geq 6x-8;\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x \leq 1,\\ x \leq 1,4;\end{array}\right. \qquad x \leq 1,4.$$

Ответ: $x \in (-\infty;\ 1,4]$.

Как и в случае решения показательных уравнений, иногда приходится делать преобразования, напрямую не связанные со свойствами показательной функции.

Рассмотрим следующий пример.

2.13. Решите неравенство: $\left(\sqrt{10}+3\right)^{-x^2} \le \left(\sqrt{10}-3\right)^{15-2x}$.

Решение:

Заметим, что: $\left(\sqrt{10}+3\right)\left(\sqrt{10}-3\right)=10-9=1$.

Поэтому $\sqrt{10}-3=\frac{1}{\sqrt{10}+3}=\left(\sqrt{10}+3\right)^{-1}$.

Подставляя этот результат в исходное неравенство, имеем:

$\left(\sqrt{10}+3\right)^{-x^2} \le \left(\sqrt{10}+3\right)^{2x-15}$.

Так как $\sqrt{10}+3>1$, знак неравенства при переходе к равносильному неравенству сохраняется:

$-x^2 \le 2x-15$

$x^2+2x-15 \ge 0$

$(x+5)(x-3) \ge 0$.

Ответ: $x \in (-\infty;\ -5] \cup [3;\ \infty)$.

Метод введения новой переменной

Многие показательные неравенства сводятся к обычным алгебраическим с помощью введения новой переменной.

Неравенства вида $f\left(a^x\right) \vee 0$ при помощи замены переменной $t=a^x$ сводятся к решению системы неравенств:

$$\begin{cases} f(t) \vee 0, \\ t>0. \end{cases}$$

А затем к решению соответствующих простейших показательных неравенств.

2.14. Решите неравенство: $0{,}04^x-26\cdot 0{,}2^x+25 \le 0$.

Решение:

$0,2^{2x}-26\cdot 0,2^{x}+25\le 0$

Введем новую переменную: $t=0,2^{x}$; $(t>0)$.

$\begin{cases} t^2-26t+25\le 0, \\ t>0; \end{cases}$ $\begin{cases} (t-25)(t-1)\le 0, \\ t>0. \end{cases}$

$1\le t\le 25$

$1\le 0,2^{x}\le 25$

$\left(\frac{1}{5}\right)^0\le\left(\frac{1}{5}\right)^x\le\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$

Так как основание $\frac{1}{5}<1$, знаки двойного неравенства при переходе к равносильным неравенствам меняются на противоположные:

$0\ge x\ge -2$

$-2\le x\le 0$.

Ответ: $x\in[-2;\ 0]$.

2.15. Решите неравенство: $\frac{2^x+8}{2^x-1}>2^x$.

Решение:

Введем новую переменную: $t=2^{x}$; $(t>0)$.

$\begin{cases} \frac{t+8}{t-1}>t, \\ t>0; \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{t^2-2t-8}{t-1}<0, \\ t>0; \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{(t-4)(t+2)}{t-1}<0, \\ t>0. \end{cases}$

$1<t<4$

$1 < 2^x < 4$

$0 < x < 2.$

Ответ: $x \in (0;\ 2)$.

2.16. Решите неравенство: $\dfrac{1}{4^{\frac{x}{2}}+5} \le \dfrac{1}{2^{x+1}+1}$.

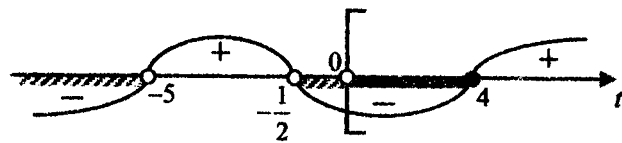
Решение:

Преобразуем неравенство к виду:

$$\frac{1}{2^x+5} \le \frac{1}{2\cdot 2^x+1}$$

Введем переменную: $t = 2^x$; $(t > 0)$.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{t+5} \le \dfrac{1}{2t+1}, \\ t > 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{t-4}{(t+5)(2t+1)} \le 0, \\ t > 0. \end{cases}$$



$0 < t \le 4$

$2^x \le 4$; $x \le 2$.

Ответ: $x \in (-\infty;\ 2]$.

2.17. Решите неравенство: $8^{x+\frac{1}{3}} - 9\cdot 4^x + 2^{x+2} \ge 0$.

Решение:

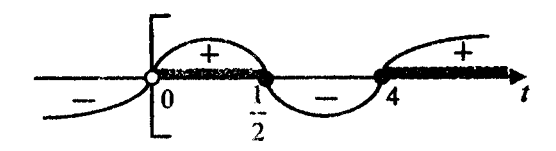
$$8^{x+\frac{1}{3}} - 9\cdot 4^x + 2^{x+2} \ge 0$$

$$2^{3x+1} - 9\cdot 2^{2x} + 4\cdot 2^x \ge 0$$

$$2\cdot 2^{3x} - 9\cdot 2^{2x} + 4\cdot 2^x \ge 0$$

Сделаем замену: $t = 2^x$; $(t > 0)$.

$$\begin{cases} 2t^3 - 9t^2 + 4t \ge 0, \\ t > 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} t(2t-1)(t-4) \ge 0, \\ t > 0. \end{cases}$$



$t \in \left(0;\ \dfrac{1}{2}\right] \cup [4;\ \infty)$

Получаем совокупность двух неравенств:

$\left[\begin{array}{l} 2^x \le \dfrac{1}{2}, \\ 2^x \ge 4; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x \le -1, \\ x \ge 2; \end{array}\right. \qquad x \in (-\infty;\ -1] \cup [2;\ \infty).$

Ответ: $x \in (-\infty;\ -1] \cup [2;\ \infty)$.

2.18. Решите неравенство: $3^x - 3^{1-x} \le 2$.

Решение:

$$3^x - \frac{3}{3^x} \le 2$$

Сделаем замену: $t = 3^x$; $\quad (t > 0)$.

$\begin{cases} t - \dfrac{3}{t} \le 2, \\ t > 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{t^2 - 2t - 3}{t} \le 0, \\ t > 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{(t-3)(t+1)}{t} \le 0, \\ t > 0. \end{cases}$

$t \in (0;\ 3]$

$0 < t \le 3$

$3^x \le 3; \qquad x \le 1.$

Ответ: $x \in (-\infty;\ 1]$.

2.19. Решите неравенство: $7^{-x} - 3 \cdot 7^{1+x} > 4$.

Решение:

$$\frac{1}{7^x}-3\cdot 7\cdot 7^x>4$$

Введем новую переменную: $t=7^x$; $(t>0)$.

$$\begin{cases}\frac{1}{t}-21t>4,\\ t>0;\end{cases}\qquad \begin{cases}\frac{21t^2+4t-1}{t}<0,\\ t>0;\end{cases}\qquad \begin{cases}\frac{21\left(t+\frac{1}{3}\right)\left(t-\frac{1}{7}\right)}{t}<0,\\ t>0.\end{cases}$$

$$0<t<\frac{1}{7}$$

$$7^x<\frac{1}{7};\qquad x<-1.$$

Ответ: $x\in(-\infty;\ -1)$.

Рассмотрим решение однородных показательных неравенств следующего вида:

$$A\cdot a^{2x}+B\cdot a^x\cdot b^x+C\cdot b^{2x}\vee 0.$$

Разделив обе части неравенства, например, на $b^{2x}>0$, получим равносильное неравенство:

$$A\left(\frac{a}{b}\right)^{2x}+B\left(\frac{a}{b}\right)^{x}+C\vee 0.$$

Введением новой переменной $t=\left(\frac{a}{b}\right)^x$ $(t>0)$ переходим к неравенству второй степени:

$$At^2+Bt+C\vee 0.$$

2.20. Решите неравенство: $5\cdot 4^x+2\cdot 25^x\le 7\cdot 10^x$.

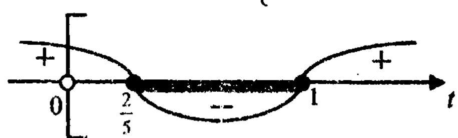
Решение:

$$5\cdot 2^{2x}+2\cdot 5^{2x}-7\cdot 2^{x}\cdot 5^{x}\le 0 \quad \Big| : 5^{2x}>0$$

$$5\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{2x}+2-7\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{x}\le 0$$

Замена: $\left(\frac{2}{5}\right)^{x}=t$; $(t>0)$.

$$\begin{cases}5t^2-7t+2\le 0,\\ t>0;\end{cases} \qquad \begin{cases}5(t-1)\left(t-\frac{2}{5}\right)\le 0,\\ t>0.\end{cases}$$



$$\frac{2}{5}\le t\le 1$$

$$\frac{2}{5}\le\left(\frac{2}{5}\right)^{x}\le 1$$

$0\le x\le 1$.

Ответ: $x\in[0;\ 1]$.

2.21. Решите неравенство: $3\cdot 16^{x}+2\cdot 81^{x}-5\cdot 36^{x}>0$.

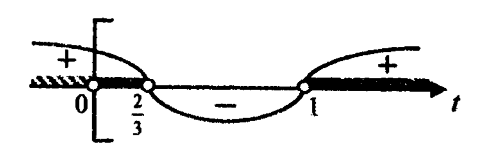
Решение:

$$3\cdot 4^{2x}+2\cdot 9^{2x}-5\cdot 9^{x}\cdot 4^{x}>0 \quad \Big| : 9^{2x}>0$$

$$3\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{2x}+2-5\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{x}>0$$

Сделаем замену: $t=\left(\frac{4}{9}\right)^{x}$; $(t>0)$.

$$\begin{cases}3t^2-5t+2>0,\\ t>0;\end{cases} \qquad \begin{cases}3\left(t-\frac{2}{3}\right)(t-1)>0,\\ t>0.\end{cases}$$



$t\in\left(0;\frac{2}{3}\right)\cup(1;\infty)$

Получаем совокупность двух неравенств:

$\left[\begin{array}{l}0<t<\frac{2}{3},\\ t>1;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\left(\frac{4}{9}\right)^x<\frac{2}{3},\\ \left(\frac{4}{9}\right)^x>1;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}<\frac{2}{3},\\ \left(\frac{4}{9}\right)^x>\left(\frac{4}{9}\right)^0;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}2x>1,\\ x<0;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x>\frac{1}{2}\\ x<0.\end{array}\right.$

Объединим полученные интервалы: $x\in(-\infty;\ 0)\cup\left(\frac{1}{2};\ \infty\right)$.

Ответ: $x\in(-\infty;\ 0)\cup\left(\frac{1}{2};\ \infty\right)$.

2.22. Решите неравенство: $4^x-2\cdot5^{2x}-10^x>0$.

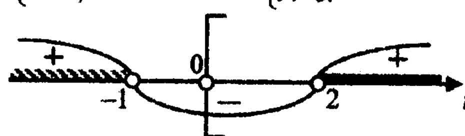
Решение:

$2^{2x}-2\cdot5^{2x}-2^x\cdot5^x>0 \quad \Big|\ :5^{2x}\neq0$

$\left(\frac{2}{5}\right)^{2x}-\left(\frac{2}{5}\right)^x-2>0$

Сделаем замену: $t=\left(\frac{2}{5}\right)^x$; $(t>0)$.

$\begin{cases}t^2-t-2>0,\\ t>0;\end{cases}$ $\begin{cases}(t-2)(t+1)>0,\\ t>0.\end{cases}$



$t>2$

$\left(\frac{2}{5}\right)^x > 2$; $\left(\frac{2}{5}\right)^x > \left(\frac{2}{5}\right)^{\log_{\frac{2}{5}} 2}$; $x < \log_{\frac{2}{5}} 2$.

Ответ: $x \in \left(-\infty; \log_{\frac{2}{5}} 2\right)$.

Метод разложения на множители

При решении некоторых показательных неравенств используется преобразование, состоящее в вынесении общего множителя за скобки и применении метода группировки.

Рассмотрим данный прием решения показательных неравенств на следующих примерах.

2.23. Решите неравенство: $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2} + 2^{x^2+3} < 18$.

Решение:

$2^{x^2} + 2^{x^2} \cdot 2^3 < 18$

$2^{x^2}(1+8) < 18$

$2^{x^2} \cdot 9 < 18$

$2^{x^2} < 2$

$x^2 < 1$

$(x-1)(x+1) < 0$

$-1 < x < 1$.

Ответ: $x \in (-1; 1)$.

2.24. Решите неравенство: $3^{2x-1} + 3^{2x-2} - 3^{2x-4} \le 315$.

Решение:

$3^{2x-4}\left(3^3 + 3^2 - 1\right) \le 315$

$3^{2x-4}\cdot 35\le 315$

$3^{2x-4}\le 9$

$2x-4\le 2$

$x\le 3$.

Ответ: $x\in(-\infty;\ 3]$.

2.25. Решите неравенство: $2^{x+2}-2^{x+3}-2^{x+4}>5^{x+1}-5^{x+2}$.

Решение:

$2^x\cdot 2^2-2^x\cdot 2^3-2^x\cdot 2^4>5^x\cdot 5-5^x\cdot 5^2$

$2^x(4-8-16)>5^x(5-25)$

$2^x\cdot(-20)>5^x\cdot(-20)\qquad \Big|:(-20)$

$2^x<5^x\qquad \Big|:5^x>0$

$\left(\frac{2}{5}\right)^x<1$

$x>0$.

Ответ: $x\in(0;\ \infty)$.

2.26. Решите неравенство: $3^x+2^{x-1}-2^{x+2}-3^{x-1}+2^{x-3}\ge 0$.

Решение:

$3^x-3^{x-1}\ge 2^{x+2}-2^{x-1}-2^{x-3}$

$3^x\left(1-\frac{1}{3}\right)\ge 2^x\left(4-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right)$

$3^x\cdot\frac{2}{3}\ge 2^x\cdot\frac{27}{8}\qquad \Big|:\left(2^x\cdot\frac{2}{3}\right)>0$

$\frac{3^x}{2^x}\ge\frac{27}{8}:\frac{2}{3}$

$\left(\frac{3}{2}\right)^x\ge\frac{81}{16}$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{4}$$

$x \geq 4$.

Ответ: $x \in [4; \infty)$.

2.27. Решите неравенство: $3^{x-10} - 2^{x-9} - 3^{x-11} - 2^{x-12} > 0$.

Решение:

$$3^{x-10} - 3^{x-11} > 2^{x-9} + 2^{x-12}$$

$$3^{x-12} \cdot \left(3^{2} - 3^{1}\right) > 2^{x-12} \cdot \left(2^{3} + 1\right)$$

$$3^{x-12} \cdot 6 > 2^{x-12} \cdot 9 \qquad \Big| : \left(2^{x-12} \cdot 6\right) > 0$$

$$\frac{3^{x-12}}{2^{x-12}} > \frac{9}{6}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x-12} > \frac{3}{2}$$

$x - 12 > 1$; $\quad x > 13$.

Ответ: $x \in (13; \infty)$.

2.28. Решите неравенство: $x^2 \cdot 5^x - 5^{2+x} \leq 0$.

Решение:

$$x^2 \cdot 5^x - 5^2 \cdot 5^x \leq 0$$

$$5^x \left(x^2 - 25\right) \leq 0$$

Так как $5^x > 0$ при любом x, то данное неравенство равносильно следующему неравенству:

$$x^2 - 25 \leq 0$$

$$(x-5)(x+5) \leq 0$$

$-5 \leq x \leq 5$.

Ответ: $x \in [-5; 5]$.

2.29. Решите неравенство: $\sqrt{x-2}\left(\frac{3^{x^2}}{243}-3\cdot\sqrt[4]{3}\right)\geq 0$.

Решение:

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{x-2}=0;\\ \begin{cases}3^{x^2-5}-3\cdot\sqrt[4]{3}\geq 0,\\ x-2>0;\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x=2;\\ \begin{cases}3^{x^2-5}\geq 3^{\frac{5}{4}},\\ x>2;\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x=2;\\ \begin{cases}x^2-5\geq\frac{5}{4},\\ x>2;\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x=2,\\ x\geq\frac{5}{2}.\end{array}\right.$$

Ответ $x\in\{2\}\cup\left[\frac{5}{2};\infty\right)$.

2.30. Решите неравенство: $3^{2x+3}\cdot 4^{x-2}\geq 3^{x+4}\cdot 4^{2x-3}$.

Решение:

$$\frac{3^{2x}\cdot 3^3\cdot 4^x}{4^2}-\frac{3^x\cdot 3^4\cdot 4^{2x}}{4^3}\geq 0$$

$$\frac{3^x\cdot 4^x\cdot 3^3}{4^2}\left(3^x-\frac{3\cdot 4^x}{4}\right)\geq 0$$

$$3^x-\frac{3\cdot 4^x}{4}\geq 0 \quad \Big| : 4^x>0$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^x\geq\frac{3}{4}$$

$x\leq 1$.

Ответ: $x\in(-\infty;1]$.

При решении показательных неравенств, содержащих произведение или частное различных функций, можно применять метод интервалов.

2.31. Решите неравенство: $(x-6)\left(8^{x-6}-64\right)<0$.

Решение:

Рассмотрим функцию $f(x)=(x-6)\left(8^{x-6}-64\right)$.

1. Область определения функции: $D(f)=\mathbb{R}$.

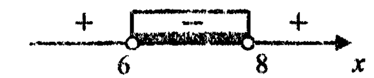
2. Нули функции:

$$\left[\begin{array}{l} x-6=0, \\ 8^{x-6}-64=0; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x-6=0, \\ 2^{3(x-6)}=2^6; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=6, \\ x=8. \end{array}\right.$$

3. Определим знаки функции на полученных промежутках.

Выберем в промежутке $x\in(8;\infty)$ контрольную точку $x=9$ и определим знак функции $f(x)$ в данной точке:

$f(9)=(9-6)\left(8^3-64\right)>0$



Ответ: $x\in(6;\,8)$.

2.32. Решите неравенство: $x^2\cdot 3^x-81\cdot 3^x\le x^2-81$.

Решение:

$3^x\cdot\left(x^2-81\right)\le x^2-81$

$3^x\cdot\left(x^2-81\right)-\left(x^2-81\right)\le 0$

$\left(3^x-1\right)\cdot\left(x^2-81\right)\le 0$

Рассмотрим функцию $f(x)=\left(3^x-1\right)\cdot\left(x^2-81\right)$.

1. Область определения функции: $D(f)=\mathbb{R}$.

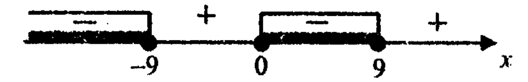
2. Нули функции:

$$\left[\begin{array}{l}3^x-1=0,\\ x^2-81=0;\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x=0,\\ x=\pm 9.\end{array}\right.$$

3. Определим знаки функции на полученных промежутках.

Выберем в промежутке $x\in(9;\infty)$ контрольную точку и определим знак функции $f(x)$ в данной точке.

Если $x=10$, то $f(10)=\left(3^{10}-1\right)\cdot 19>0$.



Ответ: $x\in(-\infty;-9]\cup[0;9]$.

2.33. Решите неравенство: $\dfrac{9^x-10\cdot 3^x+9}{1-x^2}\geq 0$.

Решение:

$$\frac{9^x-10\cdot 3^x+9}{x^2-1}\leq 0$$

Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{9^x-10\cdot 3^x+9}{x^2-1}$.

1. Область определения функции $D(f)$:

$x^2-1\neq 0$;

$x\neq\pm 1$.

2. Нули функции.

$9^x-10\cdot 3^x+9=0$

$\left(3^x\right)^2-10\cdot 3^x+9=0$

Замена: $3^x=a$; $(a>0)$.

$a^2-10a+9=0$

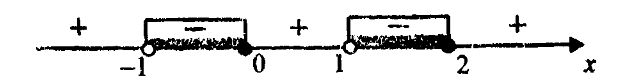
$a_1=1$; $a_2=9$

$$\left[\begin{array}{l}3^x=1,\\3^x=9;\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x=0,\\x=2.\end{array}\right.$$

3. **Определим знаки функции на полученных промежутках.**

Выберем в промежутке $x\in(2;\infty)$ контрольную точку и определим знак функции $f(x)$ в данной точке.

Если $x=3$, то $f(3)=\dfrac{729-270+9}{8}>0$.



Ответ: $x\in(-1;\,0]\cup(1;\,2]$.

2.34. Решите неравенство: $\dfrac{0,2^x-0,008}{x^2-10x+25}\le 0$.

Решение:

$$\frac{0,2^x-0,2^3}{(x-5)^2}\le 0$$

Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{0,2^x-0,2^3}{(x-5)^2}$.

1. **Область определения функции $D(f)$:**

$(x-5)^2\ne 0$;

$x\ne 5$.

2. **Нули функции.**

$0,2^x-0,2^3=0$

$x=3$

3. **Определим знаки функции на полученных промежутках.**

Подстановкой произвольных значений из данных интервалов, устанавливаем знаки функции на полученных интервалах:

+ − −
3 5 x

Ответ: $x \in [3;\ 5) \cup (5;\ \infty)$.

2.35. Решите неравенство: $\dfrac{4^x + 2x - 4}{x - 1} \le 2$.

Решение:

$$\frac{4^x + 2x - 4 - 2x + 2}{x - 1} \le 0$$

$$\frac{4^x - 2}{x - 1} \le 0$$

Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{4^x - 2}{x - 1}$.

1. Область определения функции $D(f)$:

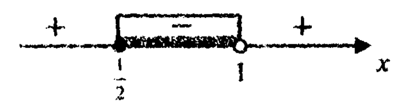
$x - 1 \ne 0$; $x \ne 1$.

2. Нули функции.

$4^x - 2 = 0$

$x = \dfrac{1}{2}$

3. Определим знаки функции на полученных промежутках.



Ответ: $x \in \left[\dfrac{1}{2};\ 1\right)$.

2.36. Решите неравенство: $\dfrac{e^{3x-1} - 1}{x + 8} \ge 0$.

Решение:

Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{e^{3x-1} - 1}{x + 8}$.

1. Область определения функции $D(f)$:

$x+8\neq 0$;

$x\neq -8$.

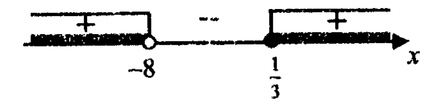
2. Нули функции.

$e^{3x-1}-1=0$

$3x-1=0$

$x=\frac{1}{3}$

3. Определим знаки функции на полученных проме утках.



Ответ: $x\in(-\infty,\ -8)\cup\left[\frac{1}{3};\ \infty\right)$.

Решение систем неравенств

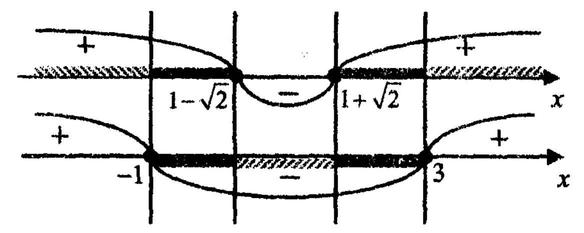
2.37. Решите двойное неравенство: $-4 \le 3^{x^2-2x-1} - 5 \le 4$.

Решение:

$1 \le 3^{x^2-2x-1} \le 9$

$3^0 \le 3^{x^2-2x-1} \le 3^2$

$\begin{cases} 3^{x^2-2x-1} \ge 3^0, \\ 3^{x^2-2x-1} \le 3^2; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2-2x-1 \ge 0, \\ x^2-2x-1 \le 2; \end{cases}$ $\begin{cases} \left(x-\left(1-\sqrt{2}\right)\right)\left(x-\left(1+\sqrt{2}\right)\right) \ge 0, \\ (x-3)(x+1) \le 0. \end{cases}$



Ответ: $x \in \left[-1;\ 1-\sqrt{2}\right] \cup \left[1+\sqrt{2};\ 3\right]$.

2.38. Решите систему неравенств: $\begin{cases} \left(\dfrac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\dfrac{8}{9}\right)^{-x} > \dfrac{27}{64}, \\ 2^{x^2-6x-3,5} < 8\sqrt{2}. \end{cases}$

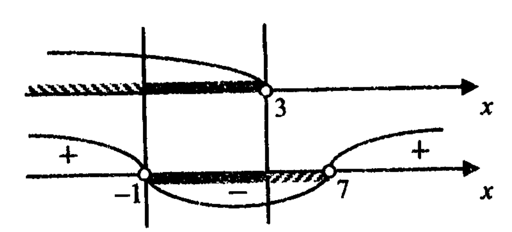
Решение:

Преобразуем левую часть первого неравенства системы:

$\left(\dfrac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\dfrac{8}{9}\right)^{-x} = \dfrac{2^x}{3^x} \cdot \dfrac{2^{-3x}}{3^{-2x}} = \dfrac{2^{-2x}}{3^{-x}} = \left(\dfrac{4}{3}\right)^{-x} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^x$.

Получаем:

$\begin{cases} \left(\dfrac{3}{4}\right)^x > \left(\dfrac{3}{4}\right)^3, \\ 2^{x^2-6x-3,5} < 2^{3,5}; \end{cases}$ $\begin{cases} x < 3, \\ x^2-6x-7 < 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x < 3, \\ (x-7)(x+1) < 0. \end{cases}$



Ответ: $x \in (-1;\ 3)$.

2.39. Решите систему неравенств: $\begin{cases} \sqrt{x+5} > -6, \\ 2^x < \frac{1}{8}. \end{cases}$

Решение:

$\begin{cases} \sqrt{x+5} > -6, \\ 2^x < \frac{1}{8}; \end{cases}$ $\begin{cases} x+5 \geq 0, \\ 2^x < 2^{-3}; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq -5, \\ x < -3; \end{cases}$ $-5 \leq x < -3$.

Ответ: $x \in [-5;\ -3)$.

2.40. Решите систему неравенств: $\begin{cases} \sqrt{5x-1} \leq 2, \\ 2^{x-1} - 3 \cdot 2^{x+2} > -23. \end{cases}$

Решение:

Решим второе неравенство системы:

$2^{x-1} - 3 \cdot 2^{x+2} > -23$

$2^{x-1}\left(1 - 3 \cdot 2^3\right) > -23$

$2^{x-1} \cdot (-23) > -23 \quad \Big| : (-23) < 0$

$2^{x-1} < 1$

$x - 1 < 0$

Таким образом, получаем равносильную систему неравенств:

$\begin{cases} 5x-1 \geq 0, \\ 5x-1 \leq 4, \\ x-1 < 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 0,2, \\ x \leq 1, \\ x < 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq \frac{1}{5}, \\ x < 1. \end{cases}$

Ответ: $x \in \left[\frac{1}{5};\ 1\right)$.

2.41. Решите систему неравенств: $\begin{cases} 2^x \cdot 5^{x-1} \ge 0,2 \cdot 10^{2-x}, \\ 4^x \cdot 5^{x+1} \le 5 \cdot 20^{2-x}. \end{cases}$

Решение:

$\begin{cases} \frac{1}{5} \cdot 10^x \ge \frac{1}{5} \cdot 10^{2-x}, \\ 5 \cdot 20^x \le 5 \cdot 20^{2-x}. \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x \ge 2-x, \\ x \le 2-x; \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x \ge 1, \\ x \le 1; \end{cases}$ $\quad x = 1$.

Ответ: $x = 1$.

2.42. Решите систему неравенств: $\begin{cases} 3 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^x - 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x + 1 > 0, \\ 2^{x^2-3x} \le 16. \end{cases}$

Решение:

1. Решим первое неравенство системы:

$3 \cdot \left(\frac{1}{9}\right) - 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x + 1 > 0;$

Введем новую переменную: $t = \left(\frac{1}{3}\right)^x$; $(t > 0)$.

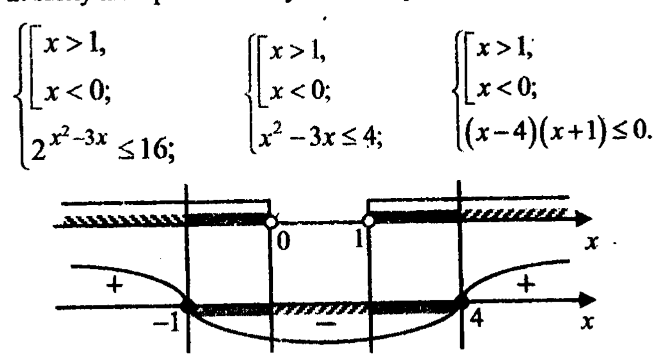
$\begin{cases} 3t^2 - 4t + 1 > 0, \\ t > 0; \end{cases}$ $\quad \begin{cases} (3t-1)(t-1) > 0, \\ t > 0. \end{cases}$



$\left[\begin{array}{l} 0 < t < \frac{1}{3}, \\ t > 1; \end{array}\right.$ $\quad \left[\begin{array}{l} \left(\frac{1}{3}\right)^x < \frac{1}{3}, \\ \left(\frac{1}{3}\right)^x > 1; \end{array}\right.$ $\quad \left[\begin{array}{l} x > 1, \\ x < 0. \end{array}\right.$

2. Получаем равносильную систему:

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x>1,\\ x<0;\end{array}\right.\\ 2^{x^2-3x}\le 16;\end{cases}\qquad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x>1,\\ x<0;\end{array}\right.\\ x^2-3x\le 4;\end{cases}\qquad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x>1;\\ x<0;\end{array}\right.\\ (x-4)(x+1)\le 0.\end{cases}$$



Ответ: $x\in[-1;0)\cup(1;4]$.

§3. ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Изучая свойства логарифмов, следует обратить особое внимание на то, что все их свойства следуют из свойств степеней, и поэтому для хорошего знания логарифмов надо уметь свободно обращаться со степенями. Такая тесная связь логарифмов и степеней существует потому, что само определение логарифма дается через понятие степени.

__Определение__. Логарифмом числа b $(b>0)$ по основанию a (где $a>0$, $a\neq 1$) называется показатель степени x, в которую надо возвести основание a, чтобы получить число b. То есть:

$$\boxed{\begin{array}{l}\log_a b = x\\ a>0,\ a\neq 1\end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l}a^x = b\\ b>0\end{array}}$$

Математической записью определения логарифма является ***основное логарифмическое тождество***:

$$\boxed{a^{\log_a b} = b} \quad (a>0,\ a\neq 1,\ b>0)$$

Напомним, что всякое положительное число при любом (положительном и отличном от единицы) основании имеет логарифм, а отрицательные числа и нуль логарифмов не имеют.

__**Основные свойства логарифмов**__:

$(a>0,\ a\neq 1,\ b>0,\ c>0,\ c\neq 1)$

1. $\log_a 1 = 0$

2. $\log_a a = 1$

3. $\log_a (b\cdot c) = \log_a b + \log_a c$ (*логарифм произведения*)

4. $\log_a \dfrac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$ (*логарифм частного*)

5. $\log_a b^n = n \log_a b$ (*логарифм степени*)

6. $\log_{a^k} b = \frac{1}{k}\log_a b$

7. $\log_{a^k} b^n = \frac{n}{k}\log_a b$

8. $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ *(формула перехода к новому основанию)*

В частности: $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$.

9. $c = \log_a a^c$ *(запись числа через логарифм)*

10. $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

Частные случаи:

$\log_{10} a = \lg a$ *(десятичный логарифм)*;

$\log_e a = \ln a$ *(натуральный логарифм)*.

Наша цель состоит в том, чтобы показать, как основные свойства логарифмов применяются для упрощения выражений, вычисления одних логарифмов через другие.

Внимательно разберите приведенные примеры; важно понять, где используются перечисленные выше свойства.

Вычисления на применение основного логарифмического тождества

3.1. Вычислите:

1) $10^{3-2\lg 5}$ 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2+2\log_{\frac{1}{3}} 6}$ 3) $2^{6+\log_2 3} + 10^{3\lg 3}$

4) $7^{\log_7 2 + 2\log_7 3}$ 5) $49^{\log_7 2 - \frac{1}{2}\log_{49} 64}$ 6) $5^{\log_{\sqrt{5}} 4 + 2\log_5 3}$

Решение:

1) $10^{3-2\lg 5} = 10^3 \cdot 10^{-2\lg 5} = 10^3 \cdot 10^{\lg 5^{-2}} = 10^3 \cdot 5^{-2} = \frac{1000}{25} = 40$

2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2+2\log_{\frac{1}{3}}6}=\left(\frac{1}{3}\right)^{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{2\log_{\frac{1}{3}}6}=\frac{1}{9}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{3}}6^2}=\frac{1}{9}\cdot 36=4$

3) $2^{6+\log_2 3}+10^{3\lg 3}=2^6\cdot 2^{\log_2 3}+10^{\lg 3^3}=2^6\cdot 3+3^3=219$

4) $7^{(\log_7 2+2\log_7 3)}=7^{(\log_7 2+\log_7 3^2)}=7^{\log_7 18}=18$

5) $49^{\log_7 2-\frac{1}{2}\log_{49}64}=49^{\log_7 2}\cdot 49^{-\frac{1}{2}\log_{49}64}=$

$=\left(7^2\right)^{\log_7 2}\cdot 49^{\log_{49}64^{-\frac{1}{2}}}=7^{\log_7 2^2}\cdot 49^{\log_{49}\frac{1}{8}}=4\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$

6) $5^{\log_{\sqrt{5}}4+2\log_5 3}=5^{2\log_5 4}\cdot 5^{\log_5 3^2}=4^2\cdot 3^2=16\cdot 9=144$

3.2. Вычислите:

1) $81^{\log_3 5}+27^{\log_9 36}+3^{4\log_9 7}$ 2) $72\cdot\left(49^{\frac{1}{2}\log_7 9-\log_7 6}+5^{-\log_{\sqrt{5}}4}\right)$

3) $(0,025)^{\lg 2}\cdot(0,04)^{\lg 2}$ 4) $\sqrt{36^{\log_6 5}+10^{1+\lg 2}+6\cdot 3^{\log_9 36}}$

Решение:

1) $81^{\log_3 5}+27^{\log_9 36}+3^{4\log_9 7}=3^{4\log_3 5}+3^{3\log_{3^2}6^2}+3^{4\log_{3^2}7}=$

$=3^{\log_3 5^4}+3^{\log_3 6^3}+3^{\log_3 7^2}=5^4+6^3+7^2=625+216+49=890$

2) $72\cdot\left(49^{\frac{1}{2}\log_7 9-\log_7 6}+5^{-\log_{\sqrt{5}}4}\right)=72\cdot\left(49^{\log_7 3-\log_7 6}+5^{-2\log_5 4}\right)=$

$=72\cdot\left(7^{2\log_7\frac{1}{2}}+5^{\log_5 4^{-2}}\right)=72\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{16}\right)=72\cdot\frac{5}{16}=22,5$

3) $(0,025)^{\lg 2}\cdot(0,04)^{\lg 2}=(0,025\cdot 0,04)^{\lg 2}=(0,001)^{\lg 2}=$

$$=\left(10^{-3}\right)^{\lg 2}=10^{\lg 2^{-3}}=\frac{1}{8}$$

4) $$\sqrt{36^{\log_6 5}+10^{1+\lg 2}+6\cdot 3^{\log_9 36}}=\sqrt{6^{2\log_6 5}+10\cdot 10^{\lg 2}+6\cdot 3^{\log_{3^2} 6^2}}=$$
$$=\sqrt{5^2+10\cdot 2+6\cdot 6}=\sqrt{81}=9$$

Вычисления на применение определения логарифма

3.3. Вычислите:

1) $\log_{\frac{1}{\sqrt{7}}} 49$ 2) $\log_{64}\sqrt[3]{2}$ 3) $\log_{0,(3)}\frac{1}{\sqrt[11]{243}}$

4) $\log_2\left(\frac{\sqrt[4]{32}\cdot\sqrt[3]{2}}{\sqrt{8}}\right)$ 5) $\log_{128}16$ 6) $\log_{\frac{5}{2}}\frac{1}{\sqrt[3]{0,16}}$

Решение:

1) Пусть $\log_{\frac{1}{\sqrt{7}}} 49=x$.

По определению логарифма:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^x=49;\qquad 7^{-\frac{x}{2}}=7^2;\qquad -\frac{x}{2}=2;\qquad x=-4.$$

2) $$\log_{64}\sqrt[3]{2}=x;\qquad 64^x=2^{\frac{1}{3}};\qquad 2^{6x}=2^{\frac{1}{3}};\qquad 6x=\frac{1}{3};\qquad x=\frac{1}{18}.$$

3) $$\log_{0,(3)}\frac{1}{\sqrt[11]{243}}=x;\qquad \left(\frac{1}{3}\right)^x=\frac{1}{\sqrt[11]{243}};\qquad \left(\frac{1}{3}\right)^x=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{5}{11}};\qquad x=\frac{5}{11}.$$

4) $$\log_2\left(\frac{\sqrt[4]{32}\cdot\sqrt[3]{2}}{\sqrt{8}}\right)=x;\qquad 2^x=\frac{2^{\frac{5}{4}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{3}{2}}};\qquad 2^x=2^{\frac{1}{12}};\qquad x=\frac{1}{12}.$$

5) $$\log_{128}16=x;\qquad 128^x=16;\qquad 2^{7x}=2^4;\qquad x=\frac{4}{7}.$$

6) $\log_{\frac{5}{2}} \frac{1}{\sqrt[3]{0,16}} = x$; $\left(\frac{5}{2}\right)^x = \frac{1}{\sqrt[3]{0,16}}$; $\left(\frac{5}{2}\right)^x = \left(\frac{25}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$;

$\left(\frac{5}{2}\right)^x = \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$; $x = \frac{2}{3}$.

Вычисления на применение формулы логарифма степени

3.4. Вычислите:

1) $3\log_2\left(\log_4 16\right) + \log_{0,5} 2$

2) $\log_8 \log_4 \log_2 16$

3) $\log_4 \log_{14} 196 + \log_5 \sqrt{5}$

4) $\log_5 \frac{25}{\sqrt[3]{5}} + \log_7 \sqrt[3]{49}$

5) $\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt[4]{2}}$

6) $\log^2_{5\sqrt{5}} \sqrt{5} - \log_{3\sqrt{5}} 5\sqrt{5} + \log_{\sqrt{3}+1}\left(4 + 2\sqrt{3}\right)$

Решение:

1) $3\log_2\left(\log_4 16\right) + \log_{0,5} 2 = 3\log_2\left(\log_4 4^2\right) + \log_{\frac{1}{2}} 2 =$

$= 3\log_2 2 + \log_{2^{-1}} 2 = 3 - 1 = 2$

2) $\log_8 \log_4 \log_2 16 = \log_8 \log_4 \log_2 2^4 = \log_8 \log_4 4 = \log_8 1 = 0$

3) $\log_4 \log_{14} 196 + \log_5 \sqrt{5} = \log_4 \log_{14} 14^2 + \log_5 5^{\frac{1}{2}} =$

$= \log_4 2 + \frac{1}{2}\log_5 5 = \log_{2^2} 2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\log_2 2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

4) $\log_5 \frac{25}{\sqrt[3]{5}} + \log_7 \sqrt[3]{49} = \log_5 5^{\frac{5}{3}} + \log_7 7^{\frac{2}{3}} = \frac{5}{3}\log_5 5 + \frac{2}{3}\log_7 7 = \frac{5}{3} + \frac{2}{3} = \frac{7}{3}$

5) $\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt[4]{2}} = \log_2 \log_2 2^{\frac{1}{8}} = \log_2 \frac{1}{8} = \log_2 2^{-3} = -3$

$$\log^2_{\sqrt[5]{5}}\sqrt{5}-\log_{\sqrt[3]{5}}5\sqrt{5}+\log_{\sqrt{3}+1}\left(4+2\sqrt{3}\right)=\left(\log_{5^{\frac{1}{5}}}5^{\frac{1}{2}}\right)^2-$$

$$-\log_{5^{\frac{1}{3}}}5^{\frac{3}{2}}+\log_{\sqrt{3}+1}\left(\sqrt{3}+1\right)^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2-\frac{9}{2}+2=3,75$$

Вычисления на применение формул логарифмов произведения, частного и степени

5. Вычислите:

1) $\log_2(0,4)+\log_2\sqrt{2}+\log_2 10$

2) $\log_6 30-\frac{1}{2}\log_6 150$

3) $\log_{\frac{1}{2}}\left(5+2\sqrt{6}\right)+\log_{\frac{1}{2}}\left(5-2\sqrt{6}\right)$

4) $\log_5 175-\log_5 7-\left(\log_3 8+3\log_3\frac{3}{2}\right)$

5) $\dfrac{3\log_3 2-\log_3 24}{1+\log_3 9}$

6) $\lg\operatorname{tg}1^\circ+\lg\operatorname{tg}2^\circ+\ldots+\lg\operatorname{tg}89^\circ$

Решение:

1) $\log_2(0,4)+\log_2\sqrt{2}+\log_2 10=\log_2\left(0,4\cdot\sqrt{2}\cdot 10\right)=\log_2 4\sqrt{2}=$

$=\log_2 2^{\frac{5}{2}}=\frac{5}{2}\log_2 2=\frac{5}{2}$

2) $\log_6 30-\frac{1}{2}\log_6 150=\log_6 30-\log_6\sqrt{150}=\log_6\frac{30}{\sqrt{150}}=\log_6\frac{6}{\sqrt{6}}=$

$=\log_6\sqrt{6}=\log_6 6^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$

3) $\log_{\frac{1}{2}}\left(5+2\sqrt{6}\right)+\log_{\frac{1}{2}}\left(5-2\sqrt{6}\right)=\log_{\frac{1}{2}}\left(5+2\sqrt{6}\right)\left(5-2\sqrt{6}\right)=\log_{\frac{1}{2}}1=0$

4) $\log_5 175-\log_5 7-\left(\log_3 8+3\log_3\frac{3}{2}\right)=\log_5\frac{175}{7}-\log_3\left(8\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^3\right)=$

$=\log_5 25-\log_3 27=\log_5 5^2-\log_3 3^3=2-3=-1$

5) $\frac{3\log_3 2-\log_3 24}{1+\log_3 9}=\frac{\log_3 2^3-\log_3 24}{1+\log_3 3^2}=\frac{\log_3\frac{8}{24}}{1+2}=\frac{\log_3 3^{-1}}{3}=-\frac{1}{3}$

6) $\lg \mathrm{tg}1^\circ+\lg \mathrm{tg}2^\circ+...+\lg \mathrm{tg}89^\circ=\lg\left(\mathrm{tg}1^\circ\cdot \mathrm{tg}2^\circ\cdot \mathrm{tg}3^\circ\cdot...\cdot \mathrm{tg}87^\circ\cdot \mathrm{tg}88^\circ\cdot \mathrm{tg}89^\circ\right)$
$=\lg\left(\mathrm{tg}1^\circ\cdot \mathrm{tg}2^\circ\cdot \mathrm{tg}3^\circ\cdot...\cdot \mathrm{ctg}3^\circ\cdot \mathrm{ctg}2^\circ\cdot \mathrm{ctg}1^\circ\right)=\lg\left(\mathrm{tg}45^\circ\right)=\lg 1=0$

3.6. ***Задание:***

1) Вычислите значение 9^x, при $x=\log_3 9+1,5\cdot\log_3\frac{1}{3}$

2) Вычислите значение 3^x, при $x=\log_2 4-\lg 20-\lg 5$

Решение:

1) $x=\log_3 9+1,5\cdot\log_3\frac{1}{3}=\log_3\left(9\cdot 3^{-1,5}\right)=\log_3 3^{0,5}=0,5$.

$9^x=9^{0,5}=3$

2) $x=\log_2 4-\lg 20-\lg 5=\log_2 2^2-\lg(20\cdot 5)=2-2=0$

$3^x=3^0=1$

3.7. Упростите выражение $\log_4\frac{x^2}{4}-2\cdot\log_4\left(4x^4\right)$ и вычислите его значение при $x=-2$.

Решение:

$\log_4\frac{x^2}{4}-2\cdot\log_4\left(4x^4\right)=\log_4 x^2-\log_4 4-2\cdot\log_4 4-2\cdot\log_4 x^4=$

$=2\cdot\log_4|x|-1-2-8\cdot\log_4|x|=-3-6\cdot\log_4|x|$

При $x=-2$:

$\log_4\frac{x^2}{4}-2\cdot\log_4\left(4x^4\right)=-3-6\cdot\log_4|-2|=-3-6\cdot\log_{2^2}2=$

$=-3-6\cdot\frac{1}{2}=-6$

Ответ: -6.

Вычисления на применение формулы $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$

3.8. Вычислите:

1) $25^{\frac{1}{\log_6 5}} + 49^{\frac{1}{\log_8 7}}$

2) $81^{\frac{1}{\log_5 3}} + 27^{\log_9 36} + 3^{\frac{4}{\log_7 9}}$

3) $\dfrac{\log_2 24}{\log_{96} 2} - \dfrac{\log_2 192}{\log_{12} 2}$

4) $\dfrac{\log_2 40}{\lg 2} - \dfrac{\log_2 5}{\log_{80} 2}$

5) $\log_3 10 \cdot \lg 27$

6) $\log_{\frac{1}{4}}\left(\log_2 3 \cdot \log_3 2\right)$

7) $25^{\frac{1}{\log_2 5}} + 9 \cdot \left(4^{1-\frac{1}{\log_3 2}}\right) - 7^{\log_{49} 9}$

Решение:

1) $25^{\frac{1}{\log_6 5}} + 49^{\frac{1}{\log_8 7}} = 25^{\log_5 6} + 49^{\log_7 8} = 5^{2\log_5 6} + 7^{2\log_7 8} =$

$= 5^{\log_5 6^2} + 7^{\log_7 8^2} = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$

2) $81^{\frac{1}{\log_5 3}} + 27^{\log_9 36} + 3^{\frac{4}{\log_7 9}} = 81^{\log_3 5} + 27^{\log_9 36} + 3^{4\log_9 7} =$

$= 3^{4\log_3 5} + 3^{3\log_{3^2} 6^2} + 3^{4\log_{3^2} 7} = 3^{\log_3 5^4} + 3^{3\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\log_3 6} + 3^{4\cdot\frac{1}{2}\log_3 7} =$

$= 5^4 + 6^3 + 7^2 = 890$

3) $\dfrac{\log_2 24}{\log_{96} 2} - \dfrac{\log_2 192}{\log_{12} 2} = \log_2 24 \cdot \dfrac{1}{\log_{96} 2} - \log_2 192 \cdot \dfrac{1}{\log_{12} 2} =$

$= \log_2 24 \cdot \log_2 96 - \log_2 192 \cdot \log_2 12 = \log_2 (12 \cdot 2) \cdot \log_2 96 -$

$- \log_2 (96 \cdot 2) \cdot \log_2 12 = \left(1 + \log_2 12\right)\log_2 96 - \left(1 + \log_2 96\right)\log_2 12 =$

$= \log_2 96 + \log_2 12 \cdot \log_2 96 - \log_2 12 - \log_2 12 \cdot \log_2 96 =$

$= \log_2 96 - \log_2 12 = \log_2 \dfrac{96}{12} = \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$

4) $\frac{\log_2 40}{\lg 2}-\frac{\log_2 5}{\log_{80} 2}=\log_2 10\cdot\log_2 40-\log_2 80\cdot\log_2 5=$

$=\left(\log_2 2\cdot 5\right)\cdot\left(\log_2 8\cdot 5\right)-\left(\log_2 16\cdot 5\right)\cdot\log_2 5=$

$=\left(\log_2 2+\log_2 5\right)\cdot\left(\log_2 8+\log_2 5\right)-\left(\log_2 16+\log_2 5\right)\cdot\log_2 5=$

$=\left(1+\log_2 5\right)\cdot\left(3+\log_2 5\right)-\left(4+\log_2 5\right)\cdot\log_2 5=$

$=3+4\log_2 5+\log_2^2 5-4\log_2 5-\log_2^2 5=3$

5) $\log_3 10\cdot\lg 27=\frac{1}{\lg 3}\cdot\lg 27=\frac{\lg 3^3}{\lg 3}=3$

6) $\log_{\frac{1}{4}}\left(\log_2 3\cdot\log_3 2\right)=\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\log_2 3}{\log_2 3}\right)=\log_{\frac{1}{4}} 1=0$

7) $25^{\frac{1}{\log_2 5}}+9\cdot\left(4^{1-\frac{1}{\log_3 2}}\right)-7^{\log_{49} 9}=25^{\log_5 2}+9\cdot\left(4\cdot 4^{-\log_2 3}\right)-$

$-7^{\log_{7^2} 3^2}=5^{\log_5 2^2}+36\cdot 2^{\log_2 3^{-2}}-7^{\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\log_7 3}=4+36\cdot\frac{1}{9}-3=5$

Вычисления на применение формулы перехода к другому основанию

При решении задач, содержащих логарифмы с различными основаниями, следует запомнить одну рекомендацию, почти не имеющую исключений: **необходимо перейти во всех логарифмах к одному основанию**.

3.9. Вычислите:

1) $\log_3 2\cdot\log_4 3\cdot\log_5 4\cdot\log_6 5$

2) $\log_2 5\cdot\log_5 10\cdot\lg 16$

3) $\log_5 4\cdot\log_6 5\cdot\log_7 6\cdot\log_8 7$

Решение:

1) Выполним переход к логарифмам по основанию 3.

$$\log_3 2\cdot\frac{\log_3 3}{\log_3 4}\cdot\frac{\log_3 4}{\log_3 5}\cdot\frac{\log_3 5}{\log_3 6}=\frac{\log_3 2}{\log_3 6}=\log_6 2$$

2) Выполним переход к логарифмам по основанию 2.

$$\log_2 5\cdot\frac{\log_2 10}{\log_2 5}\cdot\frac{\log_2 16}{\log_2 10}=\log_2 16=\log_2 2^4=4$$

3) Выполним переход к логарифмам по основанию 5.

$$\log_5 4\cdot\frac{\log_5 5}{\log_5 6}\cdot\frac{\log_5 6}{\log_5 7}\cdot\frac{\log_5 7}{\log_5 8}=\frac{\log_5 4}{\log_5 8}=\log_8 4=\log_{2^3} 2^2=$$

$$=\frac{2}{3}\log_2 2=\frac{2}{3}$$

Во многих задачах после перехода в логарифмах к одному основанию необходимо вводить новые переменные (одну или несколько).

Иллюстрацией сказанного являются следующие задания.

3.10. Вычислите значение выражения:

1) $\left(\log_3 4+9\log_4 3+6\right)\cdot\left(\log_3 4-3\log_{108} 4\right)\log_4 3-\log_3 4$

2) $\dfrac{1-\log_2^3 3}{\left(\log_2 3+\log_3 2+1\right)\log_2\frac{2}{3}}+\log_2\dfrac{8}{3}$

3) $\log_{12}18\cdot\log_{24}54+5\left(\log_{12}18-\log_{24}54\right)$

Решение:

1) Все логарифмические выражения приведем к основанию 3, после чего сделаем замену $t=\log_3 4$.

$$\left(\log_3 4+9\log_4 3+6\right)\left(\log_3 4-3\log_{108}4\right)\log_4 3-\log_3 4=$$

$$=\left(\log_3 4+\frac{9}{\log_3 4}+6\right)\cdot\left(\log_3 4-3\frac{\log_3 4}{\log_3 108}\right)\frac{1}{\log_3 4}-\log_3 4=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\log_3 108=\log_3 4\cdot 27=\\ =\log_3 4+\log_3 3^3=\log_3 4+3\end{array}\right|=\left(t+\frac{9}{t}+6\right)\left(t-\frac{3t}{t+3}\right)\frac{1}{t}-t=$$

$$=\frac{t^2+6t+9}{t}\cdot\frac{t}{t+3}\cdot\frac{1}{t}-t=\frac{(t+3)^2}{t+3}-t=t+3-t=3$$

2) $$\frac{1-\log_2^3 3}{\left(\log_2 3+\log_3 2+1\right)\log_2\frac{2}{3}}+\log_2\frac{8}{3}=\left|\begin{array}{l}\log_2 3=t,\qquad \log_3 2=\frac{1}{t}\\ \log_2\frac{2}{3}=\log_2 2-\log_2 3=1-t\\ \log_2\frac{8}{3}=\log_2 8-\log_2 3=3-t\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1-t^3}{\left(t+\frac{1}{t}+1\right)(1-t)}+3-t=\frac{1-t^3}{\left(t^2+t+1\right)(1-t)\frac{1}{t}}+3-t=t+3-t=3$$

3) $$\log_{12}18\cdot\log_{24}54+5\left(\log_{12}18-\log_{24}54\right)=\frac{\log_2 18}{\log_2 12}\cdot\frac{\log_2 54}{\log_2 24}+$$

$$+5\left(\frac{\log_2 18}{\log_2 12}-\frac{\log_2 54}{\log_2 24}\right)=\left|\begin{array}{l}\log_2 18=\log_2(9\cdot 2)=2\log_2 3+1\\ \log_2 12=\log_2(3\cdot 4)=\log_2 3+2\\ \log_2 24=\log_2(3\cdot 8)=\log_2 3+3\\ \log_2 54=\log_2(27\cdot 2)=3\log_2 3+1\\ \log_2 3=t\end{array}\right|=$$

$$=\frac{2t+1}{t+2}\cdot\frac{3t+1}{t+3}+5\left(\frac{2t+1}{t+2}-\frac{3t+1}{t+3}\right)=\frac{6t^2+5t+1}{(t+2)(t+3)}+5\frac{1-t^2}{(t+2)(t+3)}=$$

$$=\frac{t^2+5t+6}{(t+2)(t+3)}=\frac{(t+2)(t+3)}{(t+2)(t+3)}=1$$

Вычисления одних логарифмов через другие

3.11. Дано: $\log_{30}3=a$, $\log_{30}5=b$. Найдите $\log_{30}8$.

Решение:

$$\log_{30}8=3\log_{30}2=3\log_{30}\frac{30}{15}=3\left(\log_{30}30-\log_{30}15\right)=$$

$$=3\left(1-\log_{30}3\cdot5\right)=3\left(1-\log_{30}3-\log_{30}5\right)=3(1-a-b).$$

Ответ: $3(1-a-b)$.

В рассмотренном задании все просто, потому что, во-первых, основания всех логарифмов одинаковы а, во-вторых, можно выразить число 2 через числа, логарифмы которых заданы, то есть через числа 30, 3 и 5. Однако, это не всегда легко сделать.

3.12. Дано: $\lg196=a$, $\lg56=b$. Найдите $\lg0{,}175$.

Решение:

$$\lg0{,}175=\lg\frac{175}{1000}=\lg\frac{7}{40}=\lg7-2\lg2-1$$

Таким образом, задача свелась к нахождению $\lg7$ и $\lg2$.

Условия задачи можно записать в виде двух равенств:

$$\begin{cases}\lg196=a\\ \lg56=b\end{cases}\quad\begin{cases}\lg4\cdot49=a\\ \lg8\cdot7=b\end{cases}\quad\begin{cases}\lg4+\lg49=a\\ \lg8+\lg7=b\end{cases}\quad\begin{cases}2\lg2+2\lg7=a\\ 3\lg2+\lg7=b\quad\Big|\cdot(-2)\end{cases}$$

$$+\begin{cases}2\lg2+2\lg7=a\\ -6\lg2-2\lg7=-2b\end{cases}$$

$$-4\lg2=a-2b$$

$$\lg2=\frac{a-2b}{-4}=\frac{2b-a}{4}$$

$$\lg 7=\frac{3a-2b}{4}$$

$$\lg 0{,}175=\frac{3a-2b}{4}-2\cdot\frac{2b-a}{4}-1=\frac{5a-6b-4}{4}.$$

Ответ: $\frac{5a-6b-4}{4}$.

3.13. Дано: $\log_{98}56=a$. Найдите $\log_7 14$.

Решение:

$$\log_7 14=\log_7 7\cdot 2=1+\log_7 2$$

Задача сводится к нахождению $\log_7 2$.

Перейдем к логарифмам с основанием 7.

$$\log_{98}56=\frac{\log_7 56}{\log_7 98}=\frac{\log_7 8+\log_7 7}{\log_7 49+\log_7 2}=\frac{3\log_7 2+1}{2+\log_7 2}$$

$$\frac{3\log_7 2+1}{2+\log_7 2}=a$$

$$3\log_7 2+1=2a+a\log_7 2$$

$$1-2a=(a-3)\cdot\log_7 2$$

$$\log_7 2=\frac{1-2a}{a-3}$$

Значит: $\log_7 14=1+\frac{1-2a}{a-3}=\frac{a-3+1-2a}{a-3}=\frac{-a-2}{a-3}=\frac{a+2}{3-a}$.

Ответ: $\frac{a+2}{3-a}$.

3.14. Дано: $\log_{14}7=a$, $\log_{14}5=b$. Найдите $\log_{35}28$.

Решение:

$$\log_{35}28=\frac{\log_{14}28}{\log_{14}35}=\frac{\log_{14}2\cdot 14}{\log_{14}5\cdot 7}=\frac{\log_{14}2+1}{\log_{14}5+\log_{14}7}=$$

$$=\frac{\log_{14}\frac{14}{7}+1}{a+b}=\frac{1-\log_{14}7+1}{a+b}=\frac{2-a}{a+b}.$$

Ответ: $\frac{2-a}{a+b}$.

3.15. Дано: $\log_{12}27=a$. Найдите $\log_6 16$.

Решение:

$$\log_6 16=4\log_6 2=4\frac{\log_{12}2}{\log_{12}6}=\frac{4\log_{12}2}{\log_{12}\frac{12}{2}}=\frac{4\log_{12}2}{1-\log_{12}2}$$

Выразим $\log_{12}2$.

По условию задачи:

$$\log_{12}27=3\log_{12}3=3\log_{12}\frac{12}{4}=3\left(1-\log_{12}4\right)=$$

$$=3\left(1-2\log_{12}2\right)=3-6\log_{12}2.$$

Введем замену: $3-6\log_{12}2=a$. Тогда: $\log_{12}2=\frac{3-a}{6}$.

Значит, $\log_6 16=\frac{4\cdot\frac{3-a}{6}}{1-\frac{3-a}{6}}=\frac{4(3-a)}{6-3+a}=\frac{4(3-a)}{3+a}$.

Ответ: $\frac{4(3-a)}{3+a}$.

3.16. Дано: $\log_3 12=a$. Найдите $\log_3 18$.

Решение:

$$a=\log_3 12=\log_3 3\cdot 4=\log_3 3+\log_3 4=1+2\log_3 2$$

Тогда $\log_3 2=\frac{a-1}{2}$.

Вычислим: $\log_3 18=\log_3 2\cdot 9=\log_3 2+\log_3 9=\frac{a-1}{2}+2=\frac{a+3}{2}$.

Ответ: $\frac{a+3}{2}$.

3.17. Дано: $a^2+b^2=7ab$. Найдите $\dfrac{2\lg\left(\dfrac{a+b}{3}\right)}{\lg a+\lg b}$.

Решение:

$$\frac{2\lg\left(\frac{a+b}{3}\right)}{\lg a+\lg b}=\frac{\lg\left(\frac{a+b}{3}\right)^2}{\lg ab}=\frac{\lg\frac{\overbrace{a^2+b^2}^{7ab}+2ab}{9}}{\lg ab}=\frac{\lg\frac{7ab+2ab}{9}}{\lg ab}=\frac{\lg\frac{9ab}{9}}{\lg ab}=$$

Ответ: 1.

§4. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

При решении логарифмических уравнений применяют, как правило, такие преобразования, которые не приводят к потере корней, но могут привести к появлению посторонних решений. Поэтому проверка каждого из полученных корней путем подстановки их в исходное уравнение обязательна, если нет уверенности в равносильности уравнений. Проверку полученных корней можно заменить нахождением области определения уравнения. Тогда корнями исходного уравнения могут быть только те числа, которые принадлежат этой области.

Перечислим некоторые методы решения логарифмических уравнений:

- решение с помощью определения логарифма;
- решение с помощью основного логарифмического тождества;
- метод потенцирования;
- метод введения новой переменной;
- метод приведения логарифмов к одному основанию;
- метод логарифмирования обеих частей уравнения;
- метод разложения на множители.

Рассмотрим каждый из этих методов на примерах.

Логарифмические уравнения, решаемые с помощью определения логарифма

4.1. Решите уравнения:

1) $\log_5\left(x^2-11x+43\right)=2$ 2) $\log_{x+1}\left(2x^2+1\right)=2$

3) $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}} x^2=-4$

Решение:

1) $\log_5\left(x^2-11x+43\right)=2$

По определению логарифма:

$x^2-11x+43=5^2$

$x^2-11x+43=25$

$x^2-11x+18=0$

$x_1 = 2$, $x_2 = 9$

Проверкой убеждаемся, что оба корня удовлетворяют исходному уравнению.

Ответ: $\{2; 9\}$.

2) $\log_{x+1}\left(2x^2+1\right)=2$

По определению логарифма:

$2x^2+1=(x+1)^2$

$x^2-2x=0$

$x_1=2$;

$x_2=0$ - посторонний корень, так как основанием логарифма не мо быть единица.

Ответ: $\{2\}$.

3) $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}} x^2=-4$

$\log_{5^{-\frac{1}{2}}} x^2=-4$

$-2\log_5 x^2=-4$

$\log_5 x^2=2$

$x^2=25$

$x_1=5$, $x_2=-5$

Проверкой убеждаемся, что оба корня удовлетворяют исходному уравнению.

Замечание. Грубой ошибкой было бы преобразование левой части уравнения на основании равенства $\log_5 x^2=2\log_5 x$, верного лишь при $x>0$.

Ответ: $\{\pm 5\}$.

4.2. Решите уравнения:

1) $\log_2^2\left(\log_3 x\right)=4$ 2) $\log_7\left(|x|+4\right)=2$

Решение:

1) $\log_2^2(\log_3 x)=4$

$$\left[\begin{array}{l}\log_2(\log_3 x)=2,\\ \log_2(\log_3 x)=-2;\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\log_3 x=2^2,\\ \log_3 x=2^{-2};\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\log_3 x=4,\\ \log_3 x=\dfrac{1}{4};\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x=3^4=81,\\ x=3^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{3}.\end{array}\right.$$

Проверкой убеждаемся, что оба корня удовлетворяют исходному уравнению.

Ответ: $\left\{\sqrt[4]{3};\ 81\right\}$.

2) $\log_7(|x|+4)=2$ ОДЗ: $x\in\mathbb{R}$.

$|x|+4=7^2$

$|x|=45$

$x_1=45$, $x_2=-45$.

Ответ: $\{\pm 45\}$.

4.3. Решите уравнения: $\log_4\log_3\log_2\left(x^2-1\right)=0$.

Решение:

$\log_4\log_3\log_2\left(x^2-1\right)=0$

$\log_3\log_2\left(x^2-1\right)=4^0$

$\log_3\log_2\left(x^2-1\right)=1$

$\log_2\left(x^2-1\right)=3^1$

$\log_2\left(x^2-1\right)=3$

$x^2-1=2^3$; $x^2=9$; $x=\pm 3$.

Проверкой убеждаемся, что оба корня удовлетворяют исходному уравнению.

Ответ: $\{\pm 3\}$.

4.4. Решите уравнения: $\lg\left(81\cdot\sqrt[3]{3^{x^2-8x}}\right)=0$.

Решение:

$\lg\left(81\cdot\sqrt[3]{3^{x^2-8x}}\right)=0$ ОДЗ: $x\in\mathbb{R}$.

$$81\cdot\sqrt[3]{3^{x^2-8x}}=10^0$$

$$3^4\cdot3^{\frac{x^2-8x}{3}}=1$$

$$3^{\frac{x^2-8x}{3}+4}=3^0$$

$$\frac{x^2-8x}{3}+4=0$$

$$x^2-8x+12=0$$

$$x_1=2,\quad x_2=6.$$

Ответ: $\{2;\ 6\}$.

4.5. Решите уравнение: $\log_x\left(8\cdot\sqrt[5]{0,25}\right)=\dfrac{13}{5}$.

Решение:

$$\log_x\left(8\cdot\sqrt[5]{\frac{1}{4}}\right)=\frac{13}{5}\qquad \text{ОДЗ: } x>0;\ x\neq1.$$

$$\log_x\left(2^3\cdot2^{-\frac{2}{5}}\right)=\frac{13}{5}$$

$$\log_x 2^{\frac{13}{5}}=\frac{13}{5}$$

$$\frac{13}{5}\log_x 2=\frac{13}{5}$$

$$\log_x 2=1$$

$$2=x^1;\quad x=2.$$

Ответ: $\{2\}$.

4.6. Решите уравнение: $\log_2\left(5\cdot2^x+3\right)=2x+1$.

Решение:

$$\log_2\left(5\cdot2^x+3\right)=2x+1\qquad \text{ОДЗ: } x\in\mathbb{R}.$$

$$5\cdot2^x+3=2^{2x+1}$$

$$2\cdot2^{2x}-5\cdot2^x-3=0$$

Замена: $2^x = a$; $(a > 0)$.

$2a^2 - 5a - 3 = 0$

$a_1 = -\frac{1}{2} < 0$ - посторонний корень;

$a_2 = 3$; $2^x = 3$; $x = \log_2 3$.

Ответ: $\{\log_2 3\}$.

Логарифмические уравнения, решаемые с помощью основного логарифмического тождества

Суть данного метода в переходе от уравнения $a^{\log_a f(x)} = g(x)$ к уравнению $f(x) = g(x)$.

При решении логарифмических уравнений данным методом также могут появиться посторонние корни.

4.7. Решите уравнение: $9^{\log_3(1-2x)} = 5x^2 - 5$.

Решение:

ОДЗ: $\begin{cases} 1-2x > 0, \\ 5x^2 - 5 > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x < 0,5, \\ |x| > 1; \end{cases}$ $x < -1$.

$3^{2\log_3(1-2x)} = 5x^2 - 5$

$3^{\log_3(1-2x)^2} = 5x^2 - 5$

$(1-2x)^2 = 5x^2 - 5$

$x^2 + 4x - 6 = 0$

$x_1 = -2 - \sqrt{10}$, $x_2 = -2 + \sqrt{10}$

Из двух полученных корней только корень $x_1 = -2 - \sqrt{10}$ принадлежит ОДЗ, а $x_2 = -2 + \sqrt{10}$ является посторонним корнем.

Ответ: $\{-2 - \sqrt{10}\}$.

4.8. Решите уравнение: $4^{\log_{64}(x-3) + \log_2 5} = 50$.

Решение:

ОДЗ: $x - 3 > 0$; $x > 3$.

$$2^{2\left(\log_{2^6}(x-3)+\log_2 5\right)}=50$$

$$2^{\frac{1}{3}\log_2(x-3)+2\log_2 5}=50$$

$$2^{\log_2\left(25\sqrt[3]{x-3}\right)}=50$$

$$25\sqrt[3]{x-3}=50$$

$$\sqrt[3]{x-3}=2$$

$x=11>3$ - принадлежит ОДЗ.

Ответ: $\{11\}$.

4.9. Решите уравнение: $5^{\log_5 x}\cdot\lg 4=\lg\left(2\cdot 9^x-6^x\right)$

Решение:

$$5^{\log_5 x}\cdot\lg 4=\lg\left(2\cdot 9^x-6^x\right)$$

$$x\cdot\lg 4=\lg\left(2\cdot 9^x-6^x\right)$$

$$\lg 4^x=\lg\left(2\cdot 9^x-6^x\right)$$

$$2^{2x}=2\cdot 3^{2x}-2^x\cdot 3^x$$

$$2^{2x}+2^x\cdot 3^x-2\cdot 3^{2x}=0 \quad \Big| : 3^{2x}\neq 0$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}+\left(\frac{2}{3}\right)^{x}-2=0$$

Замена: $\left(\frac{2}{3}\right)^{x}=y$; $(y>0)$.

$$y^2+y-2=0$$

$y_1=1$, $y_2=-2<0$ - посторонний корень

$\left(\frac{2}{3}\right)^{x}=1$; $\quad x=0$.

Проверка показывает, что $x=0$ - посторонний корень, так как $\log_5 0$ не существует.

Ответ: решений нет.

Метод потенцирования

Метод потенцирования заключается в переходе от уравнения $\log_a f(x)=\log_a g(x)$, где $a>0$, $a\neq 1$, к уравнению $f(x)=g(x)$ при дополнительных условиях: $f(x)>0$, $g(x)>0$.

Такой переход иногда приводит к появлению посторонних корней. Посторонние корни можно выявить либо с помощью подстановки найденных корней в исходное логарифмическое уравнение, либо с помощью нахождения области определения исходного уравнения, то есть:

$$\begin{cases} f(x)>0, \\ g(x)>0. \end{cases}$$

4.10. Решите уравнение: $\log_{\frac{1}{6}}(10-x)+\log_{\frac{1}{6}}(x-3)=-1$

Решение:

$\log_{\frac{1}{6}}(10-x)(x-3)=-1$

$(10-x)(x-3)=6$

$10x-x^2-30+3x=6$

$x^2-13x+36=0$

$x_1=4$, $x_2=9$.

Проверка показывает, что оба корня удовлетворяют исходному уравнению:

1) $x=4$: $\log_{\frac{1}{6}}(10-4)+\log_{\frac{1}{6}}(4-3)=-1$

$-1+0=-1$ - верно.

2) $x=9$; $\log_{\frac{1}{6}}(10-9)+\log_{\frac{1}{6}}(9-3)=-1$

$0+(-1)=-1$ - верно.

Ответ: $\{4;\ 9\}$.

4.11. Решите уравнение: $\log_3(x^2+1)=\log_3 2+\log_3(x+8)$.

Решение:

ОДЗ: $x+8>0$; $x>-8$.

$$\log_3\left(x^2+1\right)=\log_3\left(2(x+8)\right)$$

$$x^2+1=2x+16$$

$$x^2-2x-15=0$$

$$x_1=5;\quad x_2=-3$$

Оба корня принадлежат ОДЗ.

Ответ: $\{-3;\ 5\}$.

4.12. Решите уравнение: $\lg 5+\lg(x+10)=1-\lg(2x-1)+\lg(21x-20)$.

Решение:

$$\lg 5+\lg(x+10)=\lg 10-\lg(2x-1)+\lg(21x-20)$$

$$\lg\left(5(x+10)\right)=\lg\frac{10(21x-20)}{2x-1}.$$

$$5(x+10)=\frac{10(21x-20)}{2x-1}$$

$$x+10=\frac{2\cdot(21x-20)}{2x-1}$$

$$2x^2-23x+30=0$$

$$x_1=10,\quad x_2=1{,}5.$$

Сделав проверку, можно убедиться, что оба корня удовлетворяют уравнению.

Ответ: $\{1{,}5;\ 10\}$.

4.13. Решите уравнение: $\dfrac{\lg\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\lg\sqrt[3]{x-40}}=3$.

Решение:

$$\lg\left(\sqrt{x+1}+1\right)=3\cdot\lg\sqrt[3]{x-40}$$

$$\lg\left(\sqrt{x+1}+1\right)=\lg(x-40)$$

$$\sqrt{x+1}+1=x-40$$

$\sqrt{x+1}-x+41=0$

Сделаем замену: $\sqrt{x+1}=t$ $(t\geq 0)$. Тогда $x=t^2-1$.

$t-t^2+1+41=0$

$t^2-t-42=0$

$t_1=-6<0$ - посторонний корень,

$t_2=7$

$\sqrt{x+1}=7$

$x=48$.

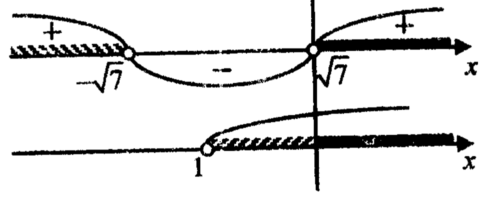
Проверка: $\dfrac{\lg(7+1)}{\lg\sqrt[3]{48-40}}=3$; $\dfrac{\lg 8}{\lg 2}=3$ - верно.

Ответ: $\{48\}$.

4.14. Решите уравнение: $\log_3(x^2-7)=2\log_3\sqrt{x-1}$.

Решение:

ОДЗ: $\begin{cases} x^2-7>0, \\ x-1>0; \end{cases}$ $\begin{cases} (x+\sqrt{7})(x-\sqrt{7})>0, \\ x>1. \end{cases}$



$x\in(\sqrt{7};\infty)$

$\log_3(x^2-7)=2\log_3\sqrt{x-1}$

$\log_3(x^2-7)=\log_3(x-1)$

$x^2-7=x-1$

$x^2-x-6=0$

$x_1=-2\notin$ ОДЗ; $x_2=3$.

Ответ: $\{3\}$.

4.15. Решите уравнение: $\log_5 x^2 = 0,5 \cdot \log_5 (4x-3)^2$.

Решение:

ОДЗ: $\begin{cases} x \neq 0, \\ 4x-3 \neq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \neq 0, \\ x \neq \frac{3}{4}. \end{cases}$

$\log_5 x^2 = 0,5 \cdot \log_5 (4x-3)^2$

$\log_5 x^2 = \log_5 |4x-3|$

$x^2 = |4x-3|$

$\left[\begin{array}{l} x^2 = 4x-3, \\ x^2 = -4x+3; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x^2 - 4x + 3 = 0, \\ x^2 + 4x - 3 = 0; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x_1 = 1, \quad x_2 = 3, \\ x_{3,4} = -2 \pm \sqrt{7}. \end{array}\right.$

Ответ: $x \in \left\{-2 \pm \sqrt{7};\ 1;\ 3\right\}$.

Метод введения новой переменной

Обычно замену (подстановку) производят после некоторых преобразований исходного уравнения.

Поясним данный метод на примерах.

4.16. Решите уравнение: $\lg(\lg x) + \lg\left(\lg x^3 - 2\right) = 0$.

Решение:

$\lg\left(\lg x \cdot \left(\lg x^3 - 2\right)\right) = \lg 1$

$\lg x \cdot (3\lg x - 2) = 1$

$3\lg^2 x - 2\lg x - 1 = 0$

Замена: $\lg x = t$.

$3t^2 - 2t - 1 = 0$

$t_1 = 1, \quad t_2 = -\frac{1}{3}$.

$\left[\begin{array}{l} \lg x = 1, \\ \lg x = -\frac{1}{3}; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = 10, \\ x = \frac{1}{\sqrt[3]{10}}. \end{array}\right.$

Проверка.

1) $x=10$: $\lg(\lg 10)+\lg\left(\lg 10^3-2\right)=0$

$\lg 1+\lg 1=0$

$0=0$ - верно.

2) $x=\frac{1}{\sqrt[3]{10}}=10^{-\frac{1}{3}}$: $\lg\left(\lg 10^{-\frac{1}{3}}\right)+\lg\left(\lg 10^{-1}-2\right)=0$

$\lg\left(-\frac{1}{3}\right)+\lg(-3)=0$

$x=\frac{1}{\sqrt[3]{10}}$ - посторонний корень, так как $\lg\left(-\frac{1}{3}\right)$ и $\lg(-3)$ не существуют.

Ответ: $\{10\}$.

4.17. Решите уравнение: $0{,}5\cdot\lg x\cdot\lg 0{,}001x=\lg 0{,}1$.

***Решение*:**

ОДЗ: $x>0$.

$0{,}5\cdot\lg x\cdot\left(\lg 10^{-3}+\lg x\right)=\lg 10^{-1}$

$0{,}5\cdot\lg x\cdot(-3+\lg x)=-1 \quad \Big| \cdot 2$

$\lg x\cdot(-3+\lg x)=-2$

Замена: $\lg x=a$.

$a^2-3a+2=0$

$a_1=1;\ a_2=2$

$\left[\begin{array}{l}\lg x=1,\\ \lg x=2;\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x=10,\\ x=100.\end{array}\right.$

Оба полученных корня принадлежат ОДЗ.

Ответ: $x\in\{10;\ 100\}$.

4.18. Решите уравнение: $\frac{2\log_2^2 x-1}{\log_2^2 x+2\log_2 x+2}=1$.

Решение:

ОДЗ: $x>0$.

Замена: $\log_2 x = t$.

$$\frac{2t^2-1}{t^2+2t+2}=1$$

$$2t^2-1=t^2+2t+2$$

$$t^2-2t-3=0$$

$$t_1=-1,\ t_2=3$$

$$\left[\begin{array}{l}\log_2 x=-1,\\ \log_2 x=3;\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{2},\\ x=8.\end{array}\right.$$

Оба полученных корня принадлежат ОДЗ.

Ответ: $\left\{\frac{1}{2};\ 8\right\}$.

4.19. Решите уравнение: $\log_4^2 x^2+\log_4 x^4=8$.

Решение:

ОДЗ: $x\neq 0$.

$$\log_4^2 x^2+\log_4 x^4=8$$

$$\left(2\log_4|x|\right)^2+4\log_4|x|=8$$

$$4\log_4^2|x|+4\log_4|x|-8=0$$

Замена: $\log_4|x|=a$.

$$a^2+a-2=0$$

$$a_1=-2;\ a_2=1$$

$$\left[\begin{array}{l}\log_4|x|=-2,\\ \log_4|x|=1;\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}|x|=4^{-2},\\ |x|=4;\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x_{1,2}=\pm\frac{1}{16},\\ x_{3,4}=\pm4.\end{array}\right.$$

Ответ: $x\in\left\{\pm\frac{1}{16};\ \pm4\right\}$.

4.20. Решите уравнение: $\dfrac{\lg^2(10x)}{5-\lg x}=1$.

Решение:

ОДЗ: $\begin{cases} x>0, \\ x\neq 10^5. \end{cases}$

$$\frac{(\lg 10+\lg x)^2}{5-\lg x}=1$$

$$\frac{(1+\lg x)^2}{5-\lg x}=1$$

Замена: $\lg x=a$.

$$\frac{(1+a)^2}{5-a}=1$$

$$a^2+2a+1=5-a$$

$$a^2+3a-4=0$$

$$a_1=-4;\ a_2=1$$

$$\left[\begin{array}{l} \lg x=-4, \\ \lg x=1; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x=10^{-4}, \\ x=10. \end{array}\right.$$

Оба полученных корня принадлежат ОДЗ.

Ответ: $x\in\{10^{-4};\ 10\}$.

4.21. Решите уравнение: $\lg(0{,}01x)\cdot\lg(100x)=5$.

Решение:

ОДЗ: $x>0$.

$$(\lg 0{,}01+\lg x)(\lg 100+\lg x)=5$$

$$(-2+\lg x)(2+\lg x)=5$$

Замена: $\lg x=t$

$$(t-2)(t+2)=5$$

$$t^2-4=5$$

$t^2-9=0$; $t_{1,2}=\pm 3$

$$\left[\begin{array}{l}\lg x=3,\\ \lg x=-3;\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x=1000,\\ x=0{,}001.\end{array}\right.$$

Оба полученных корня принадлежат ОДЗ.

Ответ: $\{0{,}001;\ 1000\}$.

4.22. Решите уравнение: $\log_3 x+\log_x 9=3$.

Решение:

ОДЗ: $\begin{cases} x>0,\\ x\neq 1.\end{cases}$

$$\log_3 x+\frac{1}{\log_9 x}=3$$

$$\log_3 x+\frac{2}{\log_3 x}=3$$

Замена: $\log_3 x=t$.

$$t+\frac{2}{t}=3$$

$$t^2-3t+2=0$$

$t_1=1$, $t_2=2$

$$\left[\begin{array}{l}\log_3 x=1,\\ \log_3 x=2;\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x=3,\\ x=9.\end{array}\right.$$

Оба полученных корня принадлежат ОДЗ.

Ответ: $\{3;\ 9\}$.

Метод приведения логарифмов к одному основанию

Обычно условие задания подсказывает, к какому **основанию** следует перейти.

При этом используются формулы:

$\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ - *формула перехода к логарифму по основанию* c;

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}; \qquad \log_{a^k} b = \frac{1}{k}\log_a b.$$

Как правило, метод приведения к одному основанию «работает» с методом введения новой переменной.

4.23. Решите уравнение: $\log_{16} x + \log_2 x + \log_4 x = 7$.

Решение:

Логарифмы в левой части уравнения приведем к основанию 2.

ОДЗ: $x > 0$.

$$\log_{2^4} x + \log_2 x + \log_{2^2} x = 7$$

$$\frac{1}{4}\log_2 x + \log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 x = 7$$

$$\frac{7}{4}\log_2 x = 7$$

$\log_2 x = 4$; $\quad x = 16$ - принадлежит ОДЗ.

Ответ: $\{16\}$.

4.24. Решите уравнение: $\log_3 x \cdot \log_9 x \cdot \log_{27} x \cdot \log_{81} x = \frac{2}{3}$.

Решение:

ОДЗ: $x > 0$.

$$\log_3 x \cdot \log_{3^2} x \cdot \log_{3^3} x \cdot \log_{3^4} x = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\log_3^4 x = \frac{2}{3}$$

$$\log_3^4 x = 16$$

$$\left[\begin{array}{l}\log_3 x = 2,\\ \log_3 x = -2;\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x = 9,\\ x = \frac{1}{9}.\end{array}\right.$$

Оба полученных корня принадлежат ОДЗ.

Ответ: $\left\{\frac{1}{9};\ 9\right\}$.

4.25. Решите уравнение: $\log_2(x+4)=\log_{4x+16}8$.

***Решение*:**

ОДЗ: $\begin{cases}x+4>0,\\4x+16\neq 1;\end{cases}$ $\begin{cases}x>-4,\\x\neq -\dfrac{15}{4};\end{cases}$ $x\in\left(-4;\,-3\dfrac{3}{4}\right)\cup\left(-3\dfrac{3}{4};\,\infty\right)$.

$$\log_2(x+4)=3\cdot\log_{4x+16}2$$

$$\log_2(x+4)=3\cdot\frac{1}{\log_2(4x+16)}$$

$$\log_2(x+4)=\frac{3}{\log_2 4(x+4)}$$

$$\log_2(x+4)=\frac{3}{\log_2 4+\log_2(x+4)}$$

$$\log_2(x+4)=\frac{3}{2+\log_2(x+4)}$$

Замена: $a=\log_2(x+4)$.

$$a=\frac{3}{2+a}$$

$$a^2+2a-3=0$$

$a_1=-3$; $a_2=1$.

$\left[\begin{array}{l}\log_2(x+4)=-3,\\\log_2(x+4)=1;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x+4=2^{-3},\\x+4=2.\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x=-3\dfrac{7}{8},\\x=-2.\end{array}\right.$

Оба полученных корня принадлежат ОДЗ.

Ответ: $\left\{-3\dfrac{7}{8};\,-2\right\}$.

4.26. Решите уравнение: $\log_x 2\cdot\log_{2x}2=\log_{4x}2$.

Решение:

ОДЗ: $\begin{cases}x>0,\\x\neq\dfrac{1}{4},\quad x\neq\dfrac{1}{2},\quad x\neq 1.\end{cases}$

Во всех логарифмах перейдем к основанию 2.

$$\frac{1}{\log_2 x}\cdot\frac{1}{\log_2(2x)}=\frac{1}{\log_2(4x)}$$

$$\frac{1}{\log_2 x}\cdot\frac{1}{1+\log_2 x}=\frac{1}{2+\log_2 x}$$

Замена: $\log_2 x=t$.

$$\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{1+t}=\frac{1}{2+t}$$

$$\frac{1}{t^2+t}=\frac{1}{2+t}$$

$$2+t=t^2+t$$

$$t^2-2=0$$

$$t_1=\sqrt{2},\quad t_2=-\sqrt{2}$$

$$\left[\begin{array}{l}\log_2 x=\sqrt{2},\\ \log_2 x=-\sqrt{2};\end{array}\right.\qquad \left[\begin{array}{l}x=2^{\sqrt{2}},\\ x=2^{-\sqrt{2}}.\end{array}\right.$$

Оба полученных корня принадлежат ОДЗ.

Ответ: $\left\{2^{-\sqrt{2}};2^{\sqrt{2}}\right\}$.

4.27. Решите уравнение: $\log_2 x+\log_3 x=1$.

Решение:

ОДЗ: $x>0$.

Перейдем к основанию 2.

$$\log_2 x+\frac{\log_2 x}{\log_2 3}=1$$

$$\log_2 x\left(1+\frac{1}{\log_2 3}\right)=1$$

$$\log_2 x\left(\frac{\log_2 3+1}{\log_2 3}\right)=1$$

$$\log_2 x\left(\frac{\log_2 6}{\log_2 3}\right)=1$$

$$\log_2 x=\frac{\log_2 3}{\log_2 6}$$

$$\log_2 x=\log_6 3$$

$x=2^{\log_6 3}$ - принадлежит ОДЗ.

Ответ: $\left\{2^{\log_6 3}\right\}$.

4.28. Решите уравнение: $\log_{x^2} 16+\log_{2x} 64=3$.

Решение:

ОДЗ: $\begin{cases} x>0, \\ x\neq\frac{1}{2}, \quad x\neq 1. \end{cases}$

$$\frac{1}{\log_{16} x^2}+\frac{1}{\log_{64} 2x}=3$$

$$\frac{1}{\log_{2^4} x^2}+\frac{1}{\log_{2^6} 2x}=3$$

$$\frac{1}{\frac{2}{4}\log_2 x}+\frac{1}{\frac{1}{6}\log_2 2x}=3$$

$$\frac{2}{\log_2 x}+\frac{6}{\log_2 2x}=3$$

$$\frac{2}{\log_2 x}+\frac{6}{1+\log_2 x}=3$$

Замена: $\log_2 x=a$.

$$\frac{2}{a}+\frac{6}{a+1}=3$$

$$3a^2-5a-2=0$$

$a_1 = 2, \quad a_2 = -\frac{1}{3}$

$$\left[\begin{array}{l}\log_2 x = 2, \\ \log_2 x = -\frac{1}{3};\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x = 4, \\ x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.\end{array}\right.$$

Оба полученных корня принадлежат ОДЗ.

Ответ: $\left\{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}; 4\right\}$.

4.29. Решите уравнение: $\log_{x+1}\left(x^3+8-9x\right)\cdot\log_{x-1}(x+1)=3$.

Решение:

$$\frac{\log_{x+1}\left(x^3-9x+8\right)}{\log_{x+1}(x-1)}=3$$

$$\log_{x-1}\left(x^3-9x+8\right)=3$$

$$x^3-9x+8=(x-1)^3$$

$$x^2-4x+3=0$$

$$x_1=1, \quad x_2=3.$$

Проверка показывает, $x=1$ является посторонним корнем, а $x=3$ удовлетворяет уравнению.

Ответ: $\{3\}$.

Метод логарифмирования обеих частей уравнения

При решении уравнений, содержащих переменную и в основании, и в показателе степени, используется метод логарифмирования. Если при этом в показателе степени содержится логарифм, то обе части уравнения надо прологарифмировать по основанию этого логарифма.

4.30. Решите уравнение: $x^{\log_2 x+2}-8=0$.

Решение:

$$x^{\log_2 x+2}=8$$

Прологарифмируем обе части уравнения по основанию 2.

$$\log_2\left(x^{\log_2 x+2}\right)=\log_2 8$$

$$(\log_2 x+2)\log_2 x=3$$

$$\log_2^2 x+2\log_2 x-3=0$$

Замена: $\log_2 x=y$.

$$y^2+2y-3=0$$

$$y_1=1,\ \ y_2=-3$$

$$\left[\begin{array}{l}\log_2 x=1,\\ \log_2 x=-3;\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x=2,\\ x=\frac{1}{8}.\end{array}\right.$$

__Проверка__:

1) $x=2$: $\quad 2^{\log_2 2+2}=8$ $2^3=8$ - верно	2) $x=\frac{1}{8}$: $\quad \left(\frac{1}{8}\right)^{\log_2\frac{1}{8}+2}=8$ $\left(\frac{1}{8}\right)^{-1}=8$ - верно

Ответ: $\left\{\frac{1}{8};\ 2\right\}$.

4.31. Решите уравнение: $x^{\log_3 x}=9x$.

Решение:

Прологарифмируем обе части уравнения по основанию 3.

$$\log_3 x^{\log_3 x}=\log_3 9x$$

$$\log_3^2 x=2+\log_3 x$$

$$\log_3^2 x-\log_3 x-2=0$$

Замена: $\log_3 x=t$.

$$t^2-t-2=0$$

$$t_1=-1,\ \ t_2=2$$

$$\left[\begin{array}{l}\log_3 x=-1,\\ \log_3 x=2;\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{3},\\ x=9.\end{array}\right.$$

<u>*Проверка*</u>:

1) $x=\frac{1}{3}$: $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_3\frac{1}{3}}=9\cdot\frac{1}{3}$ $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}=3$ - верно	2) $x=9$: $(9)^{\log_3 9}=81$ $9^2=81$ - верно

Ответ: $\left\{\frac{1}{3};\ 9\right\}$.

4.32. Решите уравнение: $x^{\frac{\lg x+5}{3}}=10^{5+\lg x}$.

Решение:

ОДЗ: $x>0$.

Прологарифмируем обе части уравнения по основанию 10.

$$\frac{\lg x+5}{3}\cdot\lg x=(5+\lg x)\cdot\lg 10$$

$$\lg^2 x+2\lg x-15=0$$

Замена: $\lg x=t$.

$$t^2+2t-15=0$$

$$t_1=-5,\ t_2=3$$

$$\left[\begin{array}{l}\lg x=-5,\\ \lg x=3;\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x=10^{-5},\\ x=10^3.\end{array}\right.$$

Оба полученных корня принадлежат ОДЗ.

Ответ: $\left\{10^{-5};\ 10^3\right\}$.

4.33. Решите уравнение: $2^{\log_2^2 x}+x^{\log_2 x}=4$.

Решение:

ОДЗ: $x>0$.

$$\left(2^{\log_2 x}\right)^{\log_2 x}+x^{\log_2 x}=4$$

$$x^{\log_2 x}+x^{\log_2 x}=4$$

$$x^{\log_2 x}=2$$

Прологарифмируем обе части уравнения по основанию 2.

$$\log_2^2 x=1$$

$$\left[\begin{array}{l}\log_2 x=-1,\\ \log_2 x=1;\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{2},\\ x=2.\end{array}\right.$$

Оба полученных корня принадлежат ОДЗ.

Ответ: $\left\{\frac{1}{2};\ 2\right\}$.

Метод разложения на множители

4.34. Решите уравнение: $(3x^2-5x-2)\log_3(5-4x)=0$.

Решение:

ОДЗ: $5-4x>0$; $\quad x<\frac{5}{4}$.

$$\left[\begin{array}{l}3x^2-5x-2=0,\\ \log_3(5-4x)=0;\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}3x^2-5x-2=0,\\ 5-4x=1;\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x_1=-\frac{1}{3}, \quad x_2=2\notin \text{ОДЗ},\\ x=1.\end{array}\right.$$

Ответ: $x\in\left\{-\frac{1}{3};\ 1\right\}$.

4.35. Решите уравнение: $\sqrt{3x+18}\cdot\log_4(x+4)=0$.

Решение:

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{3x+18}=0,\\ \log_4(x+4)=0;\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}3x+18=0,\\ x+4=1;\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x=-6,\\ x=-3.\end{array}\right.$$

Проверка показывает, $x=-6$ является посторонним корнем, а $x=-3$ удовлетворяет уравнению.

Ответ: $\{-3\}$.

4.36. Решите уравнение: $\left(x^2-18x+77\right)\cdot\left(\log_{\frac{x}{2}} 8x+3\right)=0$.

Решение:

ОДЗ: $x>0$, $x\neq 2$.

$\left[\begin{array}{l} x^2-18x+77=0, \\ \log_{\frac{x}{2}} 8x+3=0; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x^2-18x+77=0, \\ \left(\frac{x}{2}\right)^{-3}=8x; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x^2-18x+77=0, \\ \frac{8}{x^3}=8x; \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x^2-18x+77=0, \\ x^4-1=0; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x_1=7, \quad x_2=11, \\ x_3=1, \quad x_4=-1\notin \text{ОДЗ}. \end{array}\right.$

Ответ: $\{1;\ 7;\ 11\}$.

4.37. Решите уравнение: $\ln x\cdot\lg x-3=\lg x-3\cdot\ln x$.

Решение:

ОДЗ: $x>0$.

$\ln x\cdot\lg x-3-\lg x+3\ln x=0$

$\lg x(\ln x-1)+3(\ln x-1)=0$

$(\ln x-1)(\lg x+3)=0$

$\left[\begin{array}{l} \ln x-1=0, \\ \lg x+3=0; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \ln x=1, \\ \lg x=-3; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=e, \\ x=0{,}001. \end{array}\right.$

Оба полученных корня принадлежат ОДЗ.

Ответ: $\{0{,}001;\ e\}$.

§5. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ

Для решения логарифмических неравенств применяются те же методы, что и для соответствующих уравнений, и на большинстве этапов решение уравнений и решение неравенств ведется аналогично.

К числу важных отличий можно отнести два момента. Во-первых, принципиальное значение имеет свойство монотонности функции $\log_a x$. Неправильное применение свойства монотонности (особенно в случае, когда $0<a<1$) приводит к ошибкам. Во-вторых, понятие области допустимых значений при решении логарифмических неравенств требует более внимательного отношения, чем при решении уравнений, поскольку в этом случае принадлежность решения к ОДЗ невозможно проверить непосредственной подстановкой. В связи с этим рекомендуется всегда начинать решение логарифмического неравенства с выписывания условий, определяющих ОДЗ.

При решении логарифмических неравенств нужно четко представлять себе, что логарифмическая функция с основанием большим единицы, монотонно возрастает, а с основанием меньшим единицы, но положительным, монотонно убывает.

Логарифмические неравенства обычно решаются одним из следующих методов:

- заменой логарифмического неравенства равносильной системой неравенств;
- введением новой переменной;
- методом интервалов.

Рассмотрим каждый из этих методов на примерах неравенств, содержащих логарифмы.

Метод перехода к равносильной системе неравенств (основной)

При решении логарифмических неравенств следует избегать преобразований, которые могут привести к потере или появлению посторонних решений, так как в противном случае обоснование правильности ответа является более сложной задачей, чем решение исходного неравенства. Тем самым, основным методом решения логарифмических неравенств является метод перехода к равносильным неравенствам (системам или совокупностям).

Рассмотрим данный метод сначала на примерах простейших логарифмических неравенств вида:

$$\log_a f(x) \vee b.$$

При решении простейших логарифмических неравенств следует учитывать область определения логарифмической функции и свойство монотонности:

- при потенцировании по основанию, большему единицы, знак неравенства сохраняется,

- при потенцировании по положительному основанию, меньшему единицы, знак неравенства меняется на противоположный.

5.1. Решите неравенство: $\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2-2x\right) > -1$.

Решение:

Учитывая свойство логарифмической функции с основанием меньшим единицы и область допустимых значений, переходим к равносильной системе неравенств:

$$\begin{cases} x^2-2x>0, \quad (\text{ОДЗ}) \\ x^2-2x<\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2-2x>0, \\ x^2-2x-3<0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x(x-2)>0, \\ (x+1)(x-3)<0. \end{cases}$$

Ответ: $x\in(-1;\ 0)\cup(2;\ 3)$.

5.2. Решите неравенство: $\lg\left(x^2-5x+7\right)<0$.

Решение:

$$\begin{cases} x^2-5x+7>0, \quad (\text{ОДЗ}) \\ x^2-5x+7<10^0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \underbrace{x^2-5x+7}_{D<0}>0, \\ x^2-5x+7<1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x\in\mathbb{R}, \\ x^2-5x+6<0; \end{cases}$$

$x^2-5x+6<0$

$(x-2)(x-3)<0$.

Ответ: $x\in(2;3)$

5.3. Решите неравенство: $3^{\log_2(x^2-3x+2)} \geq 3$.

Решение:

$\log_2(x^2-3x+2) \geq 1$

$$\begin{cases} x^2-3x+2>0, \quad (\text{ОДЗ}) \\ x^2-3x+2 \geq 2^1; \end{cases} \qquad x^2-3x+2 \geq 2;$$

$x(x-3) \geq 0$

Ответ: $x \in (-\infty;\ 0] \cup [3;\infty)$.

5.4. Решите неравенство: $\log_{0,5}\frac{x-4}{x+3} \leq -2$.

Решение:

$$\begin{cases} \frac{x-4}{x+3}>0, \quad (\text{ОДЗ}) \\ \frac{x-4}{x+3} \geq 0,5^{-2}; \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{x-4}{x+3}>0, \\ \frac{x-4}{x+3} \geq 4; \end{cases} \qquad \frac{x-4}{x+3} \geq 4;$$

$4-\frac{x-4}{x+3} \leq 0; \qquad \frac{3x+16}{x+3} \leq 0$

$+ \quad -\frac{16}{3} \quad - \quad -3 \quad + \quad x$

Ответ: $x \in \left[-\frac{16}{3};\ -3\right)$.

5.5. Решите неравенство: $\log_{0,3}\log_6\frac{x^2+x}{x+4} < 0$.

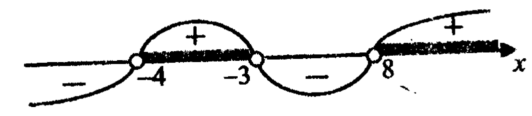
Решение:

$$\begin{cases} \log_6\frac{x^2+x}{x+4}>0, \quad (\text{ОДЗ}) \\ \log_6\frac{x^2+x}{x+4}>0,3^0; \end{cases} \qquad \log_6\frac{x^2+x}{x+4}>1;$$

$$\begin{cases}\dfrac{x^2+x}{x+4}>0, & (\text{ОДЗ})\\ \dfrac{x^2+x}{x+4}>6;\end{cases} \qquad \dfrac{x^2+x}{x+4}>6;$$

$$\frac{x^2-5x-24}{x+4}>0$$

$$\frac{(x-8)(x+3)}{x+4}>0$$



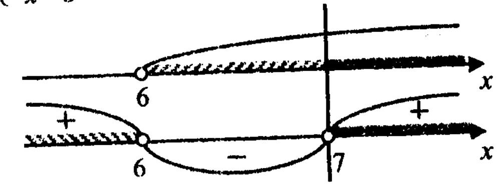
Ответ: $x\in(-4;\ -3)\cup(8;\ \infty)$.

5.6. Решите неравенство: $\log_{\frac{1}{2}}\log_3\dfrac{x-4}{x-6}>0$.

Решение:

$$\begin{cases}\log_3\dfrac{x-4}{x-6}>0, & (\text{ОДЗ})\\ \log_3\dfrac{x-4}{x-6}<\left(\dfrac{1}{2}\right)^0;\end{cases} \qquad \begin{cases}\dfrac{x-4}{x-6}>0,\\ \dfrac{x-4}{x-6}>3^0,\\ \dfrac{x-4}{x-6}<3^1;\end{cases} \qquad \begin{cases}\dfrac{x-4}{x-6}>1,\\ \dfrac{x-4}{x-6}<3;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{2}{x-6}>0,\\ \dfrac{2x-14}{x-6}>0;\end{cases} \qquad \begin{cases}x-6>0,\\ \dfrac{x-7}{x-6}>0.\end{cases}$$



Ответ: $x\in(7;\ \infty)$.

5.7. Решите неравенство: $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{\log_{0,25}\left(x^2+5x+8\right)}\le 2,5$.

Решение:

ОДЗ: $x^2+5x+8>0$; $x\in\mathbb{R}$.

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{\log_{0,25}\left(x^2+5x+8\right)}\le\frac{5}{2}$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{\log_{0,25}\left(x^2+5x+8\right)}\le\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}$$

$$\log_{0,25}\left(x^2+5x+8\right)\ge-1$$

$$x^2+5x+8\le(0,25)^{-1}$$

$$x^2+5x+8\le4$$

$$x^2+5x+4\le0$$

$$(x+4)(x+1)\le0.$$

Ответ: $x\in[-4;-1]$.

•

Рассмотрим решение <u>простейших логарифмических неравенств вида:</u>

$$\log_a f(x)>\log_a g(x).$$

При $a>1$ данное неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases}f(x)>0,\\ g(x)>0,\\ f(x)>g(x);\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases}g(x)>0,\\ f(x)>g(x).\end{cases}$$

При $0<a<1$ данное неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases}f(x)>0,\\ g(x)>0,\\ f(x)<g(x);\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases}f(x)>0,\\ f(x)<g(x).\end{cases}$$

Заметим, что в первой системе неравенство $f(x)>0$ можно не рассматривать, так как оно автоматически вытекает из двух других неравенств $f(x)>g(x)$ и $g(x)>0$.

Аналогично можно упростить вторую систему, опустив неравенство $g(x)>0$.

5.8. Решите неравенство: $\log_{0,1}\left(x^2+x-2\right)>\log_{0,1}(x+3)$.

Решение:

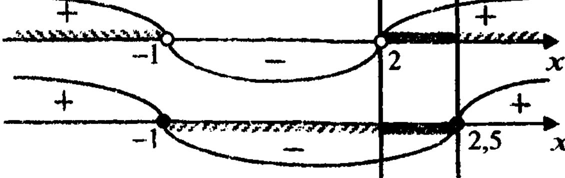
$$\begin{cases}x^2+x-2>0,\\x+3>0,\\x^2+x-2<x+3;\end{cases}\qquad\begin{cases}x^2+x-2>0,\\x^2-5<0;\end{cases}\qquad\begin{cases}(x+2)(x-1)>0,\\\left(x-\sqrt{5}\right)\left(x+\sqrt{5}\right)<0.\end{cases}$$

Ответ: $x\in\left(-\sqrt{5};\ -2\right)\cup\left(1;\ \sqrt{5}\right)$.

5.9. Решите неравенство: $\log_2\left(-x^2+2x+3\right)\geq\log_2\left(x^2-x-2\right)$.

Решение:

$$\begin{cases}-x^2+2x+3>0,\\x^2-x-2>0,\\-x^2+2x+3\geq x^2-x-2;\end{cases}\qquad\begin{cases}x^2-x-2>0,\\2x^2-3x-5\leq 0;\end{cases}\qquad\begin{cases}(x-2)(x+1)>0,\\(2x-5)(x+1)\leq 0.\end{cases}$$



Ответ: $2<x\leq 2,5$.

Существует несколько приемов, позволяющих логарифмическое неравенство свести к простейшему. К ним относятся: использование формулы перехода от одного основания логарифма к другому, применение формул логарифмирования произведения, степени и частного, сведение к алгебраическому виду.

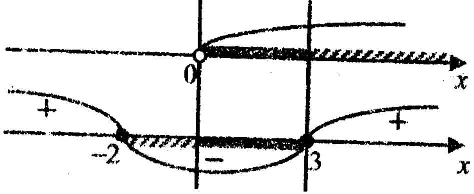
Остановимся на рассмотрении некоторых логарифмических неравенств.

5.10. Решите неравенство: $\log_{20} x + \log_{20}(x+1) \le \log_{20}(2x+6)$.

Решение:

$\log_{20}\left(x\cdot(x+1)\right) \le \log_{20}(2x+6)$

$\begin{cases} x>0, \\ x+1>0, \\ 2x+6>0, \\ x(x+1)\le 2x+6; \end{cases}$ $\begin{cases} x>0, \\ x>-1, \\ x>-3, \\ x^2-x-6\le 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x>0, \\ (x-3)(x+2)\le 0; \end{cases}$



Ответ: $0<x\le 3$.

5.11. Решите неравенство: $1-2\log_{\frac{1}{9}}(x+2)>\log_3(x-3)$.

Решение:

$1+\log_3(x+2)>\log_3(x-3)$

$\log_3\left(3\cdot(x+2)\right)>\log_3(x-3)$

$\begin{cases} x+2>0, \\ x-3>0, \\ 3(x+2)>x-3; \end{cases}$ $\begin{cases} x>-2, \\ x>3, \\ x>-4,5; \end{cases}$ $x>3$.

Ответ: $x>3$.

5.12. Решите неравенство: $\log_3 x+\log_{\sqrt{3}} x+\log_{\frac{1}{3}} x<6$.

Решение:

$\log_3 x+2\log_3 x-\log_3 x<6$

$\log_3 x<3$

$\begin{cases} x>0, \\ x<27. \end{cases}$

Ответ: $x\in(0;\ 27)$.

5.13. Решите неравенство: $\log_{0,5}(x+5)^2 > \log_{\frac{1}{2}}(3x-1)^2$.

Решение:

ОДЗ: $\begin{cases} x \neq -5, \\ x \neq \dfrac{1}{3}. \end{cases}$

$\log_{0,5}(x+5)^2 > \log_{0,5}(3x-1)^2$

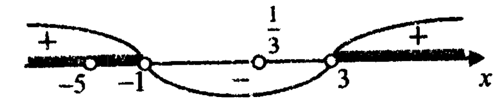
$(x+5)^2 < (3x-1)^2$

$(3x-1)^2 - (x+5)^2 > 0$

$(3x-1-x-5)(3x-1+x+5) > 0$

$(2x-6)(4x+4) > 0$

$8(x-3)(x+1) > 0$



Ответ: $x \in (-\infty; -5) \cup (-5; -1) \cup (3; \infty)$.

5.14. Решите неравенство: $\log_{0,1}(x^2+75) - \log_{0,1}(x-4) \leq -2$.

Решение:

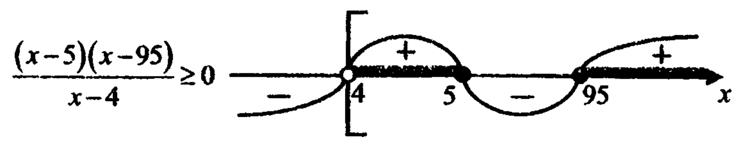
ОДЗ: $x > 4$.

$\log_{0,1}\dfrac{x^2+75}{x-4} \leq -2$

$\dfrac{x^2+75}{x-4} \geq (0,1)^{-2}$

$\dfrac{x^2+75}{x-4} - 100 \geq 0$

$\dfrac{x^2-100x+475}{x-4} \geq 0$



Ответ: $x \in (4;\, 5] \cup [95;\, \infty)$.

Рассмотрим задания, где требуется решить логарифмическое неравенство, в котором основание логарифма также зависит от x. При анализе таких неравенств правило знаков уже не работает однозначно (так как мы не знаем, в каких пределах лежит основание логарифма).

Поэтому следует рассматривать два случая:

1) когда основание логарифма больше единицы и

2) когда основание логарифма положительное, но меньше единицы.

5.15. Решите неравенство: $\log_x(3-2x) > 1$.

Решение:

1) $\begin{cases} x > 1, \\ 3-2x > 0, \\ 3-2x > x; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 1, \\ x < 1{,}5, \\ x < 1; \end{cases}$ решений нет.

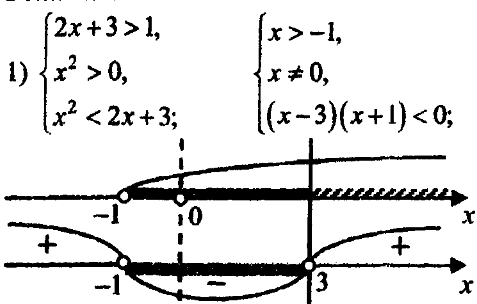
2) $\begin{cases} 0 < x < 1, \\ 3-2x > 0, \\ 3-2x < x; \end{cases}$ $\begin{cases} 0 < x < 1, \\ x < 1{,}5, \\ x > 1; \end{cases}$ решений нет.

Ответ: решений нет.

5.16. Решите неравенство: $\log_{2x+3} x^2 < 1$.

Решение:

1) $\begin{cases} 2x+3 > 1, \\ x^2 > 0, \\ x^2 < 2x+3; \end{cases}$ $\begin{cases} x > -1, \\ x \neq 0, \\ (x-3)(x+1) < 0; \end{cases}$



$x \in (-1;\ 0) \cup (0;\ 3)$.

2) $\begin{cases} 0 < 2x+3 < 1, \\ x^2 > 0, \\ x^2 > 2x+3; \end{cases}$ $\begin{cases} 0 < 2x+3 < 1, \\ x \neq 0, \\ x^2 - 2x - 3 > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} -3 < 2x < -2, \\ x \neq 0, \\ (x-3)(x+1) > 0; \end{cases}$

$\begin{cases} -1{,}5 < x < -1, \\ x \neq 0, \\ (x-3)(x+1) > 0; \end{cases}$

$x \in (-1{,}5;\ -1)$

Объединяем полученные решения.

Ответ: $x \in (-1{,}5;\ -1) \cup (-1;\ 0) \cup (0;\ 3)$.

Метод введения новой переменной

При решении логарифмических неравенств данным методом вводится новая переменная $y = \log_a x$, и неравенство решается, как алгебраическое относительно переменной y. После этого, решение исходного неравенства сводится к решению соответствующих простейших неравенств.

Рассмотрим данный метод решения логарифмических неравенств на конкретных примерах.

5.17. Решите неравенство: $\log_3^2 x + \log_3 x \geq 2$.

Решение:

ОДЗ: $x > 0$.

Обозначим: $y = \log_3 x$.

$y^2 + y - 2 \geq 0$

$(y+2)(y-1) \geq 0$

$y \in (-\infty; -2] \cup [1;\ \infty)$

$$\left[\begin{array}{l} y \le -2, \\ y \ge 1. \end{array}\right.$$

Сделаем обратную замену:

$$\left[\begin{array}{l} \log_3 x \le -2, \\ \log_3 x \ge 1; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 0, \\ x \le 3^{-2}; \end{cases} \\ \begin{cases} x > 0, \\ x \ge 3^1; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 0, \\ x \le \frac{1}{9}; \end{cases} \\ \begin{cases} x > 0, \\ x \ge 3; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 0 < x \le \frac{1}{9}, \\ x \ge 3. \end{array}\right.$$

Ответ: $x \in \left(0;\ \frac{1}{9}\right] \cup [3;\ \infty)$.

5.18. Решите неравенство: $\frac{\lg^2 x - 3\lg x + 3}{\lg x - 1} < 1$.

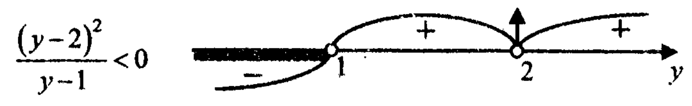
Решение:

ОДЗ: $x > 0$, $x \ne 10$.

Обозначим: $y = \lg x$.

$$\frac{y^2 - 3y + 3}{y - 1} - 1 < 0$$

$$\frac{(y-2)^2}{y-1} < 0$$



$y < 1$

$$\lg x < 1; \quad \begin{cases} x > 0, \\ x < 10; \end{cases} \quad 0 < x < 10.$$

Ответ: $x \in (0;\ 10)$.

5.19. Решите неравенство: $\log_2\left(\log_{0,5}^2 x - \log_{0,5} x - 2\right) \ge 2$.

Решение:

$$\begin{cases} \log_{0,5}^2 x - \log_{0,5} x - 2 > 0, \quad (\text{ОДЗ}) \\ \log_{0,5}^2 x - \log_{0,5} x - 2 \ge 4; \end{cases}$$

$$\log_{0,5}^2 x - \log_{0,5} x - 2 \ge 4$$

$\log^2_{0,5} x - \log_{0,5} x - 6 \geq 0$

Замена: $y = \log_{0,5} x$.

$y^2 - y - 6 \geq 0$

$(y+2)(y-3) \geq 0$

$y \in (-\infty; -2] \cup [3; \infty)$

$\left[\begin{array}{l} y \leq -2, \\ y \geq 3. \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \log_{0,5} x \leq -2, \\ \log_{0,5} x \geq 3. \end{array}\right.$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \geq 0,5^{-2}, \\ x \leq 0,5^3; \end{array}\right. \\ x > 0; \quad \text{(ОДЗ)} \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \geq 4, \\ x \leq \dfrac{1}{8}; \end{array}\right. \\ x > 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x \in \left(-\infty; \dfrac{1}{8}\right] \cup [4; \infty), \\ x > 0; \end{cases}$ $x \in \left(0; \dfrac{1}{8}\right] \cup [4; \infty)$.

Ответ: $x \in \left(0; \dfrac{1}{8}\right] \cup [4; \infty)$.

5.20. Решите неравенство: $\lg^2(-x) + \lg x^2 - 3 < 0$.

Решение:

ОДЗ: $-x > 0$; $x < 0$.

$\lg^2(-x) + 2\lg|x| - 3 < 0$

Так как $x < 0$ неравенство равносильно:

$\lg^2(-x) + 2\lg(-x) - 3 < 0$.

Замена: $\lg(-x) = y$.

$y^2 + 2y - 3 < 0$

$(y+3)(y-1) < 0$

$-3 < y < 1$

$-3 < \lg(-x) < 1$

$10^{-3} < -x < 10$

$-10 < x < -0{,}001$.

Ответ: $x \in (-10;\ -0{,}001)$.

5.21. Решите неравенство: $\log_2 x - \log_x 32 \le 4$.

Решение:

ОДЗ: $x > 0$, $x \ne 1$.

$\log_2 x - 5\log_x 2 \le 4$

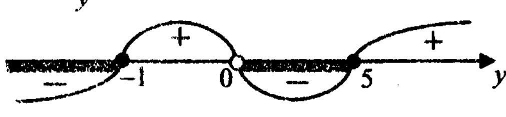
$$\log_2 x - \frac{5}{\log_2 x} - 4 \le 0$$

Замена: $\log_2 x = y$.

$$y - \frac{5}{y} - 4 \le 0$$

$$\frac{y^2 - 4y - 5}{y} \le 0$$

$$\frac{(y+1)(y-5)}{y} \le 0$$



$y \in (-\infty;\ -1] \cup (0;\ 5]$

$\left[\begin{array}{l}\log_2 x \le -1,\\ 0 < \log_2 x \le 5;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}0 < x \le 2^{-1},\\ 1 < x \le 2^5;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}0 < x \le \frac{1}{2},\\ 1 < x \le 32.\end{array}\right.$

Ответ: $x \in \left(0;\ \frac{1}{2}\right] \cup (1;\ 32]$.

5.22. Решите неравенство: $1 - 5\log_x 2 + 6\log_x^2 2 < 0$.

Решение:

ОДЗ: $x > 0$, $x \ne 1$.

Перейдем к новому основанию логарифма:

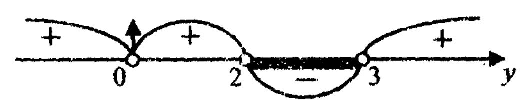
$$1-\frac{5}{\log_2 x}+\frac{6}{\log_2^2 x}<0$$

Обозначим: $y=\log_2 x$.

$$1-\frac{5}{y}+\frac{6}{y^2}<0$$

$$\frac{y^2-5y+6}{y^2}<0$$

$$\frac{(y-2)(y-3)}{y^2}<0$$



$2<y<3$

$2<\log_2 x<3$

$4<x<8$.

Ответ: $x\in(4;\ 8)$.

5.23. Решите неравенство: $x^{\log_2 x-2}>\frac{x}{4}$.

Решение:

ОДЗ: $x>0$.

Логарифмируем по основанию 2:

$$\log_2 x^{\log_2 x-2}>\log_2 \frac{x}{4}$$

$$(\log_2 x-2)\log_2 x>\log_2 x-2$$

Обозначим: $y=\log_2 x$.

$(y-2)y>y-2$

$(y-2)(y-1)>0$

$y\in(-\infty;\ 1)\cup(2;\ \infty)$

$$\left[\begin{array}{l} y<1, \\ y>2; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \log_2 x<1, \\ \log_2 x>2; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>0, \\ x<2; \end{cases} \\ \begin{cases} x>0, \\ x>4; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 0<x<2, \\ x>4. \end{array}\right.$$

Ответ: $x \in (0;\ 2) \cup (4;\ \infty)$.

Метод интервалов

Для решения логарифмических неравенств, содержащих произведение или частное различных функций, можно применять метод интервалов.

При использовании данного метода полезно запомнить:

$\log_a x > 0$, если положительные числа a и x лежат «по одну сторону от единицы»;

$\log_a x < 0$, если положительные числа a и x лежат «по разные стороны от единицы».

5.24. Решите неравенство: $\left(x^2-4\right)\cdot \log_{\frac{1}{2}} x > 0$.

Решение:

Рассмотрим функцию: $f(x) = \left(x^2-4\right)\cdot \log_{\frac{1}{2}} x$.

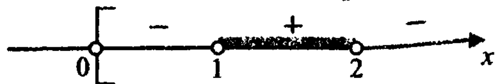
1. Область определения функции $D(f)$: $\quad x>0$.

2. Нули функции:

$$\left[\begin{array}{l} x^2-4=0, \\ \log_{\frac{1}{2}} x=0; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=\pm 2, \\ x=1; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=1. \end{array}\right.$$

3. Выберем в промежутке $x \in (2;\ \infty)$ контрольную точку и определим знак функции $f(x)$ в данной точке.

Пусть $x=4$: $\quad f(4) = 12\cdot \log_{\frac{1}{2}} 4 = 12\cdot(-2) = -24 < 0$



Ответ: $x \in (1;\ 2)$.

5.25. Решите неравенство: $\dfrac{\log_{0,25}(x+5)}{\log_4(7-x)} > 0$.

Решение:

Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{\log_{0,25}(x+5)}{\log_4(7-x)}$.

1. Область определения функции $D(f)$:

$$\begin{cases} x+5>0, \\ 7-x>0, \\ 7-x\neq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x>-5, \\ x<7, \\ x\neq 6; \end{cases} \quad \begin{cases} -5<x<7, \\ x\neq 6. \end{cases}$$

$x \in (-5;\ 6)\cup(6;\ 7)$.

2. Нули функции:

$\log_{0,25}(x+5)=0$,

$x+5=1$,

$x=-4$.

3. Знак левой части неравенства на промежутке $x \in (6;\ 7)$ определим, выбрав «контрольную» точку $x = 6,5$, тогда:

$$f(6,5) = \frac{\log_{0,25}(6,5+5)}{\log_4(7-6,5)} = \frac{\overbrace{\log_{0,25} 11,5}^{\text{отрицат.}}}{\underbrace{\log_4 0,5}_{\text{отрицат.}}} > 0$$

Ответ: $x \in (-5;\ -4)\cup(6;\ 7)$.

5.26. Решите неравенство: $\dfrac{\log_{0,4}(x+3)}{2x-4} \le 0$.

Решение:

Рассмотрим функцию: $f(x) = \dfrac{\log_{0,4}(x+3)}{2x-4}$.

1. Область определения функции $D(f)$.

$$\begin{cases} x+3>0, \\ x\neq 2; \end{cases} \qquad x\in(-3;\ 2)\cup(2;\ \infty).$$

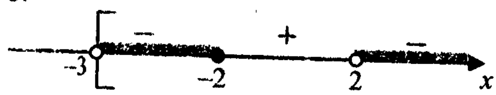
2. Нули функции:

$\log_{0,4}(x+3)=0$,

$x+3=1$,

$x=-2$.

3.



Ответ: $x\in(-3;\ -2]\cup(2;\ \infty)$.

5.27. Решите неравенство: $\dfrac{\log_2(x-3)}{x^2-25}>0$.

Решение:

Рассмотрим функцию: $f(x)=\dfrac{\log_2(x-3)}{x^2-25}$.

1. Область определения функции $D(f)$:

$$\begin{cases} x-3>0, \\ x^2\neq 25; \end{cases} \qquad \begin{cases} x>3, \\ x\neq \pm 5; \end{cases} \qquad x\in(3;\ 5)\cup(5;\ \infty).$$

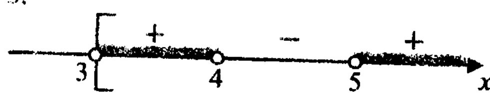
2. Нули функции:

$\log_2(x-3)=0$,

$x-3=1$,

$x=4$.

3.



Ответ: $x\in(3;\ 4)\cup(5;\ \infty)$.

5.28. Решите неравенство: $x\cdot\log_{0,1}(x^2+x+1)>0$.

Решение:

Рассмотрим функцию: $f(x)=x\cdot\log_{0,1}\left(x^2+x+1\right)$.

1. Область определения функции $D(f)$: $x\in\mathbb{R}$.

2. Нули функции:

$$\left[\begin{array}{l} x=0, \\ \log_{0,1}\left(x^2+x+1\right)=0; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x^2+x+1=1; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x(x+1)=0; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=-1. \end{array}\right.$$

3.

$+ \quad -1 \quad - \quad 0 \quad - \quad x$

Ответ: $x<-1$.

5.29. Решите неравенство: $\dfrac{3-\log_2\left(x^2-6x+8\right)}{x-3}>0$.

Решение:

$$\frac{\log_2\left(x^2-6x+8\right)-3}{x-3}<0$$

Рассмотрим функцию: $f(x)=\dfrac{\log_2\left(x^2-6x+8\right)-3}{x-3}$.

1. Область определения функции $D(f)$:

$$\begin{cases} x^2-6x+8>0, \\ x\neq 3; \end{cases} \qquad \begin{cases} (x-2)(x-4)>0, \\ x\neq 3; \end{cases} \qquad x\in(-\infty;\ 2)\cup(4;\ \infty).$$

2. Нули функции:

$\log_2\left(x^2-6x+8\right)=3$,

$x^2-6x+8=2^3$,

$x^2-6x=0$,

$x_1=0;\quad x_2=6$.

3. Выберем в промежутке $x\in(6;\infty)$ контрольную точку и определим знак функции $f(x)$ в данной точке.

Если $x=8$, то $f(8)=\dfrac{\log_2 24-3}{5}>0$

$$\begin{array}{c}\text{— \quad + \quad] \quad [\quad — \quad +}\\ 0 \quad 2 \quad 4 \quad 6 \quad x\end{array}$$

Ответ: $x\in(-\infty;\ 0)\cup(4;\ 6)$.

5.30. Решите неравенство: $\dfrac{\lg 7-\lg\left(-8x-x^2\right)}{\lg(x+3)}>0$.

Решение:

Рассмотрим функцию: $f(x)=\dfrac{\lg 7-\lg\left(-8x-x^2\right)}{\lg(x+3)}$.

1. Область определения функции $D(f)$:

$$\begin{cases}-8x-x^2>0,\\ x+3>0,\\ x+3\neq 1;\end{cases}\qquad \begin{cases}x^2+8x<0,\\ x>-3,\\ x\neq -2;\end{cases}\qquad \begin{cases}-8<x<0,\\ x>-3,\\ x\neq -2;\end{cases}\qquad \begin{cases}-3<x<0,\\ x\neq -2;\end{cases}$$

$x\in(-3;\ -2)\cup(-2;\ 0)$.

2. Нули функции:

$\lg\left(-8x-x^2\right)=\lg 7$,

$-x^2-8x=7$,

$x^2+8x+7=0$,

$x_1=-7\notin$ ОДЗ; $\quad x_2=-1$.

3. Выберем «контрольную» точку из промежутка $x\in(-1;\ 0)$.

Пусть $x=-0{,}5$, тогда:

$$f(-0{,}5)=\frac{\lg 7-\lg(3{,}75)}{\lg(2{,}5)}=\frac{\lg\dfrac{7}{3{,}75}}{\lg(2{,}5)}=\frac{\overbrace{\lg\dfrac{28}{15}}^{\text{положит.}}}{\underbrace{\lg(2{,}5)}_{\text{положит.}}}>0$$

Ответ: $x\in(-3;\,-2)\cup(-1;\,0)$.

5.31. Решите неравенство: $\dfrac{\log_{0,3}|x-2|}{x^2-4x}<0$.

Решение:

Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{\log_{0,3}|x-2|}{x^2-4x}$.

1. Область определения функции $D(f)$:

$$\begin{cases} x\neq 2, \\ x^2-4x\neq 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x\neq 2, \\ x\neq 0,\ x\neq 4. \end{cases}$$

2. Нули функции:

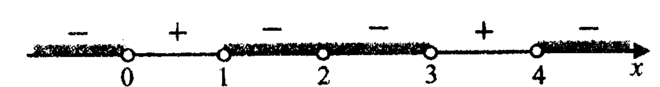
$\log_{0,3}|x-2|=0$,

$|x-2|=1$,

$x_1=1;\quad x_2=3$.

3. Выберем «контрольную» точку из промежутка $x\in(4;\,\infty)$.

Пусть $x=5$, тогда: $f(5)=\dfrac{\log_{0,3}3}{5}<0$.

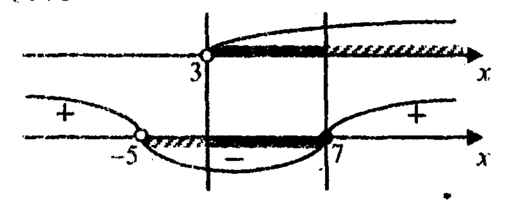


Ответ: $x\in(-\infty;\,0)\cup(1;\,2)\cup(2;\,3)\cup(4;\,\infty)$.

5.32. Решите систему неравенств: $\begin{cases} \log_2(x+1) > 2, \\ \dfrac{x-7}{x+5} \le 0. \end{cases}$

Решение:

$\begin{cases} x+1 > 0, \\ x+1 > 4, \\ \dfrac{x-7}{x+5} \le 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x+1 > 4, \\ \dfrac{x-7}{x+5} \le 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 3, \\ \dfrac{x-7}{x+5} \le 0. \end{cases}$



Ответ: $x \in (3;\ 7]$.

5.33. Решите систему неравенств: $\begin{cases} \log_{0,5}(x+16) \le \log_{0,5}(x+2) - 1, \\ \dfrac{27^x}{3^{x-7}} > 9. \end{cases}$

Решение:

$\begin{cases} \log_{0,5}(x+16) \le \log_{0,5}\dfrac{x+2}{0,5}, \\ 3^{2x+7} > 3^2; \end{cases}$ $\begin{cases} x+16 > 0, \\ x+2 > 0, \\ x+16 \ge 2(x+2), \\ 2x+7 > 2; \end{cases}$ $\begin{cases} x > -16, \\ x > -2, \\ x \le 12, \\ x > -2,5; \end{cases}$

$\begin{cases} x > -2, \\ x \le 12. \end{cases}$

Ответ: $x \in (-2;\ 12]$.

5.34. Найдите натуральные значения x, удовлетворяющие системе неравенств: $\begin{cases} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2x+1} > 32, \\ \log_4 (x-6)^2 \le 1. \end{cases}$

Решение:

$$\begin{cases} 2^{2x-1} > 2^5, \\ (x-6)^2 > 0, \\ (x-6)^2 \le 4; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x-1 > 5, \\ x \ne 6, \\ (x-6)^2 - 4 \le 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 3, \\ x \ne 6, \\ (x-8)(x-4) \le 0. \end{cases}$$

$x \in [4;\ 6) \cup (6;\ 8]$

Натуральные числа, являющиеся элементами полученного решения: 4, 5, 7, 8.

Ответ: $\{4;\ 5;\ 7;\ 8\}$.

5.35. Решите систему неравенств: $\begin{cases} \log_{\sqrt{2}} (x-1) < 4, \\ \dfrac{x}{x-3} + \dfrac{x-5}{x} < \dfrac{2x}{3-x}. \end{cases}$

Решение:

$$\begin{cases} \log_2 (x-1) < 2, \\ \dfrac{3x}{x-3} + \dfrac{x-5}{x} < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x-1 > 0, \\ x-1 < 4, \\ \dfrac{4x^2 - 8x + 15}{x(x-3)} < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 1, \\ x < 5, \\ x(x-3) < 0. \end{cases}$$

Ответ: $x \in (1;\ 3)$.

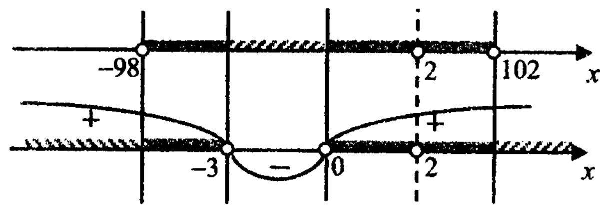
5.36. Решите систему неравенств: $\begin{cases} \lg|x-2|<2, \\ \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2}<27^x. \end{cases}$

Решение:

ОДЗ: $x \neq 2$.

$\begin{cases} |x-2|<10^2, \\ 3^{-x^2}<3^{3x}; \end{cases}$ $\begin{cases} |x-2|<100, \\ -x^2<3x; \end{cases}$ $\begin{cases} -100<x-2<100, \\ x^2+3x>0; \end{cases}$

$\begin{cases} -98<x<102, \\ x(x+3)>0. \end{cases}$



Ответ: $x \in (-98; -3) \cup (0; 2) \cup (2; 102)$.

5.37. Решите систему неравенств: $\begin{cases} \log_3(1-x)^2 \leq 2, \\ 3^{2x-6}<\frac{1}{27}. \end{cases}$

Решение:

ОДЗ: $x \neq 1$.

$\begin{cases} 2\log_3|x-1| \leq 2, \\ 3^{2x-6}<3^{-3}; \end{cases}$ $\begin{cases} |x-1| \leq 3, \\ 2x-6<-3; \end{cases}$ $\begin{cases} -3 \leq x-1 \leq 3, \\ x<\frac{3}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} -2 \leq x \leq 4, \\ x<\frac{3}{2}. \end{cases}$

Ответ: $x \in \left[-2; 1\right) \cup \left(1; \frac{3}{2}\right)$.

5.38. Решите систему неравенств: $\begin{cases} \lg^2 x + \lg 0{,}01x > 0, \\ \dfrac{1}{x} < 1000. \end{cases}$

Решение:

ОДЗ: $x > 0$.

$$\begin{cases} \lg^2 x + \lg 0{,}01 + \lg x > 0, \\ 1000 - \dfrac{1}{x} > 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \lg^2 x + \lg x - 2 > 0, \\ \dfrac{1000x - 1}{x} > 0. \end{cases}$$

Рассмотрим первое неравенство системы:

$\lg^2 x + \lg x - 2 > 0$.

Введем новую переменную: $y = \lg x$.

$y^2 + y - 2 > 0$

$y \in (-\infty; -2) \cup (1; \infty)$

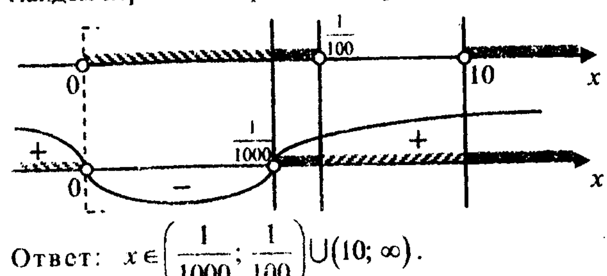
Получаем совокупность:

$$\left[\begin{array}{l} y < -2, \\ y > 1; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \lg x < -2, \\ \lg x > 1; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x < \dfrac{1}{100}, \\ x > 10. \end{array}\right.$$

С учетом ОДЗ решение первого неравенства можно записать:

$x \in \left(0; \dfrac{1}{100}\right) \cup (10; \infty)$.

Найдем пересечение решений первого и второго неравенств:

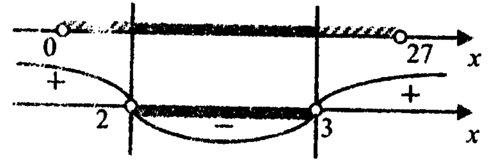


Ответ: $x \in \left(\dfrac{1}{1000}; \dfrac{1}{100}\right) \cup (10; \infty)$.

5.39. Решите систему неравенств: $\begin{cases} \log_{0,5}\left(x^2-5x+7\right)>0, \\ \log_3 x+\log_{\sqrt{3}} x+\log_{\frac{1}{3}} x<6. \end{cases}$

Решение:

$$\begin{cases} \log_{0,5}\left(x^2-5x+7\right)>0, \\ \log_3 x<3; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-5x+7>0, \\ x^2-5x+7<0,5^0, \\ x>0, \\ x<3^3; \end{cases} \quad \begin{cases} x\in\mathbb{R}, \\ (x-2)(x-3)<0, \\ 0<x<27. \end{cases}$$



Ответ: $x\in(2;\ 3)$.

5.40. Решите систему неравенств: $\begin{cases} \lg\left(x^2-3x-3\right)\ge 0, \\ \lg\left(x^2-15\right)<1. \end{cases}$

Решение:

$$\begin{cases} x^2-3x-3>0, \\ x^2-3x-3\ge 1, \\ x^2-15>0, \\ x^2-15<10; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-3x-4\ge 0, \\ x^2-15>0, \\ x^2-25<0; \end{cases} \quad \begin{cases} (x-4)(x+1)\ge 0, \\ \left(x-\sqrt{15}\right)\left(x+\sqrt{15}\right)>0, \\ (x-5)(x+5)<0. \end{cases}$$

Ответ: $x\in\left(-5;\ -\sqrt{15}\right)\cup[4;\ 5)$.

§6. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Системы показательных уравнений

Системы, содержащие показательные уравнения, как правило, решаются сведением показательного уравнения к алгебраическому и решением полученной алгебраической системы.

При решении систем показательных уравнений используют два основных метода:

- метод приведения к одному основанию;
- метод введения новых переменных.

Метод приведения к одному основанию

Данный метод основан на следующем свойстве степеней: если две степени равны и равны их основания, то равны и их показатели, то есть уравнения надо попытаться привести к виду $a^{f(x)} = a^{g(x)}$. Откуда получим уравнение: $f(x) = g(x)$.

Рассмотрим ряд примеров.

6.1. Решите систему уравнений: $\begin{cases} 8^{2x+1} = 32 \cdot 2^{4y-1}, \\ 5 \cdot 5^{x-y} = \sqrt{25^{2y+1}}; \end{cases}$

Решение:

$\begin{cases} 2^{3(2x+1)} = 2^5 \cdot 2^{4y-1}, \\ 5^{1+x-y} = 5^{2y+1}; \end{cases}$ $\begin{cases} 6x+3 = 5+4y-1, \\ 1+x-y = 2y+1; \end{cases}$ $\begin{cases} 6x-4y = 1, \\ x-3y = 0; \end{cases}$

$\begin{cases} 6x-4y = 1, \\ x = 3y; \end{cases}$ $\begin{cases} 14y = 1, \\ x = 3y; \end{cases}$ $\begin{cases} y = \dfrac{1}{14}, \\ x = \dfrac{3}{14}. \end{cases}$

Ответ: $\left(\dfrac{3}{14}; \dfrac{1}{14}\right)$.

6.2. Решите систему уравнений: $\begin{cases} 3^x \cdot 9^y = 3, \\ \dfrac{2^{y-x}}{2^x} = \dfrac{1}{64}. \end{cases}$

Решение:

$$\begin{cases} 3^x \cdot 3^{2y} = 3, \\ 2^{y-2x} = 2^{-6}; \end{cases} \quad \begin{cases} x+2y=1, & |\cdot 2 \\ -2x+y=-6; \end{cases} \quad +\begin{cases} 2x+4y=2, \\ -2x+y=-6; \end{cases}$$

$$5y=-4.$$

$y=-\frac{4}{5}$, $x=\frac{13}{5}$.

Ответ: $\left(\frac{13}{5};\ -\frac{4}{5}\right)$.

6.3. Решите систему уравнений: $\begin{cases} 27^x = 9^y, \\ 81^x : 3^y = 243. \end{cases}$

Решение:

$$\begin{cases} 3^{3x} = 3^{2y}, \\ 3^{4x} : 3^y = 3^5; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x = 2y, \\ 4x - y = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 1{,}5x, \\ 2{,}5x = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2, \\ y = 3. \end{cases}$$

Ответ: $(2;\ 3)$.

6.4. Решите систему уравнений: $\begin{cases} 3^{2x-1} \cdot 27^{x+y} = 3, \\ (5x-y)^2 = 36. \end{cases}$

Решение:

$$\begin{cases} 3^{2x-1} \cdot 3^{3x+3y} = 3, \\ (5x-y)^2 = 36; \end{cases} \quad \begin{cases} 5x+3y=2, \\ (5x-y)^2 = 36; \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 5x+3y=2, & |\cdot(-1) \\ 5x-y=6; \end{cases} \\ \begin{cases} 5x+3y=2, & |\cdot(-1) \\ 5x-y=-6; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} -5x-3y=-2, \\ 5x-y=6; \end{cases} \\ \begin{cases} -5x-3y=-2, \\ 5x-y=-6; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -4y=4, \\ 5x-y=6; \end{cases} \\ \begin{cases} -4y=-8, \\ 5x-y=-6; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=-1, \\ x=1; \end{cases} \\ \begin{cases} y=2, \\ x=-0{,}8. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(1;-1)$, $(-0{,}8;\ 2)$.

6.5. Решите систему уравнений: $\begin{cases} 2^{x-y} \cdot 2^{xy} = 8, \\ 9^y = 3^{4-x}. \end{cases}$

Решение:

$$\begin{cases} 2^{x-y}\cdot 2^{xy}=8, \\ 9^{y}=3^{4-x}; \end{cases} \quad \begin{cases} 2^{x-y+xy}=2^{3}, \\ 3^{2y}=3^{4-x}; \end{cases} \quad \begin{cases} x-y+xy=3, \\ 2y=4-x; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=4-2y, \\ 4-3y+y(4-2y)=3; \end{cases} \quad \begin{cases} x=4-2y, \\ 2y^2-y-1=0; \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=1, \\ x=2; \end{cases} \\ \begin{cases} y=-\dfrac{1}{2}, \\ x=5. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(2;\ 1)$; $(5;-0{,}5)$.

6.6. Решите систему уравнений: $\begin{cases} \sqrt[x]{x+y}=2, \\ (x+y)\cdot 5^{x}=100. \end{cases}$

Решение:

ОДЗ: $x\ge 2$; $x\in\mathbb{N}$.

$$\begin{cases} (x+y)^{\frac{1}{x}}=2, \\ (x+y)\cdot 5^{x}=100; \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=2^{x}, \\ (x+y)\cdot 5^{x}=100; \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=2^{x}, \\ 2^{x}\cdot 5^{x}=100; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=2^{x}, \\ 10^{x}=10^{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x=2, \\ 2+y=2^{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x=2, \\ y=2. \end{cases}$$

Ответ: $(2;\ 2)$.

6.7. Решите систему уравнений: $\begin{cases} 9^{xy}\cdot 3^{x^2+y^2}=3, \\ \sqrt{25^{2x+y}}=\dfrac{5^{x}}{5^{y}}. \end{cases}$

Решение:

$$\begin{cases} 3^{2xy}\cdot 3^{x^2+y^2}=3, \\ \left(5^{2\cdot(2x+y)}\right)^{\frac{1}{2}}=5^{x-y}; \end{cases} \quad \begin{cases} 3^{x^2+2xy+y^2}=3, \\ 5^{2x+y}=5^{x-y}; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+2xy+y^2=1, \\ 2x+y=x-y; \end{cases}$$

$$\begin{cases}(x+y)^2=1,\\ x=-2y;\end{cases}\qquad \begin{cases}y^2=1,\\ x=-2y;\end{cases}\qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=1,\\ x=-2;\end{cases}\\ \begin{cases}y=-1,\\ x=2.\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: $(2;\ -1)$; $(-2;\ 1)$.

6.8. Решите систему уравнений: $\begin{cases}8^x=10y,\\ 2^x=5y.\end{cases}$

Решение:

Разделив первое уравнение системы на второе, получим:

$$\frac{8^x}{2^x}=2;\qquad \left(\frac{8}{2}\right)^x=2;\qquad 4^x=2;\qquad x=\frac{1}{2}.$$

Подставим $x=\frac{1}{2}$ во второе уравнение:

$$2^{\frac{1}{2}}=5y;\qquad 5y=\sqrt{2};\qquad y=\frac{\sqrt{2}}{5}.$$

Ответ: $\left(\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{5}\right)$.

6.9. Решите систему уравнений: $\begin{cases}5^{|x+3|}=125,\\ 13^{|x+y|}=1.\end{cases}$

Решение:

$$\begin{cases}5^{|x+3|}=5^3,\\ 13^{|x+y|}=13^0;\end{cases}\qquad \begin{cases}|x+3|=3,\\ |x+y|=0;\end{cases}\qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=0,\\ |x+y|=0;\end{cases}\\ \begin{cases}x=-6,\\ |x+y|=0;\end{cases}\end{array}\right.\qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=0,\\ y=0;\end{cases}\\ \begin{cases}x=-6,\\ y=6.\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: $(0;\ 0)$, $(-6;\ 6)$.

6.10. Решите систему уравнений: $\begin{cases}2^x\cdot 3^y=24,\\ 3^x\cdot 2^y=54.\end{cases}$

Решение:

$$\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 2^3 \cdot 3, \\ 2^y \cdot 3^x = 2 \cdot 3^3. \end{cases}$$

Перемножим два уравнения системы:

$$2^x \cdot 3^y \cdot 2^y \cdot 3^x = 2^3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3^3$$

$$2^{x+y} \cdot 3^{x+y} = 2^4 \cdot 3^4$$

$$6^{x+y} = 6^4$$

$$x + y = 4$$

Разделим первое уравнение системы на второе:

$$\frac{2^x \cdot 3^y}{2^y \cdot 3^x} = \frac{2^3 \cdot 3}{2 \cdot 3^3}$$

$$\frac{2^{x-y}}{3^{x-y}} = \frac{2^2}{3^2}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x-y} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$x - y = 2$$

Получаем систему уравнений: $\begin{cases} x + y = 4, \\ x - y = 2; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 3, \\ y = 1. \end{cases}$

Ответ: $(3; 1)$.

6.11. Решите систему уравнений: $\begin{cases} y^{x^2+7x+12} = 1, \\ x + y = 6, \\ y > 0. \end{cases}$

Решение:

Из первого уравнения системы следует, что должно быть выполнено одно из двух условий:

$y = 1$ или $x^2 + 7x + 12 = 0$.

Поэтому исходная система уравнений равносильна совокупности систем.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=1,\\x+y=6,\\y>0;\end{cases}\\ \begin{cases}x^2+7x+12=0,\\x+y=6,\\y>0;\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=1,\\x=5;\end{cases}\\ \begin{cases}x_1=-4,\ x_2=-3,\\y=6-x,\\y>0;\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=1,\\x=5;\end{cases}\\ \begin{cases}x=-4,\\y=10;\end{cases}\\ \begin{cases}x=-3,\\y=9.\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: $(-4;\ 10)$, $(-3;\ 9)$, $(5;\ 1)$.

Метод введения новых переменных

Некоторые системы показательных уравнений сводятся к системам рациональных уравнений непосредственной заменой входящих в них степеней новыми переменными.

6.12. Решите систему уравнений: $\begin{cases}x+5^{y+2}=9,\\2x-5^{y+3}=11.\end{cases}$

Решение:

$$\begin{cases}x+5^{y+2}=9,\\2x-5\cdot5^{y+2}=11.\end{cases}$$

Введем новую переменную: $a=5^{y+2}$ $(a>0)$.

Получим систему:

$$\begin{cases}x+a=9, & \mid\cdot5\\2x-5a=11;\end{cases} \quad \begin{cases}5x+5a=45,\\2x-5a=11;\end{cases} \quad \begin{cases}x=8,\\a=1;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=8,\\5^{y+2}=1;\end{cases} \quad \begin{cases}x=8,\\y=-2.\end{cases}$$

Ответ: $(8;\ -2)$.

6.13. Решите систему уравнений: $\begin{cases}2^x+2\cdot3^{x+y}=56,\\3\cdot2^x+3^{x+y+1}=87.\end{cases}$

Решение:

$$\begin{cases} 2^x + 2\cdot 3^{x+y} = 56, \\ 3\cdot 2^x + 3\cdot 3^{x+y} = 87. \end{cases}$$

Замена: $a = 2^x$, $b = 3^{x+y}$ $(a > 0;\ b > 0)$.

$$\begin{cases} a + 2b = 56, \\ 3a + 3b = 87; \end{cases} \quad \begin{cases} a + 2b = 56, \\ a + b = 29; \end{cases} \quad \begin{cases} a = 2, \\ b = 27. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2^x = 2, \\ 3^{x+y} = 27; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1, \\ x + y = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1, \\ y = 2. \end{cases}$$

Ответ: $(1;\ 2)$.

6.14. Решите систему уравнений: $\begin{cases} 3^{2x} - 2^y = 725, \\ 3^x - \sqrt{2^y} = 25. \end{cases}$

Решение:

$$\begin{cases} 3^{2x} - 2^y = 725, \\ 3^x - 2^{\frac{y}{2}} = 25; \end{cases}$$

Замена: $a = 3^x$, $b = 2^{\frac{y}{2}}$ $(a > 0;\ b > 0)$.

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 725, \\ a - b = 25; \end{cases} \quad \begin{cases} \underbrace{(a-b)}_{=25}(a+b) = 725, \\ a - b = 25; \end{cases} \quad \begin{cases} a + b = 29, \\ a - b = 25; \end{cases} \quad \begin{cases} a = 27, \\ b = 2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3^x = 27, \\ 2^{\frac{y}{2}} = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3, \\ y = 2. \end{cases}$$

Ответ: $(3;\ 2)$.

6.15. Решите систему уравнений: $\begin{cases} 3\cdot 7^x - 3^y = 12, \\ 7^x \cdot 3^y = 15. \end{cases}$

Решение:

$$\begin{cases} 3\cdot 7^x - 3^y = 12, \\ 7^x \cdot 3^y = 15. \end{cases}$$

Замена: $a = 7^x$; $b = 3^y$ $(a > 0;\ b > 0)$.

$$\begin{cases}3a-b=12,\\ ab=15;\end{cases}\quad \begin{cases}b=3a-12,\\ a(3a-12)=15;\end{cases}\quad \begin{cases}b=3a-12,\\ 3a^2-12a-15=0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}b=3a-12,\\ a^2-4a-5=0;\end{cases}\quad \begin{cases}b=3a-12,\\ a_1=-1<0,\quad a_2=5;\end{cases}\quad \begin{cases}a=5,\\ b=3.\end{cases}$$

$$\begin{cases}7^x=5,\\ 3^y=3;\end{cases}\quad \begin{cases}x=\log_7 5,\\ y=1.\end{cases}$$

Ответ: $\left(\log_7 5;\ 1\right)$.

6.16. Решите систему уравнений: $\begin{cases}7^{2x}+4^{2y+1}=85,\\ 7^x-4^y=5.\end{cases}$

Решение:

$$\begin{cases}7^{2x}+4^{2y+1}=85,\\ 7^x-4^y=5.\end{cases}\quad \begin{cases}7^x=4^y+5,\\ \left(4^y+5\right)^2+4\cdot 4^{2y}=85;\end{cases}$$

$$\begin{cases}7^x=4^y+5,\\ 5\cdot 4^{2y}+10\cdot 4^y-60=0;\end{cases}\quad \begin{cases}7^x=4^y+5,\\ 4^{2y}+2\cdot 4^y-12=0.\end{cases}$$

Во втором уравнении системы сделаем замену: $a=4^y$; $(a>0)$.

Получим квадратное уравнение:

$$a^2+2a-12=0$$

$$a_1=-1-\sqrt{13}<0;\quad a_2=\sqrt{13}-1$$

Сделаем обратную замену:

$$\begin{cases}4^y=\sqrt{13}-1,\\ 7^x=4^y+5;\end{cases}\quad \begin{cases}y=\log_4\left(\sqrt{13}-1\right),\\ 7^x=\sqrt{13}-1+5;\end{cases}\quad \begin{cases}x=\log_7\left(\sqrt{13}+4\right),\\ y=\log_4\left(\sqrt{13}-1\right).\end{cases}$$

Отве $\left(\log_7\left(\sqrt{13}+4\right);\ \log_4\left(\sqrt{13}-1\right)\right)$.

6.17. Решите систему уравнений: $\begin{cases}2^{\frac{x+y}{3}}+2^{\frac{x+y}{6}}=6,\\ x^2+5y^2=6xy.\end{cases}$.

Решение:

$$\begin{cases} 2^{2\cdot\frac{x+y}{6}}+2^{\frac{x+y}{6}}=6, \\ x^2+5y^2=6xy. \end{cases}$$

В первом уравнении системы сделаем замену: $a=2^{\frac{x+y}{6}}$; $(a>0)$.

Получим квадратное уравнение:

$a^2+a-6=0$

$a_1=-3<0$; $\quad a_2=2$

Сделаем обратную замену:

$$\begin{cases} 2^{\frac{x+y}{6}}=2, \\ x^2+5y^2=6xy; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{x+y}{6}=1, \\ x^2+5y^2=6xy; \end{cases} \quad \begin{cases} x=6-y, \\ (6-y)^2+5y^2=6y(6-y); \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=6-y, \\ y^2-4y+3=0; \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=1, \\ x=5; \end{cases} \\ \begin{cases} y=3, \\ x=3. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(3;\ 3)$, $(5;\ 1)$.

Системы логарифмических уравнений

Для решения систем логарифмических уравнений используются приемы решения систем алгебраических уравнений, основные логарифмические свойства и методы решения логарифмических уравнений.

Отметим некоторые способы решения систем логарифмических уравнений:

- метод потенцирования;
- метод введения новых переменных.

Метод потенцирования

Поясним суть данного метода на примерах.

6.18. Решите систему уравнений: $\begin{cases} 2x=3y-3, \\ \log_{\sqrt{2}}(x-3y+8)=2. \end{cases}$

Решение:

$$\begin{cases} 2x-3y=-3, \\ x-3y+8=\left(\sqrt{2}\right)^2; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x-3y=-3, \\ x-3y=-6; \end{cases} \quad \begin{cases} x=3, \\ y=3. \end{cases}$$

<u>*Проверка*</u>: $\begin{cases} 6=9-3, \\ \log_{\sqrt{2}}(11-9)=2; \end{cases} \quad \begin{cases} 6=6, \\ \log_{\sqrt{2}} 2=2. \end{cases}$ верно

Ответ: $(3;\ 3)$.

6.19. Решите систему уравнений: $\begin{cases} 2\log_5 x-\log_5 y=0, \\ x^2-3y=4. \end{cases}$

Решение:

ОДЗ: $x>0,\ \ y>0$.

$$\begin{cases} \log_5 x^2-\log_5 y=0, \\ x^2-3y=4; \end{cases} \quad \begin{cases} \log_5 \dfrac{x^2}{y}=0, \\ x^2-3y=4; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{y}=1, \\ x^2-3y=4; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2= \\ x^2= \end{cases}$$

$x\in\varnothing$.

Ответ: система не имеет решений.

6.20. Решите систему уравнений: $\begin{cases} \lg(x-y)=1, \\ \lg x-\lg y=2. \end{cases}$

Решение:

$$\begin{cases} \lg(x-y)=1, \\ \lg x=\lg 100+\lg y; \end{cases} \quad \begin{cases} \lg(x-y)=1, \\ \lg x=\lg(100y); \end{cases} \quad \begin{cases} x-y=10^1, \\ x=100y; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y=10, \\ x-100y=0; \end{cases} \quad \begin{cases} x-y=10, \\ 99y=10; \end{cases} \quad \begin{cases} x=\dfrac{1000}{99}, \\ y=\dfrac{10}{99}. \end{cases}$$

<u>*Проверка*</u>: $\begin{cases} \lg\left(\dfrac{1000}{99}-\dfrac{10}{99}\right)=1, \\ \lg\left(\dfrac{1000}{99}\right)-\lg\left(\dfrac{10}{99}\right)=2; \end{cases} \quad \begin{cases} \lg 10=1, \\ \lg 100=2. \end{cases}$ верно

Ответ: $\left(\dfrac{1000}{99};\ \dfrac{10}{99}\right)$.

6.21. Решите систему уравнений: $\begin{cases} \log_2(x+y)=3, \\ \log_{15} x = 1-\log_{15} y. \end{cases}$

Решение:

$$\begin{cases} \log_2(x+y)=3, \\ \log_{15} x+\log_{15} y=1; \end{cases} \quad \begin{cases} \log_2(x+y)=3, \\ \log_{15}(xy)=1; \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=8, \\ xy=15; \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=3, \\ y=5; \end{cases} \\ \begin{cases} x=5, \\ y=3. \end{cases} \end{array}\right.$$

<u>*Проверка*</u>:

1) $x=3$, $y=5$.

$$\begin{cases} \log_2 8=3, \\ \log_{15} 3=1-\log_{15} 5; \end{cases} \quad \begin{cases} \log_2 8=3, \\ \log_{15} 15=1. \end{cases}$$ верно

2) $x=5$, $y=3$.

$$\begin{cases} \log_2 8=3, \\ \log_{15} 5=1-\log_{15} 3; \end{cases} \quad \begin{cases} \log_2 8=3, \\ \log_{15} 15=1. \end{cases}$$ верно

Ответ: $(3;\ 5)$, $(5;\ 3)$.

6.22. Решите систему уравнений: $\begin{cases} \lg(x^2+y^2)=1+\lg 8, \\ \lg(x+y)-\lg(x-y)=\lg 3. \end{cases}$

Решение:

$$\begin{cases} \lg(x^2+y^2)=\lg 80, \\ \lg\dfrac{x+y}{x-y}=\lg 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+y^2=80, \\ \dfrac{x+y}{x-y}=3; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+y^2=80, \\ x=2y; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4y^2+y^2=80, \\ x=2y; \end{cases} \quad \begin{cases} y^2=16, \\ x=2y; \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=4, \\ x=8; \end{cases} \\ \begin{cases} y=-4, \\ x=-8. \end{cases} \end{array}\right.$$

<u>*Проверка*</u>:

1) $x=8$, $y=4$.

$$\begin{cases} \lg(64+16)=1+\lg 8, \\ \lg 12-\lg 4=\lg 3; \end{cases} \quad \begin{cases} \lg 80=\lg 80, \\ \lg 3=\lg 3. \end{cases}$$ верно

2) $x=-8$, $y=-4$

$$\begin{cases}\lg(64+16)=1+\lg 8,\\ \lg(-12)-\lg(-4)=\lg 3.\end{cases}$$

$\lg(-12)$ и $\lg(-4)$ не существуют.

Ответ: $(8;\ 4)$.

6.23. Решите систему уравнений: $\begin{cases}10^{1+\lg(x+y)}=50,\\ \lg(x-y)+\lg(x+y)=2-\lg 5.\end{cases}$

Решение:

ОДЗ: $\begin{cases}x+y>0,\\ x-y>0.\end{cases}$

$$\begin{cases}10\cdot 10^{\lg(x+y)}=50,\\ \lg\left(x^2-y^2\right)=\lg\dfrac{100}{5};\end{cases}\quad \begin{cases}x+y=5,\\ x^2-y^2=20;\end{cases}\quad \begin{cases}x+y=5,\\ x-y=4;\end{cases}\quad \begin{cases}x=4,5,\\ y=0,5.\end{cases}$$

Найденные значения x и y удовлетворяют ОДЗ.

Ответ: $(4,5;\ 0,5)$.

6.24. Решите систему уравнений: $\begin{cases}\log_{\sqrt{x}}(xy)=8,\\ \log_3\left(\log_{\frac{1}{9}}\dfrac{x}{y}\right)=0.\end{cases}$

Решение:

ОДЗ: $x>0$, $y>0$, $x\neq 1$, $\log_{\frac{1}{9}}\dfrac{x}{y}>0$.

По определению логарифма:

$$\begin{cases}xy=\left(\sqrt{x}\right)^8,\\ \log_{\frac{1}{9}}\dfrac{x}{y}=1;\end{cases}\quad \begin{cases}xy=x^4,\\ \dfrac{x}{y}=\dfrac{1}{9};\end{cases}\quad \begin{cases}y=x^3,\\ y=9x;\end{cases}\quad \begin{cases}x^2=9,\\ y=9x;\end{cases}\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=3,\\ y=27;\end{cases}\\ \begin{cases}x=-3,\\ y=-27.\end{cases}\end{array}\right.$$

Пара чисел $(-3;\ -27)$ не входит в ОДЗ.

Ответ: $(3;\ 27)$.

6.25. Решите систему уравнений: $\begin{cases} \lg^2 x - \lg^2 y = 1, \\ \log_2 x - \log_2 y = 1 + \log_2 5. \end{cases}$

Решение:

ОДЗ: $x > 0$, $y > 0$.

$\begin{cases} (\lg x - \lg y)(\lg x + \lg y) = 1, \\ \log_2 \dfrac{x}{y} = \log_2 (2 \cdot 5); \end{cases}$ $\begin{cases} \lg \dfrac{x}{y} \cdot \lg xy = 1, \\ \log_2 \dfrac{x}{y} = \log_2 10; \end{cases}$ $\begin{cases} \lg \dfrac{x}{y} \cdot \lg xy = 1, \\ \dfrac{x}{y} = 10; \end{cases}$

$\begin{cases} \lg 10 \cdot \lg 10y^2 = 1, \\ x = 10y; \end{cases}$ $\begin{cases} \lg 10 + \lg y^2 = 1, \\ x = 10y; \end{cases}$ $\begin{cases} 1 + 2\lg y = 1, \\ x = 10y; \end{cases}$ $\begin{cases} \lg y = 0, \\ x = 10y; \end{cases}$

$\begin{cases} y = 1, \\ x = 10. \end{cases}$

Найденные значения x и y удовлетворяют ОДЗ.

Ответ: $(10;\ 1)$.

Метод введения новых переменных

6.26. Решите систему уравнений: $\begin{cases} 2\lg x + \lg y = 2, \\ \lg x - 2\lg y = 1. \end{cases}$

Решение:

ОДЗ: $x > 0$, $y > 0$.

Замена: $a = \lg x$, $b = \lg y$.

$\begin{cases} 2a + b = 2, & | \cdot 2 \\ a - 2b = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} 4a + 2b = 4, \\ a - 2b = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} 5a = 5, \\ a - 2b = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} a = 1, \\ b = 0. \end{cases}$

$\begin{cases} \lg x = 1, \\ \lg y = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 10, \\ y = 1. \end{cases}$

Найденные значения x и y удовлетворяют ОДЗ.

Ответ: $(10;\ 1)$.

6.27. Решите систему уравнений: $\begin{cases} \log_y x - \log_x y = \frac{8}{3}, \\ xy = 16. \end{cases}$

Решение:

ОДЗ: $x > 0$, $y > 0$, $x \neq 1$, $y \neq 1$.

$$\begin{cases} \log_y x - \frac{1}{\log_y x} = \frac{8}{3}, \\ xy = 16. \end{cases}$$

В первом уравнении системы сделаем замену: $a = \log_y x$.

Получим уравнение:

$$a - \frac{1}{a} = \frac{8}{3}$$

$$3a^2 - 8a - 3 = 0$$

$$a_1 = -\frac{1}{3}; \quad a_2 = 3.$$

Сделаем обратную замену:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log_y x = -\frac{1}{3}, \\ xy = 16; \end{cases} \\ \begin{cases} \log_y x = 3, \\ xy = 16; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y^{-\frac{1}{3}} = x, \\ xy = 16; \end{cases} \\ \begin{cases} y^3 = x, \\ xy = 16; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = \frac{1}{x^3}, \\ \frac{1}{x^2} = 16, \end{cases} \\ \begin{cases} x = y^3, \\ y^4 = 16; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \frac{1}{4}, \\ y = 64; \end{cases} \\ \begin{cases} x = 8, \\ y = 2. \end{cases} \end{array}\right.$$

Найденные значения x и y удовлетворяют ОДЗ.

Ответ: $\left(\frac{1}{4}; 64\right)$, $(8; 2)$.

6.28. Решите систему уравнений: $\begin{cases} \log_x y + \log_y x = 2, \\ x^2 + y = 12. \end{cases}$

Решение:

ОДЗ: $x > 0$, $y > 0$, $x \neq 1$, $y \neq 1$.

$$\begin{cases} \log_x y + \frac{1}{\log_x y} = 2, \\ x^2 + y = 12. \end{cases}$$

В первом уравнении системы сделаем замену: $a = \log_x y$.

Получим уравнение:

$$a + \frac{1}{a} = 2$$

$$a^2 - 2a + 1 = 0$$

$$a = 1$$

Сделаем обратную замену:

$$\begin{cases} \log_x y = 1, \\ x^2 + y = 12; \end{cases} \quad \begin{cases} y = x, \\ x^2 + y = 12; \end{cases} \quad \begin{cases} y = x, \\ x^2 + x = 12; \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 3, \\ y = 3; \end{cases} \\ \begin{cases} x = -4, \\ y = -4. \end{cases} \end{array} \right.$$

Пара $(-4; -4)$ не входит в ОДЗ.

Ответ: $(3; 3)$.

6.29. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^{y-2} = 4, \\ x^{2y-3} = 64. \end{cases}$

Решение:

Логарифмируем уравнения по основанию 4:

$$\begin{cases} \log_4 x^{y-2} = \log_4 4, \\ \log_4 x^{2y-3} = \log_4 64; \end{cases} \quad \begin{cases} (y-2)\log_4 x = 1, \\ (2y-3)\log_4 x = 3. \end{cases}$$

Замена: $a = \log_4 x$.

$$\begin{cases} a(y-2) = 1, \\ a(2y-3) = 3. \end{cases}$$

Первое уравнение разделим на второе:

$$\begin{cases} \frac{y-2}{2y-3} = \frac{1}{3}, \\ a(y-2) = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 3y - 6 = 2y - 3, \\ a(y-2) = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3, \\ a = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3, \\ \log_4 x = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3, \\ x = 4. \end{cases}$$

Ответ: $(4; 3)$.

6.30. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^{y}=\dfrac{1}{\sqrt{1000}}, \\ \dfrac{1}{y}\cdot\lg x=-6. \end{cases}$

Решение:

$$\begin{cases} x^{y}=10^{-\frac{3}{2}}, \\ \dfrac{1}{y}\cdot\lg x=-6. \end{cases}$$

Логарифмируем первое уравнение по основанию 10:

$$\begin{cases} y\cdot\lg x=-\dfrac{3}{2}, \\ \dfrac{\lg x}{y}=-6. \end{cases}$$

Замена: $a=\lg x$.

$$\begin{cases} y\cdot a=-\dfrac{3}{2}, \\ \dfrac{a}{y}=-6; \end{cases} \quad \begin{cases} y^{2}=\dfrac{1}{4}, \\ a=-6y; \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=\dfrac{1}{2}, \\ a=-3; \end{cases} \\ \begin{cases} y=-\dfrac{1}{2}, \\ a=3; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=\dfrac{1}{2}, \\ \lg x=-3; \end{cases} \\ \begin{cases} y=-\dfrac{1}{2}, \\ \lg x=3; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0{,}001, \\ y=\dfrac{1}{2}; \end{cases} \\ \begin{cases} x=1000, \\ y=-\dfrac{1}{2}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(0{,}001;\ \dfrac{1}{2}\right)$, $\left(1000;\ -\dfrac{1}{2}\right)$.

6.31. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^{\lg y}=2, \\ xy=20. \end{cases}$

Решение:

ОДЗ: $y>0$.

Логарифмируем уравнения по основанию 10:

$$\begin{cases} \lg x^{\lg y}=\lg 2, \\ \lg xy=\lg 20; \end{cases} \quad \begin{cases} \lg y\cdot\lg x=\lg 2, \\ \lg x+\lg y=1+\lg 2. \end{cases}$$

Замена: $a=\lg x$, $b=\lg y$.

$$\begin{cases} ab = \lg 2, \\ a + b = 1 + \lg 2; \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 1, \\ b = \lg 2; \end{cases} \\ \begin{cases} a = \lg 2, \\ b = 1; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \lg x = 1, \\ \lg y = \lg 2; \end{cases} \\ \begin{cases} \lg x = \lg 2, \\ \lg y = 1; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 10, \\ y = 2; \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2, \\ y = 10. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(2;\ 10)$, $(10;\ 2)$.

Системы показательных и логарифмических уравнений

6.32. Решите систему уравнений: $\begin{cases} 3^y \cdot 9^x = 81, \\ \lg(x+y)^2 - \lg x = 2\lg 3. \end{cases}$

Решение:

ОДЗ: $x > 0$, $x + y \neq 0$.

$$\begin{cases} 3^y \cdot 3^{2x} = 3^4, \\ \lg\dfrac{(x+y)^2}{x} = \lg 9; \end{cases} \quad \begin{cases} 3^{y+2x} = 3^4, \\ \lg\dfrac{(x+y)^2}{x} = \lg 9; \end{cases} \quad \begin{cases} y + 2x = 4, \\ \dfrac{(x+y)^2}{x} = 9; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 4 - 2x, \\ (x + 4 - 2x)^2 = 9x; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 4 - 2x, \\ x^2 - 17x + 16 = 0; \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 16, \\ y = -28; \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1, \\ y = 2. \end{cases} \end{array}\right.$$

Найденные значения x и y удовлетворяют ОДЗ.

Ответ: $(1;\ 2)$, $(16;\ -28)$.

6.33. Решите систему уравнений: $\begin{cases} 3^{2\sqrt{x}-\sqrt{y}} = 81, \\ \lg\sqrt{xy} = 1 + \lg 3. \end{cases}$

Решение:

ОДЗ: $x > 0$, $y > 0$.

$$\begin{cases} 3^{2\sqrt{x}-\sqrt{y}} = 3^4, \\ \lg\sqrt{xy} = \lg 30; \end{cases} \quad \begin{cases} 2\sqrt{x} - \sqrt{y} = 4, \\ \sqrt{xy} = 30; \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{y} = 2\sqrt{x} - 4, \\ \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = 30; \end{cases}$$

$$\begin{cases}\sqrt{y}=2\sqrt{x}-4,\\ \sqrt{x}\left(2\sqrt{x}-4\right)=30;\end{cases}\quad \begin{cases}\sqrt{y}=2\sqrt{x}-4,\\ 2x-4\sqrt{x}-30=0;\end{cases}\quad \begin{cases}\sqrt{y}=2\sqrt{x}-4,\\ x-2\sqrt{x}-15=0.\end{cases}$$

Во втором уравнении системы сделаем замену: $\sqrt{x}=a \quad (a>0)$.
Получим квадратное уравнение:

$a^2-2a-15=0$

$a_1=-3<0,\ a_2=5$

$$\begin{cases}\sqrt{x}=5,\\ \sqrt{y}=2\cdot5-4;\end{cases}\quad \begin{cases}\sqrt{x}=5,\\ \sqrt{y}=6;\end{cases}\quad \begin{cases}x=25,\\ y=36.\end{cases}$$

Ответ: $(25;\ 36)$.

6.34. Решите систему уравнений: $\begin{cases}\log_{\sqrt{2}}(x+y)=4,\\ 3^{6-x}\cdot2^{y}=54.\end{cases}$

Решение:

ОДЗ: $x+y>0$.

$$\begin{cases}\log_2(x+y)=2,\\ 3^{6-x}\cdot2^{y}=54;\end{cases}\quad \begin{cases}x+y=4,\\ 3^{6-x}\cdot2^{y}=54;\end{cases}\quad \begin{cases}y=4-x,\\ 3^2\cdot3^{4-x}\cdot2^{4-x}=54;\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=4-x,\\ 6^{4-x}=6;\end{cases}\quad \begin{cases}y=4-x,\\ 4-x=1;\end{cases}\quad \begin{cases}x=3,\\ y=1.\end{cases}$$

Ответ: $(3;\ 1)$.

6.35. Решите систему уравнений: $\begin{cases}2^{\frac{x-y}{2}}-2^{\frac{x-y}{4}}=12,\\ 3^{\lg(2y-x)}=1.\end{cases}$.

Решение:

ОДЗ: $2y-x>0$.

Рассмотрим первое уравнение системы: $2^{2\cdot\frac{x-y}{4}}-2^{\frac{x-y}{4}}=12$.

Введем замену $a=2^{\frac{x-y}{4}}$ $(a>0)$, и решим квадратное уравнение:

$a^2-a=12$

$a^2-a-12=0$

$a_1=-3<0$; $a_2=4$

$\begin{cases}2^{\frac{x-y}{4}}=4,\\ 3^{\lg(2y-x)}=1;\end{cases}$ $\begin{cases}2^{\frac{x-y}{4}}=2^2,\\ 3^{\lg(2y-x)}=3^0;\end{cases}$ $\begin{cases}\frac{x-y}{4}=2,\\ \lg(2y-x)=0;\end{cases}$

$\begin{cases}x-y=8,\\ 2y-x=10^0;\end{cases}$ $\begin{cases}x-y=8,\\ 2y-x=1;\end{cases}$ $\begin{cases}x=17,\\ y=9.\end{cases}$

Ответ: $(17;\ 9)$.

6.36. Решите систему уравнений: $\begin{cases}\log_3 x-2^y+y=3,\\ y\cdot 2^y+2^y\cdot\log_3 x=4.\end{cases}$

Решение:

ОДЗ: $x>0$.

Из первого уравнения системы получаем: $\log_3 x=3-y+2^y$.

Подставив данное выражение во второе уравнение, получим квадратное уравнение относительно 2^y:

$y\cdot 2^y+2^y\cdot\left(3-y+2^y\right)=4$

$y\cdot 2^y+3\cdot 2^y-y\cdot 2^y+2^{2y}-4=0$

$2^{2y}+3\cdot 2^y-4=0$

Замена: $2^y=t$ $(t>0)$.

$t^2+3t-4=0$

$t_1=-4<0$, $t_2=1$

$\begin{cases}2^y=1,\\ \log_3 x=3-y+2^y;\end{cases}$ $\begin{cases}y=0,\\ \log_3 x=4;\end{cases}$ $\begin{cases}x=81,\\ y=0.\end{cases}$

Ответ: $(81;\ 0)$.

6.37. Решите систему уравнений: $\begin{cases}3^{\log_3 y}-\log_3 x=1,\\ x^y=3^{12}.\end{cases}$

Решение:

ОДЗ: $x>0$, $y>0$.

$$\begin{cases} y-\log_3 x=1, \\ x^y=3^{12}; \end{cases} \qquad \begin{cases} y=1+\log_3 x, \\ x^{1+\log_3 x}=3^{12}. \end{cases}$$

Логарифмируем второе уравнение по основанию 3:

$$\log_3 x^{1+\log_3 x}=\log_3 3^{12}$$

$$(1+\log_3 x)\log_3 x=12$$

Сделаем замену: $\log_3 x=a$, получим квадратное уравнение:

$$(1+a)a=12$$

$$a^2+a-12=0$$

$$a_1=-4,\ \ a_2=3$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log_3 x=-4, \\ y=1+\log_3 x; \end{cases} \\ \begin{cases} \log_3 x=3, \\ y=1+\log_3 x; \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=3^{-4}, \\ y=-3; \end{cases} \\ \begin{cases} x=27, \\ y=4. \end{cases} \end{array}\right.$$

Пара чисел $(3^{-4};-3)$ не входит в ОДЗ.

Ответ: $(27;\ 4)$.

6.38. Решите систему уравнений: $\begin{cases} 2x+3^y=10, \\ y=\log_3 18x. \end{cases}$

Решение:

ОДЗ: $x>0$.

$$\begin{cases} 2x+3^{\log_3 18x}=10, \\ y=\log_3 18x; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x+18x=10, \\ y=\log_3 18x; \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\frac{1}{2}, \\ y=\log_3 9; \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\frac{1}{2}, \\ y=2. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{1}{2};\ 2\right)$.

ГЛАВА IV. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ, СВЯЗАННЫХ С ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯМИ

§1. ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Определение. Числовая последовательность - это последовательность чисел a_1, a_2, a_3, ... a_n, a_{n+1}, ..., за каждым из которых закреплен определенный порядковый номер, то есть каждому натуральному числу n $(1, 2, 3, \ldots)$ поставлено в соответствие число a_n.

Числовую последовательность можно задавать с помощью простого перечисления ее членов, а так же с помощью формулы общего члена последовательности.

Чаще всего общий член последовательности задают аналитически, то есть формулой. В этом случае легко определить любой член последовательности.

1.1. Напишите первые пять членов последовательности, общий член которой выражается формулой $a_n = n^2 \cdot 2^n$.

Решение:

$a_1 = 1 \cdot 2 = 2$

$a_2 = 2^2 \cdot 2^2 = 16$

$a_3 = 3^2 \cdot 2^3 = 9 \cdot 8 = 72$

$a_4 = 4^2 \cdot 2^4 = 16 \cdot 16 = 256$

$a_5 = 5^2 \cdot 2^5 = 25 \cdot 32 = 800$.

Ответ: 2; 16; 72; 256; 800.

1.2. Вычислите сумму восьмого и девятого членов последовательность с общим членом $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} - \frac{n}{3}}$.

Решение:

$$a_8+a_9=\frac{1}{\sqrt{9}-\frac{8}{3}}+\frac{1}{\sqrt{10}-\frac{9}{3}}=\frac{1}{3-2\frac{2}{3}}+\frac{1}{\sqrt{10}-3}=3+\frac{\sqrt{10}+3}{1}=6+\sqrt{10}.$$

Ответ: $6+\sqrt{10}$.

1.3. Последовательность (a_n) задана формулой общего члена $a_n=\frac{3n+1}{5n+2}$. Найдите следующее выражение: $(a_{n+1}-a_{n-1})$.

Решение:

$$a_{n+1}-a_{n-1}=\frac{3(n+1)+1}{5(n+1)+2}-\frac{3(n-1)+1}{5(n-1)+2}=\frac{3n+4}{5n+7}-\frac{3n-2}{5n-3}=$$

$$=\frac{15n^2+20n-9n-12-15n^2-21n+10n+14}{(5n+7)(5n-3)}=\frac{2}{(5n+7)(5n-3)}.$$

Ответ: $\frac{2}{(5n+7)(5n-3)}$.

1.4. Составьте формулу общего члена последовательности:

$1;\ \frac{2}{3};\ \frac{3}{5};\ \frac{4}{7};\ \frac{5}{9};\ \ldots$

Решение:

Перепишем последовательность:

$\frac{1}{1};\ \frac{2}{3};\ \frac{3}{5};\ \frac{4}{7};\ \frac{5}{9};\ \ldots$

В числителе последовательности натуральный ряд чисел (1; 2; 3; 4; …), а в знаменателе нечетные числа (1; 3; 5; 7; …).

Тогда общий член можно записать в виде: $a_n=\frac{n}{2n-1}$.

Ответ: $a_n=\frac{n}{2n-1}$.

Нередко последовательность задают правилом, позволяющим вычислить последующий член, зная предыдущие. При вычислении членов последовательности по такому правилу мы вынуждены все время возвращаться назад к предыдущим членам. Поэтому такой способ задания называется ***рекуррентным***.

1.5. Напишите первые пять членов последовательности (a_n), заданной формулой: $a_1 = 5$; $a_{n+1} = (-1)^n \cdot a_n - 8$.

Решение:

$a_1 = 5$

$a_2 = (-1)^1 \cdot a_1 - 8 = -5 - 8 = -13$

$a_3 = (-1)^2 \cdot a_2 - 8 = -13 - 8 = -21$

$a_4 = (-1)^3 \cdot a_3 - 8 = 21 - 8 = 13$

$a_5 = (-1)^4 \cdot a_4 - 8 = 13 - 8 = 5$.

Ответ: 5; −13; −21; 13; 5.

1.6. Найдите пятый член последовательности, определяемой соотношениями: $a_1 = 2$; $a_{n+1} = a_n + 3$.

Решение:

$a_1 = 2$

$a_2 = a_1 + 3 = 2 + 3 = 5$

$a_3 = a_2 + 3 = 5 + 3 = 8$

$a_4 = a_3 + 3 = 8 + 3 = 11$

$a_5 = a_4 + 3 = 11 + 3 = 14$.

Ответ: 14.

1.7. Запишите первые шесть членов последовательности (a_n), у которой $a_1 = -3$, $a_2 = -2$ и каждый член, начиная с третьего, равен удвоенной сумме двух предыдущих членов.

Решение:

Формула общего члена: $a_{n+2}=2(a_n+a_{n+1})$.

$a_3=2(a_1+a_2)=2\cdot(-3-2)=-10$

$a_4=2(a_2+a_3)=2\cdot(-2-10)=-24$

$a_5=2(a_3+a_4)=2\cdot(-10-24)=-68$

$a_6=2(a_4+a_5)=2\cdot(-24-68)=-184$.

Ответ: -3; -2; -10; -24; -68; -184.

1.8. Напишите, с какого номера все члены последовательности $a_n=3^{n-1}$ будут больше числа 27?

Решение:

$3^{n-1}>27$.

$n-1>3$

$n>4$.

Ответ: начиная с пятого номера.

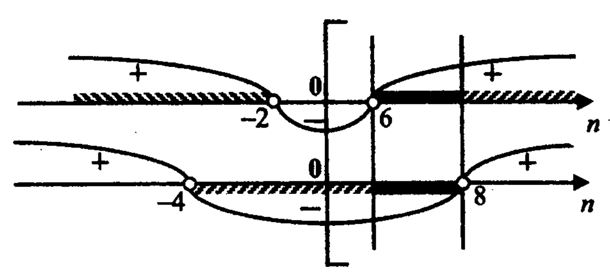
1.9. Найдите все члены последовательности (a_n), где $a_n=0,25n^2-n$, заключенные между числами 3 и 8.

Решение:

$3<a_n<8$.

$3<0,25n^2-n<8$

$$\begin{cases}0,25n^2-n>3, & |\cdot 4\\ 0,25n^2-n<8, & |\cdot 4\\ n\in\mathbb{N};\end{cases}\qquad \begin{cases}n^2-4n-12>0,\\ n^2-4n-32<0,\\ n\in\mathbb{N};\end{cases}\qquad \begin{cases}(n-6)(n+2)>0,\\ (n-8)(n+4)<0,\\ n\in\mathbb{N}.\end{cases}$$



$n \in (6; 8)$, значит, $n = 7$.

$a_7 = \frac{1}{4} \cdot 49 - 7 = 7\left(\frac{7}{4} - 1\right) = \frac{21}{4} = 5{,}25$.

Ответ: $a_7 = 5{,}25$.

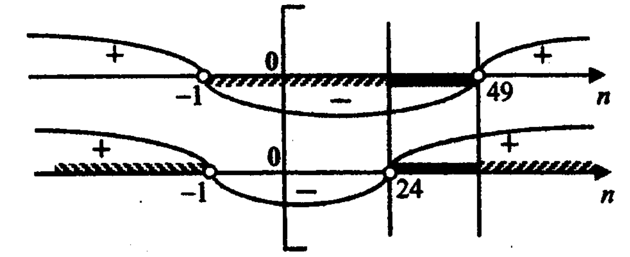
1.10. Последовательность задана формулой $a_n = \frac{2}{n+1}$. Определите число ее членов, принадлежащих промежутку $(0{,}04;\ 0{,}08)$

Решение:

$a_n \in (0{,}04;\ 0{,}08)$

$0{,}04 < a_n < 0{,}08$

$$\begin{cases} \frac{2}{n+1} > 0{,}04, & \big| \cdot 25 \\ \frac{2}{n+1} < 0{,}08, & \big| \cdot 25 \\ n \in \mathbb{N}; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{50}{n+1} > 1, \\ \frac{50}{n+1} < 2, \\ n \in \mathbb{N}; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{n-49}{n+1} < 0, \\ \frac{2n-48}{n+1} > 0, \\ n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$



$n \in (24; 49)$, значит, $n = 25;\ 26;\ 27;\ 28;\ \ldots\ 47;\ 48$.

Вычислим число членов последовательности 25; 26; 27; ... 48 по формуле $a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$.

$48 = 25 + (n-1)\cdot 1$

$n = 24$.

Ответ: 24.

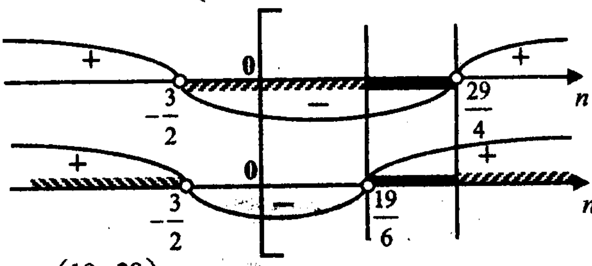
1.11. Вычислите номера членов последовательности $a_n = \dfrac{7}{2n+3}$, принадлежащие интервалу $\left(\dfrac{2}{5}; \dfrac{3}{4}\right)$.

Решение:

$a_n \in \left(\dfrac{2}{5}; \dfrac{3}{4}\right)$

$\dfrac{2}{5} < \dfrac{7}{2n+3} < \dfrac{3}{4}$

$\begin{cases} \dfrac{7}{2n+3} > \dfrac{2}{5}, \\ \dfrac{7}{2n+3} < \dfrac{3}{4}, \\ n \in \mathbb{N}; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{4n-29}{5(2n+3)} < 0, \\ \dfrac{6n-19}{4(2n+3)} > 0, \\ n \in \mathbb{N}. \end{cases}$



$n \in \left(\dfrac{19}{6}; \dfrac{29}{4}\right)$

$n \in \left(3\dfrac{1}{6}; 7\dfrac{1}{4}\right)$, значит, $n = 4;\ 5;\ 6;\ 7$.

Ответ: 4; 5; 6; 7.

1.12. Вычислите наибольший член последовательности, заданной формулой $a_n = 10 + 18n - 2n^2$.

Решение:

Рассмотрим функцию $f(x) = 10 + 18x - 2x^2$. Графиком данной функции является парабола, ветви которой направлены вниз, следовательно, максимум функции достигается в вершине:

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{-18}{-4} = 4,5.$$

Ближайшими целыми значениями к 4,5 являются $n = 4$ и $n = 5$.

$$a_4 = 10 + 72 - 32 = 50$$

$$a_5 = 10 + 90 - 50 = 50$$

Наибольший член последовательности равен 50.

Ответ: 50.

1.13. Вычислите наименьший член последовательности, заданной формулой $a_n = 10 - 32n + 3n^2$.

Решение:

Рассмотрим функцию $f(x) = 10 - 32x + 3x^2$. Графиком данной функции является парабола, ветви которой направлены вверх, следовательно, минимум функции достигается в вершине:

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{32}{6} = 5\frac{1}{3}.$$

Ближайшими целыми значениями к $5\frac{1}{3}$ являются $n = 5$ и $n = 6$.

$$a_5 = 10 - 160 + 75 = -75$$

$$a_6 = 10 - 192 + 108 = -74$$

Наименьший член последовательности равен (-75).

Ответ: -75.

1.14. Последовательность (a_n) задана формулой $a_n = 2n^2 - 11n + 442$. **Является ли число 463 членом данной последовательности? Если является, то укажите номер этого члена.**

***Решение*:**

Решим уравнение: $2n^2 - 11n + 442 = 463$.

$$2n^2 - 11n - 21 = 0$$

$$D = 121 + 168 = 289 = 17^2$$

$$n_{1,2} = \frac{11 \pm 17}{4}$$

$$n_1 = 7, \quad n_2 = -1{,}5 \notin \mathbb{N}.$$

Получаем, что при $n = 7$ $a_7 = 463$.

Ответ: является, $n = 7$.

1.15. При каких натуральных значениях x последовательность с общим членом $a_n = \dfrac{2n+9}{n+x}$ является убывающей?

***Решение*:**

Для убывающей последовательности при любом n должно быть выполнено соотношение:

$$a_{n+1} - a_n < 0.$$

$$\frac{2(n+1)+9}{n+1+x} - \frac{2n+9}{n+x} < 0$$

$$\frac{2n+11}{n+1+x} - \frac{2n+9}{n+x} < 0$$

$$\frac{2x-9}{(n+1+x)(n+x)} < 0$$

Так как $x \in \mathbb{N}$, $(n+1+x) > 0$ и $(n+x) > 0$, следовательно, отрицательным является числитель выражения, то есть должны быть выполнены условия:

$$\begin{cases} 2x-9<0, \\ x\in\mathbb{N}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x\in(0;4{,}5), \\ x\in\mathbb{N}. \end{cases}$$

Тогда $x=1;\ 2;\ 3;\ 4.$

Ответ: 1; 2; 3; 4.

1.16. При каких значениях x последовательность $a_n=\dfrac{x\cdot n+1}{n+2}$

ляется возрастающей?

Решение:

Для возрастающей последовательности имеет место неравенство $a_{n+1}-a_n>0$ при любом значении n.

$$\frac{x(n+1)+1}{n+1+2}-\frac{x\cdot n+1}{n+2}>0$$

$$\frac{xn+x+1}{n+3}-\frac{xn+1}{n+2}>0$$

$$\frac{2x-1}{(n+3)(n+2)}>0$$

Так как $(n+3)>0$ и $(n+2)>0$, получаем:

$2x-1>0$ или $x>\dfrac{1}{2}$.

Ответ: $x\in\left(\dfrac{1}{2};\infty\right)$.

Основные сведения и формулы по прогрессии

	Арифметическая прогрессия	**Геометрическая прогрессия**
Допустимые значения	a_1 и d – любые числа	$b_1 \neq 0, \quad q \neq 0$
Формула общего члена	$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$	$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$
Характеристическое свойство	$a_k = \dfrac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}$	$b_k^2 = b_{k-1} \cdot b_{k+1}$
Формула суммы n первых членов	$S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \dfrac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$	Если $q \neq 1$, $S_n = \dfrac{b_n q - b_1}{q-1} = \dfrac{b_1(q^n - 1)}{q-1}$ Если $q = 1$, $S_n = n \cdot b_1$

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия:

$$S = \frac{b_1}{1-q}, \quad |q| < 1$$

§2. АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

Решение задач с использованием формулы n-го члена арифметической прогрессии

Стандартным методом при решении задач, связанных с арифметической прогрессией, является запись условий задачи в виде системы уравнений, в которой неизвестны, как правило, первый член прогрессии и ее разность, а иногда и количество членов прогрессии. При этом удобнее в начале записать уравнения через a_k, а затем переписать эти уравнения через a_1 и d. Если полученную систему удается решить, то прогрессия считается полностью заданной.

Рассмотрим ряд примеров.

2.1. Сумма второго, третьего и четвертого членов арифметической прогрессии равна 12, а сумма третьего, четвертого и пятого равна 21. Найдите первый член и разность этой прогрессии.

Решение:

По условию составим систему уравнений: $\begin{cases} a_2+a_3+a_4=12, \\ a_3+a_4+a_5=21. \end{cases}$

По формуле n-го члена арифметической прогрессии $a_n=a_1+(n-1)\cdot d$ выразим каждое слагаемое через a_1 и d, и подставим в систему:

$$\begin{cases} (a_1+d)+(a_1+2d)+(a_1+3d)=12, \\ (a_1+2d)+(a_1+3d)+(a_1+4d)=21; \end{cases} \qquad \begin{cases} 3a_1+6d=12, \\ 3a_1+9d=21; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1+2d=4, \\ a_1+3d=7. \end{cases}$$

Последняя система решается вычитанием: $d=3$, $a_1=-2$.

Ответ: $a_1=-2$, $d=3$.

2.2. Сумма семнадцатого и двадцатого членов арифметической прогрессии равна 35, а произведение шестнадцатого и двадцать первого членов равно 150. Найдите первый член прогрессии.

Решение:

$$\begin{cases} a_{17}+a_{20}=35, \\ a_{16}\cdot a_{21}=150; \end{cases} \quad \begin{cases} (a_1+16d)+(a_1+19d)=35, \\ (a_1+15d)(a_1+20d)=150. \end{cases}$$

В первом уравнении системы перенесем неизвестное d из одной скобки в другую:

$$\begin{cases} (a_1+15d)+(a_1+20d)=35, \\ (a_1+15d)(a_1+20d)=150. \end{cases}$$

Введем замену: $x=a_1+15d$, $y=a_1+20d$, получим систему:

$$\begin{cases} x+y=35, \\ xy=150; \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=5, \\ y=30; \end{cases} \\ \begin{cases} x=30, \\ y=5; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a_1+15d=5, \\ a_1+20d=30; \end{cases} \\ \begin{cases} a_1+15d=30, \\ a_1+20d=5; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a_1=5-15d, \\ 5d=25; \end{cases} \\ \begin{cases} a_1=30-15d, \\ 5d=-25; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a_1=-70, \\ d=5; \end{cases} \\ \begin{cases} a_1=105, \\ d=-5. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $a_1=-70$ или $a_1=105$.

2.3. Найдите три первых члена a_1, a_2, a_3 арифметической прогрессии, если известно, что $a_1+a_3+a_5=-12$ и $a_1\cdot a_3\cdot a_5=80$.

Решение:

Из условия следует:

$$\begin{cases} a_1+a_3+a_5=-12, \\ a_1\cdot a_3\cdot a_5=80; \end{cases} \quad \begin{cases} a_1+(a_1+2d)+(a_1+4d)=-12, \\ a_1\cdot(a_1+2d)\cdot(a_1+4d)=80; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a_1+6d=-12, \\ a_1\cdot(a_1+2d)\cdot(a_1+4d)=80; \end{cases} \quad \begin{cases} a_1+2d=-4, \\ a_1\cdot\underbrace{(a_1+2d)}_{=-4}\cdot(a_1+4d)=80; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = -4-2d, \\ a_1 \cdot (a_1+4d) = -20; \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 = -4-2d, \\ (-4-2d)(-4+2d) = -20; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = -4-2d, \\ (d+2)(d-2) = 5; \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 = -4-2d, \\ d^2 = 9; \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a_1 = -10, \\ d = 3; \end{cases} \\ \begin{cases} a_1 = 2, \\ d = -3. \end{cases} \end{array} \right.$$

В первом случае имеем:

$a_1 = -10$, $a_2 = -7$, $a_3 = -4$.

Во втором случае:

$a_1 = 2$, $a_2 = -1$, $a_3 = -4$.

Ответ: -10; -7; -4 или 2; -1; -4.

2.4. Найдите натуральные числа, образующие арифметическую прогрессию, если произведение трех и четырех первых ее членов равны соответственно 6 и 24.

Решение:

$$\begin{cases} a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 6, \\ a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 = 24. \end{cases}$$

Разделив второе уравнение системы на первое, получим:

$a_4 = 4$; $a_1 + 3d = 4$ или $a_1 = 4 - 3d$.

Так как a_1, a_2, a_3, a_4 – натуральные числа, то единственный возможный вариант решения: $d = 1$ и $a_1 = 1$.

Ответ: 1; 2; 3; 4; ...

2.5. Сумма трех чисел, образующих арифметическую прогрессию, равна 2, а сумма квадратов этих же чисел равна $\frac{14}{9}$. Найдите эти числа.

Решение:

Из условий следует:

$$\begin{cases} a_1+a_2+a_3=2, \\ a_1^2+a_2^2+a_3^2=\dfrac{14}{9}; \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1+\left(a_1+d\right)+\left(a_1-2d\right)=2, \\ a_1^2+\left(a_1+d\right)^2+\left(a_1+2d\right)^2=\dfrac{14}{9}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a_1+3d=2, \\ a_1^2+\underbrace{\left(a_1+d\right)^2}_{=\frac{2}{3}}+\left(a_1+d+d\right)^2=\dfrac{14}{9}; \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1+d=\dfrac{2}{3}, \\ a_1^2+\dfrac{4}{9}+\left(\dfrac{2}{3}+d\right)^2=\dfrac{14}{9}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} d=\dfrac{2}{3}-a_1, \\ a_1^2+\dfrac{4}{9}+\left(\dfrac{4}{3}-a_1\right)^2=\dfrac{14}{9}; \end{cases} \qquad \begin{cases} d=\dfrac{2}{3}-a_1, \\ a_1^2+\dfrac{4}{9}+\dfrac{16}{9}-\dfrac{8}{3}a_1+a_1^2-\dfrac{14}{9}=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} d=\dfrac{2}{3}-a_1, \\ 3a_1^2-4a_1+1=0; \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a_1=\dfrac{1}{3}, \\ d=\dfrac{1}{3}; \end{cases} \\ \begin{cases} a_1=1, \\ d=-\dfrac{1}{3}. \end{cases} \end{array} \right.$$

В первом случае: $a_1=\dfrac{1}{3}$, $a_2=\dfrac{2}{3}$, $a_3=1$.

Во втором случае: $a_1=1$, $a_2=\dfrac{2}{3}$, $a_3=\dfrac{1}{3}$.

Ответ: $\dfrac{1}{3}$; $\dfrac{2}{3}$; 1.

2.6. При делении девятого члена арифметической прогрессии на ее второй член в частном получается 5, а при делении тринадцатого члена этой прогрессии на ее шестой член в частном получается 2 и в остатке 5. Найдите первый член и разность прогрессии.

Решение:

Вся сложность данного задания заключается в составлении второго уравнения.

$$\begin{cases} \dfrac{a_9}{a_2} = 5, \\ a_{13} = 2a_6 + 5; \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 + 8d = 5(a_1 + d), \\ a_1 + 12d = 2(a_1 + 5d) + 5; \end{cases} \quad \begin{cases} 4a_1 = 3d, \\ a_1 = 2d - 5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4(2d - 5) = 3d, \\ a_1 = 2d - 5; \end{cases} \quad \begin{cases} d = 4, \\ a_1 = 3. \end{cases}$$

Ответ: $a_1 = 3$, $d = 4$.

2.7. Является ли число 299 общим членом следующих двух арифметических прогрессий: 5; 8; 11; ... и 3; 7; 11; ... Если является, то укажите его номер в каждой прогрессии.

Решение:

5; 8; 11; ...	3; 7; 11; ...
$a_1 = 5$, $d = 3$	$a_1 = 3$, $d = 4$
$a_n = 299$	$a_n = 299$
$5 + (n-1) \cdot 3 = 299$	$3 + (n-1) \cdot 4 = 299$
$n - 1 = 98$	$n - 1 = 74$
$n = 99$.	$n = 75$.

Ответ: Да (99; 75).

2.8. Между числами 1 и 1,3 вставьте пять чисел так, чтобы они вместе с данными составили арифметическую прогрессию.

Решение:

Если между числами 1 и 1,3 вставить пять чисел, получим последовательность, состоящую из семи членов, то есть:

$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ a_7 = 1{,}3; \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = 1, \\ a_1 + 6d = 1{,}3; \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = 1, \\ d = 0{,}05. \end{cases}$$

Тогда:

$a_2 = a_1 + d = 1{,}05$;

$a_3 = a_2 + d = 1{,}1$;

$a_4 = a_3 + d = 1,15$;

$a_5 = a_4 + d = 1,2$;

$a_6 = a_5 + d = 1,25$.

Ответ: 1,05; 1,1; 1,15; 1,2; 1,25.

2.9. Найдите первый отрицательный член арифметической прогрессии $\frac{7}{12}$; 0,55; ...

Решение:

$a_1 = \frac{7}{12}$, $a_2 = 0,55$, тогда $d = a_2 - a_1 = 0,55 - \frac{7}{12} = \frac{11}{20} - \frac{7}{12} = -\frac{1}{30}$.

Общий член арифметической прогрессии имеет вид:

$a_n = \frac{7}{12} + (n-1) \cdot \left(-\frac{1}{30}\right)$.

По условию: $a_n < 0$, то есть:

$\frac{7}{12} + (n-1) \cdot \left(-\frac{1}{30}\right) < 0$; $\frac{n-1}{30} > \frac{7}{12}$; $n - 1 > \frac{35}{2}$; $n > 18,5$.

Таким образом, первым отрицательным членом арифметической прогрессии является a_{19}.

$a_{19} = a_1 + 18d = \frac{7}{12} - \frac{3}{5} = -\frac{1}{60}$.

Ответ: $-\frac{1}{60}$.

2.10. Составьте формулу n-го члена арифметической прогрессии, если $a_9 = -30$, $a_{19} = -45$.

Решение:

$\begin{cases} a_9 = -30, \\ a_{19} = -45; \end{cases}$ $\begin{cases} a_1 + 8d = -30, \\ a_1 + 18d = -45; \end{cases}$ $\begin{cases} -10d = 15, \\ a_1 = -30 - 8d; \end{cases}$ $\begin{cases} d = -1,5, \\ a_1 = -18. \end{cases}$

Общий член арифметической прогрессии имеет вид:

$a_n = -18 - 1,5(n-1)$.

Ответ: $a_n = -18 - 1,5(n-1)$.

Решение задач с использованием формулы суммы n первых членов арифметической прогрессии

2.11. В возрастающей арифметической прогрессии сумма первых восьми членов равна 88, а сумма третьего и пятого членов равна 18. Найдите седьмой член прогрессии.

Решение:

$$\begin{cases} S_8 = 88, \\ a_3 + a_5 = 18; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{2a_1 + 7d}{2} \cdot 8 = 88, \\ (a_1 + 2d) + (a_1 + 4d) = 18; \end{cases} \quad \begin{cases} 2a_1 + 7d = 22, \\ 2a_1 + 6d = 18; \end{cases}$$

Вычитаем уравнения и получаем: $d = 4$, $a_1 = -3$.

$a_7 = a_1 + 6d = -3 + 24 = 21$.

Ответ: $a_7 = 21$.

2.12. В арифметической прогрессии -63; -58; … найдите сумму всех ее отрицательных членов.

Решение:

В арифметической прогрессии: $a_1 = -63$, $d = 5$.

По условию: $a_n < 0$, то есть:

$-63 + (n-1) \cdot 5 < 0$; $\quad n - 1 < 12{,}6$; $\quad n < 13{,}6$.

Значит, члены арифметической прогрессии с первого по тринадцатый – отрицательные, а начиная с четырнадцатого – положительные.

Вычислим сумму всех отрицательных членов арифметической прогрессии, то есть S_{13}:

$$S_{13} = \frac{2 \cdot (-63) + 12 \cdot 5}{2} \cdot 13 = -\frac{66}{2} \cdot 13 = -429.$$

Ответ: -429.

2.13. Найдите число членов арифметической прогрессии, если $a_1 = 6$, $a_{10} = 33$, а сумма всех членов равна 405.

Решение:

Составим систему:

$$\begin{cases} a_1 = 6, \\ a_{10} = 33; \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = 6, \\ 6 + 9d = 33; \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = 6, \\ d = 3. \end{cases}$$

По формуле суммы n первых членов арифметической прогрессии

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$$

составим и решим уравнение относительно n:

$$\frac{12 + 3(n-1)}{2} \cdot n = 405 \qquad |:3$$

$$\frac{4 + n - 1}{2} \cdot n = 135$$

$$n^2 + 3n - 270 = 0$$

$n_1 = -18 \notin \mathbb{N}$ – посторонний корень;

$n_2 = 15$.

Ответ: $n = 15$.

2.14. В арифметической прогрессии сумма первых восьми членов равна 32, а сумма первых двадцати членов равна 200. Найдите сумму первых двадцати восьми членов.

Решение:

$$\begin{cases} S_8 = 32, \\ S_{20} = 200; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{2a_1 + 7d}{2} \cdot 8 = 32, \\ \dfrac{2a_1 + 19d}{2} \cdot 20 = 200; \end{cases} \quad \begin{cases} 2a_1 + 7d = 8, \\ 2a_1 + 19d = 20. \end{cases}$$

Вычтем из второго уравнения первое и найдем: $d = 1$, $a_1 = \dfrac{1}{2}$.

Тогда сумма первых двадцати восьми членов равна:

$$S_{28} = \frac{2a_1 + 27d}{2} \cdot 28 = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} + 27}{2} \cdot 28 = 14 \cdot 28 = 392.$$

Ответ: 392.

2.15. Все члены арифметической прогрессии натуральные числа. Сумма ее первых девяти членов больше 200, но меньше 220. Найдите пятый член этой прогрессии, если второй равен 12.

Решение:

$$200 < S_9 < 220$$

$$200 < \frac{2a_1 + 8d}{2} \cdot 9 < 220$$

$$\frac{200}{9} < \underbrace{a_1 + 4d}_{a_5} < \frac{220}{9}$$

$$22\frac{2}{9} < a_5 < 24\frac{4}{9}$$

С учетом того, что $a_5 \in \mathbb{N}$, возможны два случая:

$$a_5 = 23 \text{ или } a_5 = 24.$$

Рассмотрим каждый из этих случаев в отдельности, при условии что $a_2 = 12$.

1) $\begin{cases} a_5 = 23, \\ a_2 = 12; \end{cases}$ $\begin{cases} a_1 + 4d = 23, \\ a_1 + d = 12; \end{cases}$ $\begin{cases} d = \frac{11}{3}, \\ a_1 = 8\frac{1}{3}. \end{cases}$

Данный случай не подходит по условию задачи, так как все члены арифметической прогрессии должны быть натуральные числа.

2) $\begin{cases} a_5 = 24, \\ a_2 = 12; \end{cases}$ $\begin{cases} a_1 + 4d = 24, \\ a_1 + d = 12; \end{cases}$ $\begin{cases} d = 4, \\ a_1 = 8. \end{cases}$

Ответ: $a_5 = 24$.

2.16. В арифметической прогрессии сто тридцать членов. Сумма членов, стоящих на нечетных местах, равна 34, сумма членов, стоящих на четных местах, равна 21. Найдите разность прогрессии.

Решение:

По условию задачи дана арифметическая прогрессия:

a_1; a_2; a_3; a_4; a_5; a_6; ... a_{129}; a_{130}.

Первый член прогрессии a_1, разность прогрессии обозначим за d, известно, что в прогрессии 130 членов.

Если из данной прогрессии выписать только те ее члены, которые стоят на нечетных местах:

a_1; $a_3 = a_1 + 2d$; $a_5 = a_1 + 4d$; ... $a_{129} = a_1 + 128d$,

то мы получим новую арифметическую прогрессию (первый член равен a_1, разность равна $2d$), состоящую из 65 членов. Следовательно, для новой последовательности можно использовать формулу суммы n первых членов арифметической прогрессии:

$$S_{\text{нечет.}} = a_1 + a_3 + ... + a_{129} = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{a_1 + a_{129}}{2} \cdot 65.$$

Аналогично, последовательность, состоящая из тех членов исходной прогрессии, которые стоят на четных местах:

$$a_2;\ a_4;\ a_6;\ \ldots\ a_{130},$$

так же представляет собой новую арифметическую прогрессию (первый член равен a_2, разность равна $2d$), состоящую из 65 членов. Ее сумму можно представить как:

$$S_{\text{чет.}} = a_2 + a_4 + ... + a_{130} = \frac{a_2 + a_{130}}{2} \cdot 65.$$

Составим и решим систему:

$$\begin{cases} a_1 + a_3 + ... + a_{129} = 34, \\ a_2 + a_4 + ... + a_{130} = 21; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{a_1 + a_{129}}{2} \cdot 65 = 34, \\ \dfrac{a_2 + a_{130}}{2} \cdot 65 = 21; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{2a_1 + 128d}{2} \cdot 65 = 34, \\ \dfrac{2a_1 + 130d}{2} \cdot 65 = 21; \end{cases}$$

$$-\begin{cases} a_1 + 64d = \dfrac{34}{65}, \\ a_1 + 65d = \dfrac{21}{65}; \end{cases}$$

$$d = \frac{21}{65} - \frac{34}{65} = -\frac{13}{65} = -\frac{1}{5}.$$

Ответ: $d = -\frac{1}{5}$.

Решение задач с использованием свойств арифметической прогрессии

Рассмотрим основные свойства арифметической прогрессии.

1. Каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, является средним арифметическим двух соседних членов:

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}.$$

2. В конечной арифметической прогрессии суммы членов, равноотстоящих от ее концов, равны между собой и равны сумме крайних членов:

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \ldots = a_k + a_{n-k+1} = 2a_1 + d\cdot(n-1).$$

Приведем задания на применение основных свойств арифметической прогрессии.

2.17. Найдите все значения переменной x, для каждого из которых следующие числа $\sqrt{x}$, $\sqrt{5x+4}$, $\sqrt{12x+13}$ являются последовательными членами арифметической прогрессии.

Решение:

Составим среднее арифметическое: $\sqrt{5x+4} = \dfrac{\sqrt{x} + \sqrt{12x+13}}{2}$.

Решим полученное уравнение относительно переменной x.

$2\sqrt{5x+4} = \sqrt{x} + \sqrt{12x+13}$

$4(5x+4) = x + 2\sqrt{x(12x+13)} + 12x + 13$

$2\sqrt{x(12x+13)} = 7x + 3$

$4\left(12x^2 + 13x\right) = 49x^2 + 42x + 9$

$x^2 - 10x + 9 = 0$

$x_1 = 1,\ \ x_2 = 9.$

Ответ: $\{1;\ 9\}$.

2.18. При каких значениях переменной x, три числа $\lg 2$, $\lg\left(2^x-6\right)$, $\lg\left(2^x+34\right)$ являются последовательными членами арифметической прогрессии?

***Решение*:**

Составим среднее арифметическое: $\lg\left(2^x-6\right)=\dfrac{\lg 2+\lg\left(2^x+34\right)}{2}$.

$2\lg\left(2^x-6\right)=\lg\left(2\cdot\left(2^x+34\right)\right)$

$\left(2^x-6\right)^2=2\cdot\left(2^x+34\right)$

Замена: $2^x=a \quad (a>0)$.

$(a-6)^2=2(a+34)$

$a^2-14a-32=0$

$a_1=16$, $a_2=-2$ – посторонний корень

$2^x=16$ или $x=4$.

Ответ: $\{4\}$.

2.19. Найдите число членов арифметической прогрессии, зная, что сумма ее первых четырех членов равна 40, сумма последних четырех членов равна 104, а сумма всех членов равна 216.

***Решение*:**

$$\begin{cases} a_1+a_2+a_3+a_4=40, \\ a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+a_{n-3}=104. \end{cases}$$

Сложим эти два равенства:

$\left(a_1+a_n\right)+\left(a_2+a_{n-1}\right)+\left(a_3+a_{n-2}\right)+\left(a_4+a_{n-3}\right)=144$.

По свойству 2 выражения в скобках равны между собой, то есть:

$4\left(a_1+a_n\right)=144$;

$a_1+a_n=36$.

$S_n=\dfrac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\dfrac{36}{2}\cdot n=18n$

Тогда: $18n=216$; $n=12$.

Ответ: $n=12$.

2.20. Найдите числа, составляющие арифметическую прогрессию, зная, что сумма ее первых четырех членов равна 26, сумма последних четырех членов – 110, а сумма всех членов – 187.

Решение:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 26, \\ a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} = 110. \end{cases}$$

Сложим эти два равенства:

$$(a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + (a_4 + a_{n-3}) = 136;$$

$$4(a_1 + a_n) = 136;$$

$$a_1 + a_n = 34.$$

Вычислим число членов арифметической прогрессии, зная, что ее сумма равна 187.

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{34}{2} \cdot n = 17n$$

$$17n = 187$$

$$n = 11$$

Составим систему:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 26, \\ a_1 + a_{11} = 34; \end{cases} \quad \begin{cases} 4a_1 + 6d = 26, \\ 2a_1 + 10d = 34; \end{cases} \quad -\begin{cases} 2a_1 + 3d = 13, \\ 2a_1 + 10d = 34; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a_1 + 3d = 13, \\ 7d = 21; \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = 2, \\ d = 3. \end{cases}$$

Ответ: 2; 5; 8; ...

Решение нестандартных задач на арифметическую прогрессию

Несмотря на то, что предложенная схема решения задач на арифметическую прогрессию охватывает большинство задач, не редко встречаются выходящие за рамки данной схемы нестандартные задачи.

Рассмотрим ряд примеров.

2.21. Известно, что при любом n сумма S_n членов некоторой прогрессии выражается формулой $S_n = 2n^2 - 3n$. Найдите десятый член прогрессии.

Решение:

Замечание. При решении задач, в которых используется понятие суммы членов арифметической прогрессии, удобно применять следующую формулу:

$$a_n = S_n - S_{n-1}.$$

Согласно вышеприведенной формуле:

$$a_n = S_n - S_{n-1} = 2n^2 - 3n - \left(2(n-1)^2 - 3(n-1)\right) =$$

$$= 2n^2 - 3n - 2n^2 + 4n - 2 + 3n - 3 = 4n - 5.$$

Тогда $a_{10} = 4 \cdot 10 - 5 = 35$.

Ответ: $a_{10} = 35$.

2.22. Сумма третьего и девятого членов арифметической прогрессии равна 8. Найдите сумму одиннадцати первых членов этой прогрессии.

Решение:

По условию: $a_3 + a_9 = 8$.

Тогда: $a_1 + 2d + a_1 + 8d = 8$ или $2a_1 + 10d = 8$.

Распишем S_{11}:

$$S_{11} = \frac{2a_1 + 10d}{2} \cdot 11 = \frac{8}{2} \cdot 11 = 44.$$

Ответ: 44.

2.23. В арифметической прогрессии девятый член равен 6. Найдите сумму семнадцати первых членов этой прогрессии.

Решение:

По условию: $a_9 = a_1 + 8d = 6$.

Выразим сумму семнадцати членов прогрессии:

$$S_{17}=\frac{2a_1+16d}{2}\cdot 17=(a_1+8d)\cdot 17=6\cdot 17=102.$$

Ответ: $S_{17}=102$.

2.24. В арифметической прогрессии вычислите:

$a_7^2+2a_7\cdot a_5+a_5^2-(a_8+a_4)^2-2$.

Решение:

Первые три слагаемых соберем по формуле квадрата суммы:

$$a_7^2+2a_7\cdot a_5+a_5^2-(a_8+a_4)^2-2=(a_7+a_5)^2-(a_8+a_4)^2-2=$$

$$=(2a_1+10d)^2-(2a_1+10d)^2-2=-2.$$

Ответ: -2.

2.25. Какой член арифметической прогрессии получится, если от суммы первых десяти членов вычесть девятикратный первый член той же прогрессии?

Решение:

$$S_{10}-9a_1=\frac{2a_1+9d}{2}\cdot 10-9a_1=10a_1+45d-9a_1=a_1+45d=a_{46}.$$

Ответ: a_{46}.

2.26. Найдите сумму всех положительных четных двузначных чисел, делящихся на 3 без остатка.

Решение:

Положительные четные двузначные числа, делящиеся на 3 без остатка это:

12; 18; 24; 30; … 96.

Данные числа составляют арифметическую прогрессию:

$a_1=12$, $d=6$, $a_n=96$.

Используя формулу общего члена арифметической прогрессии $a_n=a_1+(n-1)\cdot d$, определим число членов этой прогрессии:

$12+(n-1)\cdot 6=96$; $\quad 2+(n-1)=16$; $\quad n=15$.

Тогда: $S_{15} = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{12+96}{2} \cdot 15 = 54 \cdot 15 = 810$.

Ответ: 810.

2.27. Найдите сумму всех трехзначных чисел, не делящихся на 13.

Решение:

Сумму трехзначных чисел, не делящихся на 13, будем искать от обратного. Найдем сумму всех трехзначных чисел и сумму всех трехзначных чисел, которые делятся на 13 без остатка. Тогда разность этих чисел даст искомую сумму.

1) Вычислим сумму всех трехзначных чисел:

$$100;\ 101;\ 102;\ \ldots\ 999.$$

Данные числа составляют арифметическую прогрессию:
$a_1 = 100$, $d = 1$, $a_n = 999$.

Используя формулу общего члена арифметической прогрессии $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$, определим число членов этой прогрессии:

$100 + (n-1) \cdot 1 = 999$; $\quad n = 900$.

Тогда сумма этих чисел вычисляется по формуле:

$$S_{900} = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{100+999}{2} \cdot 900 = 1099 \cdot 450 = 494550.$$

2) Вычислим сумму всех трехзначных чисел, делящихся на 13:

$$104;\ 117;\ 130;\ \ldots\ 988.$$

Данные числа составляют арифметическую прогрессию:
$a_1 = 104$, $d = 13$, $a_n = 988$.

Число членов этой прогрессии:

$104 + (n-1) \cdot 13 = 988$; $\quad n-1 = 68$; $\quad n = 69$.

Тогда сумма этих чисел вычисляется по формуле:

$$S_{69} = \frac{104+988}{2} \cdot 69 = 546 \cdot 69 = 37674.$$

3) Сумма всех трехзначных чисел, не делящихся на 13:

$$S = S_{900} - S_{69} = 494550 - 37674 = 456876.$$

Ответ: 456 876.

2.28. Решите уравнение: $5^2 \cdot 5^4 \cdot 5^6 \cdot ... \cdot 5^{2x} = (0{,}04)^{-28}$.

Решение:

$$5^{2+4+6+...+2x} = \left(5^{-2}\right)^{-28}$$

$$2+4+6+...+2x = 56$$

$$1+2+3+...+x = 28$$

Получаем, что сумма последовательных натуральных чисел, образующих арифметическую прогрессию ($a_1 = 1$, $d = 1$, $a_n = x$), равна 28. Составим систему:

$$\begin{cases} a_n = a_1 + (n-1)\cdot d, \\ S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2}\cdot n; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 + (n-1)\cdot 1, \\ \dfrac{1+x}{2}\cdot n = 28; \end{cases} \quad \begin{cases} x = n, \\ (1+x)n = 56; \end{cases}$$

$$\begin{cases} n = x, \\ (1+x)x = 56; \end{cases} \quad \begin{cases} n = x, \\ x^2 + x - 56 = 0; \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 7, \\ n = 7; \end{cases} \\ \begin{cases} x = -8, \\ n = -8; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 7, \\ n = 7; \end{cases} \\ \varnothing. \end{array}\right.$$

Ответ: $x = 7$.

2.29. Решите уравнение: $(x-1)+(x-3)+...+(x-27) = 70$.

Решение:

Выражения в скобках образуют арифметическую прогрессию ($a_1 = x-1$, $d = -2$, $a_n = x-27$), сумма прогрессии равна 70.

Составим систему:

$$\begin{cases} a_n = a_1 + (n-1)\cdot d, \\ S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2}\cdot n; \end{cases} \quad \begin{cases} x - 27 = (x-1) + (n-1)\cdot(-2), \\ \dfrac{(x-1)+(x-27)}{2}\cdot n = 70; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 27 = x - 2n + 1, \\ \dfrac{2x-28}{2}\cdot n = 70; \end{cases} \quad \begin{cases} n = 14, \\ (x-14)\cdot 14 = 70; \end{cases} \quad \begin{cases} n = 14, \\ x = 19. \end{cases}$$

Ответ: $x = 19$.

2.30. Известно, что внутренние углы некоторого выпуклого многоугольника, наименьший из которых равен $120°$, образуют арифметическую прогрессию с разностью $5°$. Найдите число сторон этого многоугольника.

Решение:

По условию углы многоугольника образуют арифметическую прогрессию, у которой $a_1 = 120°$, $d = 5°$.

Сумма внутренних углов выпуклого n – угольника вычисляется по формуле $180° \cdot (n-2)$. Тогда:

$$S_n = 180° \cdot (n-2)$$

$$\frac{120° \cdot 2 + 5° \cdot (n-1)}{2} \cdot n = 180° \cdot (n-2)$$

$$(235° + 5° \cdot n)n = 360°(n-2)$$

$$(47+n)n = 72(n-2)$$

$$n^2 - 25n + 144 = 0$$

$$n_1 = 9, \quad n_2 = 16$$

При этом $n = 16$ не подходит по смыслу задачи, так как в этом случае угол $a_{16} = 120° + 5° \cdot 15 = 195°$, а внутренний угол выпуклого n – угольника всегда меньше $180°$.

Ответ: $n = 9$.

2.31. Первый члена арифметической прогрессии равен единице. При каком значении разности прогрессии d величина $a_1 \cdot a_3 + a_2 \cdot a_3$ имеет минимальное значение?

Решение:

$$a_1 = 1$$

$$a_1 \cdot a_3 + a_2 \cdot a_3 = a_3(a_1 + a_2) = (1+2d)(1+1+d) = 2d^2 + 5d + 2 =$$

$$= 2\left(d^2 + \frac{5}{2}d + \frac{25}{16}\right) - \frac{25}{8} + 2 = 2\left(d + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{9}{8}$$

Получаем, что выражение $a_1 \cdot a_3 + a_2 \cdot a_3$ имеет минимальное значение при $\left(d+\frac{5}{4}\right)^2 = 0$ или $d = -\frac{5}{4}$.

Ответ: $d = -\frac{5}{4}$.

2.32. Две арифметические прогрессии перемножили и получилась последовательность 468; 462; 384; …. Какой следующий член этой последовательности.

Решение:

Запишем первую арифметическую прогрессию как:

a; $a+x$; $a+2x$; $a+3x$; …

вторую арифметическую прогрессию как:

b; $b+y$; $b+2y$; $b+3y$; …

По условию дано, что:

$a \cdot b = 468$;

$(a+x)(b+y) = 462$;

$(a+2x)(b+2y) = 384$.

Требуется найти:

$(a+3x)(b+3y) = ab + 3bx + 3ay + 9xy = ab + 3(bx+ay) + 9xy$.

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} ab = 468, \\ (a+x)(b+y) = 462, \\ (a+2x)(b+2y) = 384; \end{cases} \quad \begin{cases} ab = 468, \\ ab + bx + ay + xy = 462, \\ ab + 2bx + 2ay + 4xy = 384; \end{cases}$$

$$\begin{cases} ab = 468, \\ 468 + (bx+ay) + xy = 462, \\ 468 + 2(bx+ay) + 4xy = 384; \end{cases} \quad \begin{cases} ab = 468, \\ (bx+ay) + xy = -6, \\ (bx+ay) + 2xy = -42; \end{cases}$$

$$\begin{cases} ab = 468, \\ xy = -36, \\ (bx + ay) = 30. \end{cases}$$

Подставим полученные значения в четвертый член последовательности:

$$(a+3x)(b+3y) = ab + 3(bx + ay) + 9xy = 468 + 3 \cdot 30 + 9 \cdot (-36) = 234.$$

Ответ: 234.

§3. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ



При решении задач на геометрическую прогрессию удобно вместо стандартной записи членов прогрессии b_1; b_2; b_3; … употреблять запись b_1; $b_1 q$; $b_1 q^2$; … – эта форма явно показывает, что выписанные члены образуют геометрическую прогрессию и зависят от двух параметров b_1 и q.

Стандартным методом решения заданий, связанных с геометрической прогрессией, является запись условий задачи в виде системы уравнений через b_1 и q.

Рассмотрим ряд примеров.

3.1. Найдите знаменатель убывающей геометрической прогрессии, если $b_2+b_3=3\left(b_3+b_4\right)$.

Решение:

Используя формулу общего члена геометрической прогрессии $b_n=b_1\cdot q^{n-1}$, перепишем заданное соотношение.

$$b_1 q+b_1 q^2=3\left(b_1 q^2+b_1 q^3\right)$$

$$b_1 q(1+q)=3b_1 q^2(1+q)$$

$$b_1 q(1+q)(1-3q)=0$$

По условию $b_1\neq 0$, $q\neq 0$, $q\neq -1$, следовательно, $q=\frac{1}{3}$.

Ответ: $q=\frac{1}{3}$.

3.2. Найдите четыре числа, образующих геометрическую прогрессию, у которой третий член больше первого на 9, а второй больше четвертого на 18.

Решение:

Из условия следует:

$$\begin{cases} b_3 - b_1 = 9, \\ b_2 - b_4 = 18; \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 q^2 - b_1 = 9, \\ b_1 q - b_1 q^3 = 18; \end{cases} \quad \begin{cases} b_1(q^2 - 1) = 9, \\ -b_1 q(q^2 - 1) = 18. \end{cases}$$

Разделив второе уравнение системы на первое, получим: $q = -2$.

Тогда $b_1 = \dfrac{9}{q^2 - 1} = 3$.

Найдем четыре числа, образующих геометрическую прогрессию:

$b_1 = 3$;

$b_2 = b_1 q = 3 \cdot (-2) = -6$;

$b_3 = b_1 q^2 = 3 \cdot 4 = 12$;

$b_4 = b_1 q^3 = 3 \cdot (-8) = -24$.

Ответ: 3; -6; 12; -24.

3.3. Сумма первого и четвертого членов убывающей геометрической прогрессии относится к сумме второго и третьего членов этой же прогрессии, как $13:4$. Найдите первый член прогрессии, если ее третий член равен 32.

Решение:

$$\begin{cases} \dfrac{b_1 + b_4}{b_2 + b_3} = \dfrac{13}{4}, \\ b_3 = 32; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{b_1 + b_1 q^3}{b_1 q + b_1 q^2} = \dfrac{13}{4}, \\ b_1 q^2 = 32; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{1 + q^3}{q(1 + q)} = \dfrac{13}{4}, \\ b_1 q^2 = 32; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1 - q + q^2}{q} = \dfrac{13}{4}, \\ b_1 q^2 = 32; \end{cases} \quad \begin{cases} 4q^2 - 17q + 4 = 0, \\ b_1 = \dfrac{32}{q^2}; \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} q = \dfrac{1}{4}, \\ b_1 = 512; \end{cases} \\ \begin{cases} q = 4, \\ b_1 = 2. \end{cases} \end{array} \right.$$

Случай $q = 4$ не удовлетворяет условию задачи, так как прогрессия должна быть убывающей, то есть $0 < q < 1$.

Ответ: $b_1 = 512$.

3.4. Последовательность (b_n) – геометрическая прогрессия. Найдите b_1 и q, если $\begin{cases} b_1+b_2+b_3=70, \\ b_1\cdot b_2\cdot b_3=8000. \end{cases}$

Решение:

$$\begin{cases} b_1+b_1q+b_1q^2=70, \\ b_1\cdot(b_1q)\cdot(b_1q^2)=8000; \end{cases} \quad \begin{cases} b_1(1+q+q^2)=70, \\ (b_1q)^3=8000; \end{cases} \quad \begin{cases} b_1(1+q+q^2)=70, \\ b_1q=20; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{20}{q}\cdot(1+q+q^2)=70, \\ b_1=\dfrac{20}{q}; \end{cases} \quad \begin{cases} 2q^2-5q+2=0, \\ b_1=\dfrac{20}{q}; \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} q=2, \\ b_1=10; \end{cases} \\ \begin{cases} q=\dfrac{1}{2}, \\ b_1=40. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $q=2$, $b_1=10$ или $q=\dfrac{1}{2}$, $b_1=40$.

3.5. Произведение первого и четвертого членов возрастающей геометрической прогрессии с положительными членами равно 27, а сумма второго и третьего ее членов равна 12. Найдите сумму второго и пятого членов прогрессии.

Решение:

$$\begin{cases} b_1\cdot b_4=27, \\ b_2+b_3=12; \end{cases} \quad \begin{cases} b_1\cdot(b_1q^3)=27, \\ b_1q+b_1q^2=12; \end{cases} \quad \begin{cases} b_1^2\cdot q^3=27, \\ b_1q(1+q)=12; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{144}{q^2(1+q)^2}\cdot q^3=27, \\ b_1=\dfrac{12}{q(1+q)}; \end{cases} \quad \begin{cases} 144q=27(1+2q+q^2), \\ b_1=\dfrac{12}{q(1+q)}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 16q=3(1+2q+q^2), \\ b_1=\dfrac{12}{q(1+q)}; \end{cases} \quad \begin{cases} 3q^2-10q+3=0, \\ b_1=\dfrac{12}{q(1+q)}; \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} q=3, \\ b_1=1; \end{cases} \\ \begin{cases} q=\dfrac{1}{3}, \\ b_1=27. \end{cases} \end{array}\right.$$

Случай $q=\frac{1}{3}$ не удовлетворяет условию задачи, так как прогрессия должна быть возрастающей, то есть $q>1$.

$b_2+b_5=b_1q+b_1q^4=b_1q\left(1+q^3\right)=3(1+27)=84$.

Ответ: 84.

3.6. Сумма трех первых членов геометрической прогрессии равна 21, а сумма их квадратов равна 189. Найдите первый член прогрессии.

***Решение*:**

Запишем условие задачи в виде системы.

$$\begin{cases} b_1+b_2+b_3=21, \\ b_1^2+b_2^2+b_3^2=189; \end{cases} \qquad \begin{cases} b_1+b_1q+b_1q^2=21, \\ b_1^2+\left(b_1q\right)^2+\left(b_1q^2\right)^2=189; \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1\left(1+q+q^2\right)=21, \\ b_1^2\left(1+q^2+q^4\right)=189. \end{cases}$$

Распишем выражение $\left(1+q^2+q^4\right)$:

$$1+q^2+q^4=1+q^4+2q^2-q^2=\left(1+q^2\right)^2-q^2=\left(1+q^2+q\right)\left(1+q^2-q\right).$$

Тогда система примет вид:

$$\begin{cases} b_1\left(1+q+q^2\right)=21, \\ b_1^2\left(1+q^2+q\right)\left(1+q^2-q\right)=189. \end{cases}$$

Разделим второе уравнение на первое:

$$\begin{cases} b_1\left(1+q+q^2\right)=21, \\ b_1\left(1+q^2-q\right)=9; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{9}{1+q^2-q}\cdot\left(1+q+q^2\right)=21, \\ b_1=\dfrac{9}{1+q^2-q}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\left(1+q+q^2\right)=7\left(1+q^2-q\right), \\ b_1=\dfrac{9}{1+q^2-q}; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2q^2-5q+2=0, \\ b_1=\dfrac{9}{1+q^2-q}; \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} q=2, \\ b_1=3; \end{cases} \\ \begin{cases} q=\dfrac{1}{2}, \\ b_1=12. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: 3 или 12.

3.7. Выясните, принадлежит ли число $\dfrac{3750}{243}$ геометрической прогрессии: 2; $\dfrac{10}{3}$; $\dfrac{50}{9}$; … Если принадлежит, то укажите его номер.

Решение:

$b_1=2$, $b_2=\dfrac{10}{3}$, следовательно, $q=\dfrac{b_2}{b_1}=\dfrac{5}{3}$.

Положим $b_n=\dfrac{3750}{243}$, тогда по формуле общего члена геометрической прогрессии $b_n=b_1\cdot q^{n-1}$ число $\dfrac{3750}{243}$ можно представить в виде:

$$\frac{3750}{243}=2\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{n-1}$$

$$\frac{1250}{81}=2\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{n-1}$$

$$\frac{625}{81}=\left(\frac{5}{3}\right)^{n-1}$$

$$\left(\frac{5}{3}\right)^4=\left(\frac{5}{3}\right)^{n-1}$$

$n-1=4$ или $n=5$.

Ответ: Да, пятый член прогрессии.

3.8. Найдите наибольшее число из трех чисел, образующих геометрическую прогрессию с положительными членами, если сумма их равна 21, а сумма обратных величин равна $\frac{7}{12}$.

Решение:

Запишем условие задачи в виде системы.

$$\begin{cases} b_1+b_2+b_3=21, \\ \frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\frac{1}{b_3}=\frac{7}{12}; \end{cases} \quad \begin{cases} b_1+b_1q+b_1q^2=21, \\ \frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_1q}+\frac{1}{b_1q^2}=\frac{7}{12}; \end{cases} \quad \begin{cases} b_1\left(1+q+q^2\right)=21, \\ \frac{1+q+q^2}{b_1q^2}=\frac{7}{12}. \end{cases}$$

Разделим первое уравнение на второе:

$$\begin{cases} \left(b_1q\right)^2=36, \\ b_1\left(1+q+q^2\right)=21. \end{cases}$$

С учетом того, что по условию задачи все члены геометрической прогрессии должны быть положительными, последняя система равносильна:

$$\begin{cases} b_1q=6, \\ b_1\left(1+q+q^2\right)=21; \end{cases} \quad \begin{cases} b_1=\frac{6}{q}, \\ \frac{6}{q}\cdot\left(1+q+q^2\right)=21; \end{cases} \quad \begin{cases} b_1=\frac{6}{q}, \\ 2q^2-5q+2=0; \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} q=2, \\ b_1=3; \end{cases} \\ \begin{cases} q=\frac{1}{2}, \\ b_1=12. \end{cases} \end{array}\right.$$

В первом случае: $b_1=12$; $b_2=6$; $b_3=3$.

Во втором случае: $b_1=3$; $b_2=6$; $b_3=12$.

И в первом и во втором случаях наибольшим членом геометрической прогрессии является число 12.

Ответ: 12.

3.9. Число членов геометрической прогрессии четно. Сумма ее членов, стоящих на четных местах, в два раза больше суммы членов, стоящих на нечетных местах. Определите знаменатель прогрессии.

Решение:

Пусть число членов геометрической прогрессии составляет $2n$.

Из условия задачи следует: $\dfrac{b_2+b_4+b_6+...+b_{2n}}{b_1+b_3+b_5+...+b_{2n-1}}=2$.

$$\frac{b_1 q+b_1 q^3+b_1 q^5+...+b_1\cdot q^{2n-1}}{b_1+b_1 q^2+b_1 q^4+...+b_1\cdot q^{2n-2}}=2$$

$$\frac{b_1 q\left(1+q^2+q^4+...+q^{2n-2}\right)}{b_1\left(1+q^2+q^4+...+q^{2n-2}\right)}=2$$

$q=2$.

Ответ: $q=2$.

3.10. Начиная с какого номера, члены геометрической прогрессии: -8; 4; -2; ... по абсолютной величине меньше 0,001 ?

Решение:

$b_1=-8$, $b_2=4$, следовательно, $q=\dfrac{b_2}{b_1}=\dfrac{4}{-8}=-\dfrac{1}{2}$.

По условию $|b_n|<0{,}001$.

Тогда по формуле общего члена геометрической прогрессии $b_n=b_1\cdot q^{n-1}$ должно быть выполнено неравенство:

$$\left|(-8)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right|<0{,}001$$

$$2^3\cdot 2^{1-n}<10^{-3}$$

$$2^{4-n}<10^{-3}$$

Логарифмируем неравенство по основанию 2:

$$4-n<-3\log_2 10$$

$$n>4+3\log_2 10$$

$$n>4+3\log_2(2\cdot 5)$$

$$n>4+3\left(1+\log_2 5\right)$$

$$n > 7 + 3\underbrace{\log_2 5}_{\approx 2{,}32}$$

$$n > 13{,}96$$

Следовательно, начиная с четырнадцатого номера, члены геометрической прогрессии по абсолютной величине меньше 0,001.

Ответ: $n = 14$.



3.11. Сумма первых четырех членов возрастающей геометрической прогрессии равна 15, а сумма следующих четырех членов – 240. Найдите сумму первых шести членов этой прогрессии.

Решение:

Запишем условие задачи в виде системы.

$$\begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 15, \\ b_5 + b_6 + b_7 + b_8 = 240; \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + b_1 q^3 = 15, \\ b_1 q^4 + b_1 q^5 + b_1 q^6 + b_1 q^7 = 240; \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1\left(1 + q + q^2 + q^3\right) = 15, \\ b_1 q^4\left(1 + q + q^2 + q^3\right) = 240. \end{cases}$$

Разделим второе уравнение на первое:

$$\begin{cases} q^4 = 16, \\ b_1\left(1 + q + q^2 + q^3\right) = 15. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы следует, что $q = 2$ или $q = -2$.

С учетом того, что по условию задачи геометрическая прогрессия должна быть возрастающей, $q = 2$ и последняя система равносильна:

$$\begin{cases} q = 2, \\ b_1\left(1 + q + q^2 + q^3\right) = 15; \end{cases} \quad \begin{cases} q = 2, \\ b_1(1 + 2 + 4 + 8) = 15; \end{cases} \quad \begin{cases} q = 2, \\ b_1 = 1. \end{cases}$$

По формуле $S_n = \dfrac{b_1(q^n - 1)}{q-1}$ найдем сумму первых шести членов геометрической прогрессии.

$$S_6 = \frac{1\cdot(2^6-1)}{2-1} = 63.$$

Ответ: 63.

3.12. Сумма первых трех членов возрастающей геометрической прогрессии равна 13, а их произведение равно 27. Вычислите сумму первых пяти членов этой прогрессии.

Решение:

По условию:

$$\begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 = 13, \\ b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 = 27; \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 + b_1 q + b_1 q^2 = 13, \\ b_1 \cdot (b_1 q)\cdot(b_1 q^2) = 27; \end{cases} \quad \begin{cases} b_1(1+q+q^2) = 13, \\ (b_1 q)^3 = 27; \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1(1+q+q^2) = 13, \\ b_1 q = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 = \dfrac{3}{q}, \\ \dfrac{3}{q}\cdot(1+q+q^2) = 13; \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 = \dfrac{3}{q}, \\ 3q^2 - 10q + 3 = 0; \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} q = 3, \\ b_1 = 1; \end{cases} \\ \begin{cases} q = \dfrac{1}{3}, \\ b_1 = 9. \end{cases} \end{array}\right.$$

Случай $q = \dfrac{1}{3}$ не удовлетворяет условию задачи, так как прогрессия должна быть возрастающей, то есть $q > 1$.

Найдем сумму первых пяти членов этой прогрессии:

$$S_5 = \frac{b_1(q^5-1)}{q-1} = \frac{1\cdot(3^5-1)}{3-1} = \frac{242}{2} = 121.$$

Ответ: 121.

3.13. Сумма первых трех членов геометрической прогрессии равна 12, а сумма первых шести членов равна (-84). Найдите третий член прогрессии.

Решение:

По условию:

$$\begin{cases} S_3 = 12, \\ S_6 = -84; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{b_1(q^3-1)}{q-1} = 12, \\ \dfrac{b_1(q^6-1)}{q-1} = -84; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{b_1(q^3-1)}{q-1} = 12, \\ \dfrac{b_1(q^3-1)(q^3+1)}{q-1} = -84. \end{cases}$$

Разделим второе уравнение на первое:

$$\begin{cases} q^3+1 = -7, \\ \dfrac{b_1(q^3-1)}{q-1} = 12; \end{cases} \quad \begin{cases} q^3 = -8, \\ b_1(q^2+q+1) = 12; \end{cases} \quad \begin{cases} q = -2, \\ b_1(4-2+1) = 12; \end{cases} \quad \begin{cases} q = -2, \\ b_1 = 4. \end{cases}$$

$b_3 = b_1 q^2 = 4 \cdot 4 = 16$.

Ответ: 16.

3.14. Найдите первый член геометрической прогрессии, у которой $\dfrac{b_1+b_3}{b_2+b_4} = 2$; $S_5 = 279$.

Решение:

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{b_1+b_3}{b_2+b_4} = 2, \\ S_5 = 279; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{b_1+b_1 q^2}{b_1 q+b_1 q^3} = 2, \\ \dfrac{b_1(q^5-1)}{q-1} = 279; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{b_1(1+q^2)}{b_1 q(1+q^2)} = 2, \\ \dfrac{b_1(q^5-1)}{q-1} = 279; \end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{1}{q}=2,\\ \dfrac{b_1\left(q^5-1\right)}{q-1}=279;\end{cases}\qquad \begin{cases}q=\dfrac{1}{2},\\ \dfrac{b_1\left(\dfrac{1}{32}-1\right)}{\dfrac{1}{2}-1}=279;\end{cases}\qquad \begin{cases}q=\dfrac{1}{2},\\ b_1=144.\end{cases}$$

Ответ: $b_1=144$.

3.15. Найдите число членов геометрической прогрессии, в которой $b_4+b_5=24$, $b_6-b_4=24$, $S_n=127$.

Решение:

Первые два условия запишем в виде системы и найдем b_1 и q:

$$\begin{cases}b_4+b_5=24,\\ b_6-b_4=24;\end{cases}\qquad \begin{cases}b_1q^3+b_1q^4=24,\\ b_1q^5-b_1q^3=24;\end{cases}\qquad \begin{cases}b_1q^3(1+q)=24,\\ b_1q^3\left(q^2-1\right)=24.\end{cases}$$

Разделим второе уравнение на первое:

$$\begin{cases}\dfrac{q^2-1}{q+1}=1,\\ b_1q^3(1+q)=24;\end{cases}\qquad \begin{cases}q-1=1,\\ b_1q^3(1+q)=24;\end{cases}\qquad \begin{cases}q=2,\\ b_1=1.\end{cases}$$

По условию $S_n=127$, получаем уравнение:

$$127=\frac{1\cdot\left(2^n-1\right)}{2-1};\qquad 2^n=128;\qquad n=7.$$

Ответ: $n=7$.

3.16. В геометрической прогрессии $b_1=2$, $b_n=1024$, $S_n=2046$. Найдите число ее членов и знаменатель.

Решение:

Для решения данной задачи будем использовать формулу суммы

$$S_n=\frac{b_nq-b_1}{q-1}.$$

Так мы избежим громоздкого решения системы уравнений.

В соответствии с формулой:

$$2046 = \frac{1024 \cdot q - 2}{q - 1}$$

$$1022\,q = 2044$$

$$q = 2.$$

По условию $b_n = 1024$, следовательно:

$$2 \cdot 2^{n-1} = 1024$$

$$2^n = 2^{10}$$

$$n = 10.$$

Ответ: $n = 10$, $q = 2$.

3.17. Найдите сумму первых шести членов геометрической прогрессии, первый член которой равен 2, а пятый равен 162, если известно, что ее члены с нечетными номерами положительны, а с четными отрицательны.

Решение:

Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} b_1 = 2, \\ b_5 = 162; \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 = 2, \\ b_1 q^4 = 162; \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 = 2, \\ q^4 = 81; \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 = 2, \\ \left[\begin{array}{l} q = 3, \\ q = -3. \end{array}\right. \end{cases}$$

Из условия того, что b_1, b_3, b_5 положительны, а b_2, b_4, b_6 отрицательны, следует, что прогрессия знакочередующаяся и $q < 0$.

Получаем, что $b_1 = 2$, $q = -3$.

$$S_6 = \frac{b_1\left(q^6 - 1\right)}{q - 1} = \frac{2 \cdot \left((-3)^6 - 1\right)}{-3 - 1} = -\frac{728}{2} = -364.$$

Ответ: -364.

3.18. Первый член геометрической прогрессии равен 3, а последний – 24. Определите знаменатель прогрессии, если ее сумма на 43 больше знаменателя.

Решение:

Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} b_1 = 3, \\ b_n = 24, \\ S_n = 43 + q; \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 = 3, \\ b_n = 24, \\ \dfrac{b_n q - b_1}{q-1} = 43 + q; \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 = 3, \\ b_n = 24, \\ \dfrac{24q - 3}{q-1} = 43 + q; \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1 = 3, \\ b_n = 24, \\ q^2 + 42q - 43 = 24q - 3; \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 = 3, \\ b_n = 24, \\ q^2 + 18q - 40 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 = 3, \\ b_1 \cdot q^{n-1} = 24, \\ \left[\begin{array}{l} q = 2, \\ q = -20. \end{array}\right. \end{cases}$$

Несмотря на то, что в задаче требуется найти только знаменатель прогрессии, систему необходимо дорешать до конца.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} b_1 = 3, \\ q = 2, \\ 3 \cdot 2^{n-1} = 24; \end{cases} \\ \begin{cases} b_1 = 3, \\ q = -20, \\ 3 \cdot (-20)^{n-1} = 24; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b_1 = 3, \\ q = 2, \\ 2^{n-1} = 8; \end{cases} \\ \text{система решений} \\ \text{не имеет}; \end{array}\right. \quad \begin{cases} b_1 = 3, \\ q = 2, \\ n = 4. \end{cases}$$

Ответ: $q = 2$.

Рассмотрим ряд примеров на геометрическую прогрессию, при решении которых используются следующие свойства геометрической прогрессии.

1. Квадрат каждого члена геометрической прогрессии, начиная со второго, равен произведению соседних с ним членов:

$$b_k^2 = b_{k-1} \cdot b_{k+1}.$$

2. В конечной геометрической прогрессии произведения членов, равноотстоящих от ее концов, равны между собой и равны произведению крайних членов:

$$b_1 \cdot b_n = b_2 \cdot b_{n-1} = b_3 \cdot b_{n-2} = \ldots = b_1^2 \cdot q^{n-1}.$$

Приведем примеры применения рассмотренных свойств для решения задач.

3.19. **Седьмой член геометрической прогрессии равен 2. Найдите произведение первых тринадцати членов этой прогрессии.**

Решение:

Нужно найти произведение $b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot b_4 \cdot ... \cdot b_{13}$.

По свойству 2 выполнены равенства:

$$b_1 \cdot b_{13} = b_2 \cdot b_{12} = b_3 \cdot b_{11} = b_4 \cdot b_{10} = b_5 \cdot b_9 = b_6 \cdot b_8 = b_1^2 \cdot q^{12} =$$

$$= \left(b_1 q^6\right)^2 = b_7^2 .$$

Тогда произведение первых тринадцати членов равно:

$$b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot b_4 \cdot ... \cdot b_{13} = \left(b_6 \cdot b_8\right)^6 \cdot b_7 = \left(b_7^2\right)^6 \cdot b_7 = b_7^{13} = 2^{13} = 8192 .$$

Ответ: 8192.

3.20. **При каких значениях параметра a числа 1, $\sqrt{2-a}$ и $3a^2$ являются последовательными членами геометрической прогрессии. Найдите знаменатель этой прогрессии.**

Решение:

Используя первое свойство для членов геометрической прогрессии, получаем, что если числа 1, $\sqrt{2-a}$ и $3a^2$ образуют геометрическую прогрессию, то имеет место равенство:

$$\left(\sqrt{2-a}\right)^2 = 3a^2$$

$$3a^2 + a - 2 = 0$$

$$a_1 = -1, \ a_2 = \frac{2}{3}$$

1) Если $a = -1$; то 1; $\sqrt{3}$, 3 – три искомых числа.

Знаменатель этой геометрической прогрессии: $q = \sqrt{3}$.

2) Если $a = \frac{2}{3}$, то 1, $\frac{2}{\sqrt{3}}$, $\frac{4}{3}$ – три искомых числа.

Знаменатель этой геометрической прогрессии: $q=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\sqrt{3}$ или $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

3.21. При каких значениях параметра y числа $y-\frac{1}{3}$; $3y-1$; $2y+4$; $7y+11$ являются последовательными членами геометрической прогрессии.

Решение:

Пусть числа $y-\frac{1}{3}$; $3y-1$; $2y+4$; $7y+11$ образуют геометрическую прогрессию, тогда:

$b_1=y-\frac{1}{3}$

$b_2=3y-1$

$b_3=2y+4$

$b_4=7y+11$.

Используя первое свойство для членов геометрической прогрессии, получаем, что выполнены соотношения:

$$\begin{cases} b_2^2=b_1\cdot b_3, \\ b_3^2=b_2\cdot b_4; \end{cases} \quad \begin{cases} (3y-1)^2=\left(y-\frac{1}{3}\right)(2y+4), \\ (2y+4)^2=(3y-1)(7y+11); \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9y^2-6y+1=2y^2-\frac{2}{3}y+4y-\frac{4}{3}, \\ 4y^2+16y+16=21y^2-7y+33y-11; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 21y^2-28y+7=0, \\ 17y^2+10y-27=0; \end{cases} \quad \begin{cases} y_1=1, \quad y_2=\frac{1}{3}; \\ y_1=1, \quad y_2=-\frac{27}{17}; \end{cases} \quad y=1.$$

Ответ: $y=1$.

3.22. В возрастающей геометрической прогрессии сумма первого и последнего членов равна 66, произведение второго и предпоследнего членов равно 128, сумма всех членов – 126. Найдите число членов прогрессии.

Решение:

Составим и решим систему уравнений: $\begin{cases} b_1 + b_n = 66, \\ b_2 \cdot b_{n-1} = 128. \end{cases}$

Воспользуемся следующим свойством членов геометрической прогрессии: $b_1 \cdot b_n = b_2 \cdot b_{n-1}$.

Тогда систему можно переписать в виде:

$$\begin{cases} b_1 + b_n = 66, \\ b_1 \cdot b_n = 128; \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b_1 = 2, \\ b_n = 64; \end{cases} \\ \begin{cases} b_1 = 64, \\ b_n = 2; \end{cases} \end{array} \right. \quad \begin{cases} b_1 = 2, \\ b_n = 64. \end{cases}$$

(случай $b_1 = 64$, $b_n = 2$ не рассматривается, так как по условию задачи геометрическая прогрессия должна быть возрастающей)

По условию: $S_n = \dfrac{b_n q - b_1}{q-1} = 126$;

$$\frac{64q-2}{q-1} = 126;$$

$q = 2$.

Тогда: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1} = 64$; $\quad 2 \cdot 2^{n-1} = 64$; $\quad 2^n = 2^6$; $\quad n = 6$.

Ответ: $n = 6$.

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

Следует обратить внимание на задачи, связанные с бесконечно убывающей геометрической прогрессией.

3.23. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии $b_n = 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

Решение:

Найдем три первых члена прогрессии:

$$b_1 = 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) = 2; \quad b_2 = 6 \cdot \frac{1}{9} = \frac{2}{3}; \quad b_3 = 6 \cdot \frac{1}{27} = \frac{2}{9}.$$

Получаем бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, у которой $b_1 = 2$, $q = \frac{1}{3}$.

По формуле $S = \frac{b_1}{1-q}$ найдем сумму данной прогрессии.

$$S = \frac{2}{1-\frac{1}{3}} = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3.$$

Ответ: 3.

3.24. Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии в полтора раза меньше ее первого члена. Найдите отношение десятого члена к седьмому.

Решение:

По условию: $1{,}5 \cdot S = b_1$.

$$1{,}5 \cdot \frac{b_1}{1-q} = b_1$$

$$1{,}5 b_1 = b_1 (1-q)$$

Разделим уравнение на $b_1 \neq 0$:

$$1 - q = 1{,}5 \quad \text{или} \quad q = -\frac{1}{2}.$$

Тогда отношение десятого члена к седьмому равно:

$$\frac{b_{10}}{b_7} = \frac{b_1 \cdot q^9}{b_1 \cdot q^6} = q^3 = -\frac{1}{8}.$$

Ответ: $-\frac{1}{8}$.

3.25. В бесконечно убывающей геометрической прогрессии $S=192$; $b_1+b_2+b_3=189$. Найдите b_1 и q.

Решение:

$$\begin{cases}\dfrac{b_1}{1-q}=192,\\ b_1+b_2+b_3=189;\end{cases}\qquad \begin{cases}\dfrac{b_1}{1-q}=192,\\ b_1\left(1+q+q^2\right)=189.\end{cases}$$

Разделим второе уравнение системы на первое уравнение:

$$\begin{cases}(1-q)\left(1+q+q^2\right)=\dfrac{63}{64},\\ \dfrac{b_1}{1-q}=192;\end{cases}\qquad \begin{cases}1-q^3=\dfrac{63}{64},\\ b_1=192(1-q);\end{cases}\qquad \begin{cases}q=\dfrac{1}{4},\\ b_1=144.\end{cases}$$

Ответ: $b_1=144$; $q=\dfrac{1}{4}$.

3.26. Найдите знаменатель q бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой каждый член относится к сумме всех последующих, как 2 к 3.

Решение:

По условию: $\dfrac{b_n}{b_{n+1}+b_{n+2}+b_{n+3}+\ldots}=\dfrac{2}{3}$.

Это соотношение можно переписать как:

$$\frac{b_n}{b_n\cdot q+b_n\cdot q^2+b_n\cdot q^3+\ldots}=\frac{2}{3}.$$

Сократим дробь на величину $b_n\neq 0$:

$$\frac{1}{q+q^2+q^3+\ldots}=\frac{2}{3}.$$

В знаменателе полученной дроби бесконечно убывающая геометрическая прогрессия, у которой первый член равен q и знаменатель равен q, следовательно, ее сумма: $S=\dfrac{b_1}{1-q}=\dfrac{q}{1-q}$.

Тогда последнее уравнение равносильно следующему:

$$\frac{1}{\frac{q}{1-q}}=\frac{2}{3}; \quad \frac{1-q}{q}=\frac{2}{3}; \quad q=\frac{3}{5}.$$

Ответ: 0,6.

3.27. Чему равна сумма: $\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}+\ldots?$

Решение:

В данной задаче требуется найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой:

$$b_1=\sqrt{\frac{3}{2}}; \quad q=\frac{b_2}{b_1}=\sqrt{\frac{2}{3}}:\sqrt{\frac{3}{2}}=\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}.$$

Сумма этой прогрессии: $S=\frac{b_1}{1-q}=\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}}{1-\frac{2}{3}}=\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot 3=\frac{3\sqrt{6}}{2}.$

Ответ: $S=\frac{3\sqrt{6}}{2}.$

3.28. Найдите сумму: $\frac{3}{7}+1+\frac{9}{49}+\frac{1}{3}+\frac{27}{343}+\frac{1}{9}+\ldots?$

Решение:

В данной задаче требуется найти сумму двух бесконечно убывающих геометрических прогрессий:

$$\frac{3}{7}+1+\frac{9}{49}+\frac{1}{3}+\frac{27}{343}+\frac{1}{9}+\ldots=\underbrace{\left(\frac{3}{7}+\frac{9}{49}+\frac{27}{343}+\ldots\right)}_{b_1=\frac{3}{7},\ q=\frac{3}{7}}+\underbrace{\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots\right)}_{b_1=1,\ q=\frac{1}{3}}=$$

$$=\frac{\frac{3}{7}}{1-\frac{3}{7}}+\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}+\frac{3}{2}=2\frac{1}{4}.$$

Ответ: $S=2\frac{1}{4}.$

3.29. Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 56, а сумма квадратов ее членов равна 448. Найдите эту прогрессию.

***Решение*:**

Запишем условие задачи в виде системы:

$$\begin{cases} b_1+b_2+b_3+\ldots=56, \\ b_1^2+b_2^2+b_3^2+\ldots=448; \end{cases} \quad \begin{cases} b_1+b_1q+b_1q^2+\ldots=56, \\ b_1^2+(b_1q)^2+(b_1q^2)^2+\ldots=448; \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1+b_1q+b_1q^2+\ldots=56, \\ b_1^2+b_1^2q^2+b_1^2q^4+\ldots=448. \end{cases}$$

Во втором уравнении системы в левой части записана сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой первый член равен b_1^2, а знаменатель равен q^2.

Тогда последняя система уравнений равносильна:

$$\begin{cases} \dfrac{b_1}{1-q}=56, \\ \dfrac{b_1^2}{1-q^2}=448; \end{cases} \quad \begin{cases} b_1=56(1-q), \\ b_1^2=448(1-q^2); \end{cases} \quad \begin{cases} b_1=56(1-q), \\ 56^2(1-q)^2=56\cdot 8(1-q)(1+q); \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1=56(1-q), \\ 7(1-q)=(1+q); \end{cases} \quad \begin{cases} b_1=14, \\ q=\dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

$$b_1=14; \quad b_2=b_1q=14\cdot\frac{3}{4}=\frac{21}{2}; \quad b_3=b_1q^2=14\cdot\frac{9}{16}=\frac{63}{8}.$$

Ответ: $14,\ \dfrac{21}{2},\ \dfrac{63}{8},\ \ldots$

3.30. Определите бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, в которой второй член равен 6, а сумма членов равна $\frac{1}{8}$ суммы квадратов ее членов.

***Решение*:**

Запишем условие задачи в виде системы:

$$\begin{cases} b_2 = 6, \\ b_1 + b_2 + b_3 + \ldots = \frac{1}{8}\left(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \ldots\right); \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1 q = 6, \\ b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \ldots = \frac{1}{8}\left(b_1^2 + b_1^2 q^2 + b_1^2 q^4 + \ldots\right); \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1 q = 6, \\ \frac{b_1}{1-q} = \frac{1}{8} \cdot \frac{b_1^2}{1-q^2}; \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 q = 6, \\ 1 = \frac{1}{8} \cdot \frac{b_1}{1+q}; \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 = \frac{6}{q}, \\ 1 = \frac{3}{4q(1+q)}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1 = \frac{6}{q}, \\ 4q^2 + 4q - 3 = 0; \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b_1 = 12, \\ q = \frac{1}{2}; \end{cases} \\ \begin{cases} b_1 = -4, \\ q = -\frac{3}{2}; \end{cases} \end{array}\right. \quad \begin{cases} b_1 = 12, \\ q = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

(случай $b_1 = -4$, $q = -\frac{3}{2}$ не рассматривается, так как в бесконечно убывающей геометрической прогрессии $|q| < 1$)

$b_1 = 12$; $b_2 = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6$; $b_3 = 12 \cdot \frac{1}{4} = 3$.

Ответ: 12, 6, 3, …

3.31. В бесконечно убывающей геометрической прогрессии сумма всех ее членов, стоящих на нечетных местах, равна 36, а сумма всех членов, стоящих на четных местах, равна 12. Найдите эту прогрессию.

Решение:

$$\begin{cases} b_1 + b_3 + b_5 + \ldots = 36, \\ b_2 + b_4 + b_6 + \ldots = 12; \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 + b_1 q^2 + b_1 q^4 + \ldots = 36, \\ b_1 q + b_1 q^3 + b_1 q^5 + \ldots = 12; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{b_1}{1-q^2} = 36, \\ \frac{b_1 q}{1-q^2} = 12. \end{cases}$$

Разделив второе уравнение системы на первое уравнение, получим:

$$\begin{cases} q = \frac{1}{3}, \\ \frac{b_1}{1-q^2} = 36; \end{cases} \qquad \begin{cases} q = \frac{1}{3}, \\ b_1 = 36\left(1-\frac{1}{9}\right) = 32. \end{cases}$$

$$b_1 = 32; \quad b_2 = 32 \cdot \frac{1}{3} = \frac{32}{3}; \quad b_3 = 32 \cdot \frac{1}{9} = \frac{32}{9}.$$

Ответ: $32, \frac{32}{3}, \frac{32}{9}, \ldots$

3.32. Решите уравнение: $\frac{1}{x} + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = \frac{7}{2}$, где $|x| < 1$.

Решение:

Представим уравнение в виде: $\frac{1}{x} + \left(x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots\right) = \frac{7}{2}$.

Выражение в скобках представляет собой сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, для которой $b_1 = x$, $q = x$.

$$\frac{1}{x} + \frac{x}{1-x} = \frac{7}{2}$$

$$9x^2 - 9x + 2 = 0$$

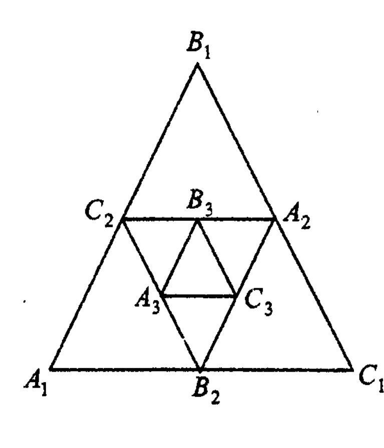
$$x_1 = \frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{2}{3}$$

Оба корня удовлетворяют условию $|x| < 1$.

Ответ: $\left\{\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right\}$.

3.33. В равносторонний треугольник со стороной a вписан посредством соединения середин его сторон новый треугольник, в этот треугольник тем же способом вписан новый треугольник и так далее до бесконечности. Найдите сумму площадей всех этих треугольников.

Решение:



В треугольнике $A_1B_1C_1$:

$A_1B_1 = a$, следовательно, площадь этого треугольника: $S_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

В треугольнике $A_2B_2C_2$:

$A_2B_2 = \frac{a}{2}$, следовательно, площадь этого треугольника: $S_2 = \frac{a^2\sqrt{3}}{16}$.

В треугольнике $A_3B_3C_3$: $A_3B_3 = \frac{a}{4}$, площадь $S_3 = \frac{a^2\sqrt{3}}{64}$.

Площади треугольников образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, у которой $b_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, $q = \frac{1}{4}$.

Сумма площадей всех этих треугольников:

$$S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{4}{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ: $\frac{a^2\sqrt{3}}{3}$.

Решение нестандартных задач на геометрическую прогрессию

Большие трудности у поступающих вызывают задачи, в которых обычного применения формул недостаточно. Рассмотрим несколько нестандартных задач на геометрическую прогрессию.

3.34. Сумма n первых членов геометрической прогрессии выражается формулой $S_n = 4\cdot\left(3^n - 1\right)$. Найдите первый член и знаменатель геометрической прогрессии.

Решение:

$b_n = S_n - S_{n-1} = 4\cdot(3^n - 1) - 4\cdot(3^{n-1} - 1) = 4\cdot 3^n - 4 - 4\cdot 3^{n-1} + 4 =$

$= 4\cdot 3^{n-1}(3-1) = 8\cdot 3^{n-1}$

Из полученного соотношения $b_n = 8\cdot 3^{n-1}$ следует:

$b_1 = 8$, $q = 3$.

Ответ: $b_1 = 8$, $q = 3$.

3.35. В геометрической прогрессии сумма первых ста девяти членов больше суммы первых ста членов этой же прогрессии на 12. Найдите сумму первых девяти членов этой прогрессии, если знаменатель прогрессии равен q.

Решение:

Из условия следует: $S_{109} - S_{100} = 12$.

$$\frac{b_1(q^{109}-1)}{q-1} - \frac{b_1(q^{100}-1)}{q-1} = 12$$

$$\frac{b_1}{q-1}(q^{109} - 1 - q^{100} + 1) = 12$$

$$\frac{b_1}{q-1}(q^{109} - q^{100}) = 12$$

$$\frac{b_1 q^{100}}{q-1}(q^9 - 1) = 12$$

$$\underbrace{\frac{b_1}{q-1}(q^9 - 1)}_{S_9} = \frac{12}{q^{100}}$$

$$S_9 = \frac{12}{q^{100}}.$$

Ответ: $\dfrac{12}{q^{100}}$.

3.36. В геометрической прогрессии $\frac{b_{18}+b_{19}}{b_6+b_7}=13$. Найдите отношение суммы первых двадцати четырех ее членов к сумме первых ее двенадцати членов.

Решение:

Рассмотрим равенство: $\frac{b_{18}+b_{19}}{b_6+b_7}=13$.

$\frac{b_1q^{17}+b_1q^{18}}{b_1q^5+b_1q^6}=13$;

$\frac{b_1q^{17}(1+q)}{b_1q^5(1+q)}=13$;

$q^{12}=13$.

Вычислим отношение:

$$\frac{S_{24}}{S_{12}}=\frac{b_1(q^{24}-1)}{q-1}:\frac{b_1(q^{12}-1)}{q-1}=\frac{q^{24}-1}{q^{12}-1}=\frac{(q^{12}-1)(q^{12}+1)}{q^{12}-1}=$$

$=q^{12}+1=13+1=14$.

Ответ: 14.

3.37. Первый член геометрической прогрессии (b_n) равен единице. При каком значении знаменателя прогрессии величина $4b_2+5b_3$ имеет минимальное значение.

Решение:

$b_1=1$

$$4b_2+5b_3=4b_1q+5b_1q^2=4q+5q^2=5\left(q^2+\frac{4}{5}q+\frac{4}{25}\right)-\frac{4}{5}=$$

$$=5\left(q+\frac{2}{5}\right)^2-\frac{4}{5}$$

Минимальное значение выражение $5\left(q+\frac{2}{5}\right)^2-\frac{4}{5}$ принимает, если

$\left(q+\frac{2}{5}\right)^2=0$ или $q=-\frac{2}{5}$.

Ответ: $q=-\frac{2}{5}$.

3.38. Сумма трех чисел, образующих возрастающую геометрическую прогрессию, равна 42. Сумма логарифмов этих чисел по основанию 2 равна 9. Найдите знаменатель прогрессии.

Решение:

Запишем условие задачи в виде системы:

$$\begin{cases} b_1+b_2+b_3=42, \\ \log_2 b_1+\log_2 b_2+\log_2 b_3=9; \end{cases} \quad \begin{cases} b_1+b_2+b_3=42, \\ \log_2(b_1\cdot b_2\cdot b_3)=9; \end{cases} \quad \begin{cases} b_1+b_2+b_3=42, \\ b_1\cdot b_2\cdot b_3=2^9; \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1+b_1q+b_1q^2=42, \\ b_1\cdot b_1q\cdot b_1q^2=2^9; \end{cases} \quad \begin{cases} b_1(1+q+q^2)=42, \\ b_1^3q^3=2^9; \end{cases} \quad \begin{cases} b_1(1+q+q^2)=42, \\ b_1q=2^3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{8}{q}\cdot(1+q+q^2)=42, \\ b_1=\frac{8}{q}; \end{cases} \quad \begin{cases} 4q^2-17q+4=0, \\ b_1=\frac{8}{q}; \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} q=4, \\ b_1=2; \end{cases} \\ \begin{cases} q=\frac{1}{4}, \\ b_1=32. \end{cases} \end{array}\right.$$

С учетом того, что геометрическая прогрессия возрастающая: $b_1=2$, $q=4$.

Ответ: $q=4$.

3.39. Решите уравнение: $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\ldots-\frac{1}{1024}=\frac{x+1}{512}$.

Решение:

Левая часть уравнения представляет собой конечную сумму геометрической прогрессии, в которой $b_1=\frac{1}{2}$, $q=-\frac{1}{2}$.

Данную сумму можно вычислить по формуле:

$$S_n=\frac{b_nq-b_1}{q-1}=\frac{-\frac{1}{1024}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}-1}=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1024}-1\right)}{-\frac{3}{2}}=\frac{1023}{3\cdot 1024}=\frac{341}{1024}.$$

Тогда исходное уравнение равносильно:

$$\frac{341}{1024}=\frac{x+1}{512};\quad 341=2x+2;\quad x=169{,}5.$$

Ответ: $x=169{,}5$.

3.40. **Каждый член геометрической прогрессии равен одной шестой суммы двух последующих членов. Найдите ее знаменатель, если $b_1=1$.**

Решение:

По условию: $b_n=\frac{1}{6}\left(b_{n+1}+b_{n+2}\right)$.

Это соотношение можно переписать как:

$$b_n=\frac{1}{6}\left(b_n\cdot q+b_n\cdot q^2\right)$$

$$1=\frac{1}{6}\left(q+q^2\right).$$

$$q^2+q-6=0$$

$$q_1=-3,\ q_2=2.$$

Ответ: -3 или 2.

3.41. **В геометрической прогрессии $b_5=\sqrt[3]{2}$. Найдите произведение первых девяти членов этой прогрессии.**

Решение:

$$b_5=b_1q^4=\sqrt[3]{2}$$

Нужно найти произведение:

$$b_1\cdot b_2\cdot b_3\cdot\ldots\cdot b_9=b_1\cdot b_1q\cdot b_1q^2\cdot\ldots\cdot b_1q^8=b_1^9\cdot q^{1+2+3+\ldots+8}=$$

$$=b_1^9\cdot q^{\frac{1+8}{2}\cdot 8}=b_1^9\cdot q^{36}=\left(b_1q^4\right)^9=\left(\sqrt[3]{2}\right)^9=2^3=8.$$

Ответ: 8.



3.42. Числа a, b, c составляют арифметическую прогрессию с разностью 4. Найдите эти числа, если a, b, $c+8$ – последовательные члены геометрической прогрессии.

Решение:

По условию:

	a	b	c
Арифметическая прогрессия	a	$a+4$	$a+8$
Геометрическая прогрессия	a	$a+4$	$a+16$

Используя характеристическое свойство геометрической прогрессии $b_k^2 = b_{k-1} \cdot b_{k+1}$, составим уравнение относительно a:

$(a+4)^2 = a(a+16)$

$a^2 + 8a + 16 = a^2 + 16a$

$8a = 16$

$a = 2$

Тогда $b = a+4 = 6$, $c = a+8 = 10$.

Ответ: 2, 6, 10.

3.43. Три числа образуют геометрическую прогрессию. Если среднее из них удвоить, то получится арифметическая прогрессия. Найдите знаменатель данной прогрессии.

Решение:

По условию:

Геометрическая прогрессия	b_1	$b_1 q$	$b_1 q^2$
Арифметическая прогрессия	b_1	$2b_1 q$	$b_1 q^2$

Используя характеристическое свойство арифметической прогрессии $a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}$, составим уравнение относительно q:

$$2b_1 q = \frac{b_1 + b_1 q^2}{2} \qquad (b_1 \neq 0)$$

$$4q = 1 + q^2$$

$$q^2 - 4q + 1 = 0$$

$$q_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}.$$

Ответ: $q_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$.

3.44. Сумма трех положительных чисел, составляющих арифметическую прогрессию, равна 15. Если ко второму числу прибавить 1, к третьему прибавить 5, а первое оставить без изменения, то получится геометрическая прогрессия. Найдите произведение исходных чисел.

Решение:

По условию:

Арифметическая прогрессия	a_1	$a_1 + d$	$a_1 + 2d$
Геометрическая прогрессия	a_1	$a_1 + d + 1$	$a_1 + 2d + 5$

Зная, что сумма арифметической прогрессии равна 15, а также, используя характеристическое свойство геометрической прогрессии, составим систему уравнений относительно a_1 и d:

$$\begin{cases} a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) = 15, \\ (a_1 + d + 1)^2 = a_1(a_1 + 2d + 5); \end{cases} \qquad \begin{cases} 3a_1 + 3d = 15, \\ (a_1 + d + 1)^2 = a_1(a_1 + 2d + 5); \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = 5 - d, \\ (5 - d + d + 1)^2 = (5 - d)(5 - d + 2d + 5); \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 = 5 - d, \\ 36 = (5 - d)(d + 10); \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = 5-d, \\ d^2+5d-14=0; \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a_1 = 3, \\ d = 2; \end{cases} \\ \begin{cases} a_1 = 12, \\ d = -7. \end{cases} \end{array}\right.$$

a_1, a_2, a_3 – положительные числа, следовательно, $a_1 = 3$, $d = 2$.

Тогда $a_1 = 3$, $a_2 = 5$, $a_3 = 7$; $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$.

Ответ: 105.

3.45. Сумма трех чисел, составляющих возрастающую геометрическую прогрессию, равна 26. Если к этим числам прибавить соответственно 1, 7 и 5, то полученные числа составят арифметическую прогрессию. Найдите знаменатель данной прогрессии.

Решение:

По условию:

Геометрическая прогрессия	b_1	$b_1 q$	$b_1 q^2$
Арифметическая прогрессия	b_1+1	$b_1 q+7$	$b_1 q^2+5$

Зная, что сумма чисел равна 26, а также, используя характеристическое свойство арифметической прогрессии, составим систему уравнений относительно b_1 и q:

$$\begin{cases} b_1+b_1 q+b_1 q^2 = 26, \\ 2(b_1 q+7) = b_1+b_1 q^2+6; \end{cases} \quad \begin{cases} b_1+b_1 q+b_1 q^2 = 26, \\ b_1 q^2-2b_1 q+b_1 = 8; \end{cases} \quad \begin{cases} b_1(1+q+q^2) = 26, \\ b_1(q^2-2q+1) = 8. \end{cases}$$

Разделим первое уравнение системы на второе:

$$\begin{cases} \dfrac{1+q+q^2}{q^2-2q+1} = \dfrac{13}{4}, \\ b_1 = \dfrac{8}{q^2-2q+1}; \end{cases} \quad \begin{cases} 3q^2-10q+3 = 0, \\ b_1 = \dfrac{8}{q^2-2q+1}; \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} q = 3, \\ b_1 = 2; \end{cases} \\ \begin{cases} q = \dfrac{1}{3}, \\ b_1 = 18. \end{cases} \end{array}\right.$$

b_1, b_2, b_3 – возрастающая геометрическая прогрессия, то есть $q = 3$.

Ответ: $q = 3$.

3.46. Найдите четыре числа, если первые три из них составляют арифметическую прогрессию, последние три – геометрическую прогрессию. Известно, что разность арифметической прогрессии равна 4, а знаменатель геометрической прогрессии равен $\frac{4}{3}$.

Решение:

Обозначим четвертое число за x. По условию:

Арифметическая прогрессия	a_1	a_1+4	a_1+8	
Геометрическая прогрессия		a_1+4	a_1+8	x

Зная, что знаменатель геометрической прогрессии равен $\frac{4}{3}$, а также, используя характеристическое свойство геометрической прогрессии, составим систему уравнений относительно a_1 и x:

$$\begin{cases} \dfrac{a_1+8}{a_1+4}=\dfrac{4}{3}, \\ (a_1+8)^2=(a_1+4)x; \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1=8, \\ (8+8)^2=(8+4)x; \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1=8, \\ x=\dfrac{64}{3}. \end{cases}$$

Тогда $a_1=8$, $a_2=8+4=12$, $a_3=12+4=16$.

Ответ: 8, 12, 16, $\frac{64}{3}$.

3.47. Первые три из целых чисел a, b, c, k образуют арифметическую прогрессию, последние три – геометрическую прогрессию. Найдите k, если $a+k=36$, $b+c=27$.

Решение:

Обозначим первое число за x. По условию:

	a	b	c	k
Геометрическая прогрессия		b_1	$b_1 q$	$b_1 q^2$
Арифметическая прогрессия	x	b_1	$b_1 q$	

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2b_1 = x + b_1 q, \\ x + b_1 q^2 = 36, \\ b_1 + b_1 q = 27; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2b_1 - b_1 q, \\ x = 36 - b_1 q^2, \\ b_1 + b_1 q = 27; \end{cases} \quad \begin{cases} 2b_1 - b_1 q = 36 - b_1 q^2, \\ x = 2b_1 - b_1 q, \\ b_1(1+q) = 27; \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1(q^2 - q + 2) = 36, \\ b_1(1+q) = 27, \\ x = 2b_1 - b_1 q. \end{cases}$$

Разделив первое уравнение системы на второе, получим:

$$\frac{q^2 - q + 2}{1+q} = \frac{4}{3}$$

$$3q^2 - 7q + 2 = 0$$

$$q_1 = 2, \; q_2 = \frac{1}{3}$$

Если $q = 2$, то $b_1 = 9$, $x = 0$.

Если $q = \frac{1}{3}$, то $b_1 = \frac{81}{4}$, $x = \frac{135}{4}$.

Так как по условию a, b, c, k – целые числа, то второй случай исключается. Тогда $a = 0$, $b = 9$, $c = 9 \cdot 2 = 18$, $k = 9 \cdot 4 = 36$.

Ответ: $k = 36$.

3.48. Пять различных чисел составляют арифметическую прогрессию. Если удалить ее второй и третий члены, то три оставшихся числа составят геометрическую прогрессию. Найдите ее знаменатель.

Решение:

Арифметическая прогрессия	a_1	$a_1 + d$	$a_1 + 2d$	$a_1 + 3d$	$a_1 + 4d$
Геометрическая прогрессия	a_1			$a_1 + 3d$	$a_1 + 4d$

По характеристическому свойству геометрической прогрессии должно быть выполнено соотношение:

$$(a_1+3d)^2=a_1(a_1+4d)$$

$$a_1^2+6a_1d+9d^2=a_1^2+4a_1d$$

$$2a_1d+9d^2=0$$

$$d(2a_1+9d)=0$$

По условию задачи числа различны, следовательно $d\neq0$.

Тогда $2a_1+9d=0$ или $a_1=-4{,}5d$.

Используя последнее соотношение, можно найти знаменатель геометрической прогрессии как отношение второго члена геометрической прогрессии к первому:

$$q=\frac{a_1+3d}{a_1}=\frac{-4{,}5d+3d}{-4{,}5d}=\frac{-1{,}5d}{-4{,}5d}=\frac{1}{3}.$$

Ответ: $q=\frac{1}{3}$.

3.49. Первый член возрастающей арифметической прогрессии и первый член возрастающей геометрической прогрессии равны 3. Второй член арифметической прогрессии больше второго члена геометрической прогрессии на 6; третьи члены прогрессий одинаковы. Найдите эти прогрессии.

Решение:

По условию:

Арифметическая прогрессия	3	$3+d$	$3+2d$
Геометрическая прогрессия	3	$3q$	$3q^2$

Зная, что второй член арифметической прогрессии больше второго члена геометрической прогрессии на 6, а третьи члены прогрессий одинаковы, составим систему уравнений:

$$\begin{cases}3+d-3q=6,\\3+2d=3q^2;\end{cases}\quad\begin{cases}d=3+3q,\\3+2(3+3q)=3q^2;\end{cases}\quad\begin{cases}d=3+3q,\\q^2-2q-3=0;\end{cases}\quad\left[\begin{array}{l}\begin{cases}q=3,\\d=12;\end{cases}\\\begin{cases}q=-1,\\d=0.\end{cases}\end{array}\right.$$

$d \neq 0$; $q \neq -1$, так как арифметическая и геометрическая прогрессии возрастающие. Тогда $q = 3$, $d = 12$.

Арифметическая прогрессия: 3; 15; 27.

Геометрическая прогрессия: 3; 9; 27.

Ответ: 3; 15; 27 и 3; 9; 27.

3.50. Четыре числа составляют арифметическую прогрессию. Если к ним соответственно прибавить 1; 1; 3; 9, то получится геометрическая прогрессия. Найдите эти числа.

Решение:

Сформулируем условие задачи по–другому. Пусть изначально даны четыре числа, которые составляют геометрическую прогрессию. Если от них соответственно **отнять** 1; 1; 3; 9, то получится арифметическая прогрессия. Найдем эти числа.

Геометрическая прогрессия	b_1	$b_1 q$	$b_1 q^2$	$b_1 q^3$
Арифметическая прогрессия	$b_1 - 1$	$b_1 q - 1$	$b_1 q^2 - 3$	$b_1 q^3 - 9$

Используя характеристическое свойство арифметической прогрессии, составим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2(b_1 q - 1) = b_1 - 1 + b_1 q^2 - 3, \\ 2(b_1 q^2 - 3) = b_1 q - 1 + b_1 q^3 - 9; \end{cases} \qquad \begin{cases} b_1(q^2 - 2q + 1) = 2, \\ b_1 q(q^2 - 2q + 1) = 4. \end{cases}$$

Разделив второе уравнение системы на первое, получим $q = 2$.

Тогда $b_1 = \dfrac{2}{q^2 - 2q + 1} = 2$.

Геометрическая прогрессия: 2; 4; 8; 16.

Арифметическая прогрессия: 1; 3; 5; 7.

Ответ: 1; 3; 5; 7.

ГЛАВА V. РЕШЕНИЕ ТЕКСТОВЫХ ЗАДАЧ

Решение текстовых задач у многих учащихся вызывает затруднения. Универсальных методов решения текстовых задач не существует, но, решая такие задачи, можно придерживаться приведенной ниже схемы:

1. Выбрать неизвестные.

В большинстве случаев удобно за неизвестное взять ту величину, которую требуется определить в задаче. Такой вариант следует рассматривать в первую очередь, но это правило не является жестким, иногда проще составить уравнения, в которые входят другие величины, и лишь после их определения найти окончательный ответ. Важным моментом является число неизвестных; чем больше неизвестных, тем легче составлять уравнения (или неравенства), но при этом усложняется само решение; не надо вводить новые неизвестные, если какая–то величина элементарно выражается через уже введенные.

2. Составить уравнения (возможно неравенства).

В процессе составления системы уравнений важно использовать все условия задачи. Количество уравнений должно совпадать с количеством неизвестных, за исключением случая, когда требуется найти не сами величины, а лишь некоторое соотношение между ними.

3. Найти нужное неизвестное или комбинацию неизвестных.

Если приходится отбрасывать некоторые корни, полученные в ходе решения, то это необходимо делать, исходя из условий задачи, а не из соображений здравого смысла.

Текстовые задачи удобно классифицировать по следующим группам:

- задачи на движение;
- задачи на работу и производительность труда;
- задачи на проценты;
- задачи на сплавы, растворы и смеси;
- задачи на пропорциональное деление и числовые зависимости.

§1. ЗАДАЧИ НА ДВИЖЕНИЕ

Задачи на движение – классический тип текстовых задач. Разнообразные объекты движутся в одном или разных направлениях, в условии перечислен ряд данных, по которым требуется найти некоторую величину. Умение решать ту или иную задачу на движение зависит от многих факторов. Прежде всего, необходимо научиться различать основные типы задач и уметь решать простейшие из них.

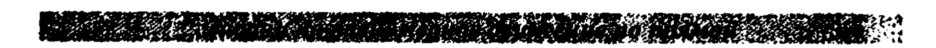
Основными типами задач на движение являются следующие:

– задачи на равномерное движение по прямой;

– задачи на движение по окружности;

– задачи на движение по воде;

– задачи на движение протяженных тел.



Основными компонентами этого типа задач являются:

S – пройденный путь, υ – скорость, t – время.

Зависимость между указанными величинами выражается формулами:

$$S=\upsilon\cdot t;\quad \upsilon=\frac{S}{t};\quad t=\frac{S}{\upsilon}.$$

Все указанные величины должны быть в одной системе единиц.

План решения:

1. В качестве неизвестных обычно выбирают расстояние (если оно не задано) или скорости движущихся объектов.

2. Для составления уравнений в таких задачах, как правило, пользуются следующими соображениями:

а) если два объекта начинают движение одновременно на встречу друг другу, то до момента их встречи пройдет время, равное $\frac{S}{\upsilon_1+\upsilon_2}$;

б) если объекты начинают движение в разное время, то до момента встречи больше времени затрачивает тот, который выходит раньше;

в) если объекты прошли одинаковое расстояние, то величину этого расстояния удобно принять за общее неизвестное этой задачи;

г) при движении объектов в одну сторону $(\upsilon_1 > \upsilon_2)$ время, через которое первый объект догонит второй, равно $\dfrac{S}{\upsilon_1 - \upsilon_2}$.

В задачах на движение полезно составить иллюстративный чертеж. Этот чертеж следует делать таким, чтобы на нем была видна динамика движения со всеми характерными моментами: встречами, остановками и поворотами. Хороший чертеж позволяет понять содержание задачи.

План решения задачи сводится к следующему:

1) выбираем одну из величин, которая по условию задачи является неизвестной (*скорость*), и обозначаем ее через x;

2) устанавливаем, какая из величин по условию задачи является известной (*путь*);

3) третью из оставшихся величин (*время*) выражаем через неизвестную $\left(t = \dfrac{S}{\upsilon}\right)$;

4) заполняем таблицу, составляем уравнение на основании условия задачи, в котором указано, как именно изменилась третья величина.

При движении объектов могут быть различные ситуации.

1 ситуация. *Движение объекта из одного пункта в другой*

1.1. Теплоход должен был пройти 72 *км* с определенной скоростью. Фактически, первую половину пути он шел со скоростью на 3 *км/ч* меньше, а вторую половину со скоростью на 3 *км/ч* больше, чем ему полагалось. На весь путь теплоход затратил 5 *ч*. На сколько минут опоздал теплоход?

***Решение*:**

Пусть x *км/ч* – скорость, с которой должен был двигаться теплоход, $x > 0$.

Чертим таблицу. Количество столбцов должно соответствовать числу величин $(S,\ \upsilon,\ t)$, а количество строк – числу процессов.

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
I половина пути	36	$x-3$	$\frac{36}{x-3}$	5 ч
II половина пути	36	$x+3$	$\frac{36}{x+3}$	

Зная, что на весь путь теплоход затратил 5 *ч*, составим уравнение:

$$\frac{36}{x-3}+\frac{36}{x+3}=5$$

$$36(x+3+x-3)=5x^2-45$$

$$5x^2-72x-45=0$$

$x_1=15$; $x_2=-0,6$ – не удовлетворяет условию задачи.

Плановое время движения равно: $t=\frac{72}{15}=\frac{24}{5}=4\frac{4}{5}=4$ *ч* 48 *мин*.

Теплоход опоздал на 5 *ч* – 4 *ч* 48 *мин* = 12 *мин*.

Ответ: 12 *мин*.

1.2. Расстояние между двумя станциями железной дороги 120 *км* Первый поезд проходит это расстояние на 50 *мин* скорее, чем второй, скорость первого поезда больше скорости второго на 12 *км/ч*. Определите скорости обоих поездов.

Решение:

Пусть скорость второго поезда x *км/ч* $(x>0)$, тогда скорость первого поезда $(x+12)$ *км/ч*.

Составим таблицу по условию задачи.

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
I поезд	120	$x+12$	$\frac{120}{x+12}$	на 50 *мин* меньше
II поезд	120	x	$\frac{120}{x}$	

$$50\ мин=\frac{50}{60}=\frac{5}{6}\ ч$$

Зная, что первый поезд проходит 120 *км* на $\frac{5}{6}$ *ч* скорее, чем второй, составим уравнение:

$$\frac{120}{x}-\frac{120}{x+12}=\frac{5}{6}$$

$$\frac{24}{x}-\frac{24}{x+12}=\frac{1}{6}$$

$$\frac{24(x+12-x)}{x^2+12x}=\frac{1}{6}$$

$$x^2+12x-1\,728=0$$

$$x_1=-48; \quad x_2=36$$

По условию задачи $x>0$, следовательно:

скорость первого поезда 48 *км/ч*; скорость второго поезда 36 *км/ч*.

Ответ: 48 *км/ч*; 36 *км/ч*.

1.3. Велосипедист проехал 25 *км*. При этом один час он ехал по ровной дороге, а один час в гору. Какова скорость (в *км/ч*) велосипедиста по ровной дороге, если каждый километр по ровной дороге он проезжал на 2 минуты быстрее, чем в гору?

Решение:

Обозначим скорость велосипедиста по ровной дороге через x (*км/ч*); а скорость по дороге в гору через y (*км/ч*). $x>0$, $y>0$.

Составим таблицу.

	v (*км/ч*)	t (*ч*)	$S=v\cdot t$ (*км*)		Время прохождения 1 *км* $t_1=\frac{1}{v}$ (*ч*)	
По ровной дороге	x	1	x	25 *км*	$\frac{1}{x}$	на 2 *мин* меньше
В гору	y	1	y		$\frac{1}{y}$	

$$2\ мин=\frac{2}{60}=\frac{1}{30}\ ч$$

По данным таблицы составим систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y=25, \\ \dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{30}; \end{cases} \qquad \begin{cases} y=25-x, \\ \dfrac{1}{25-x}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{30}; \end{cases} \qquad \begin{cases} y=25-x, \\ \dfrac{2x-25}{25x-x^2}=\dfrac{1}{30}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=25-x, \\ x^2+35x-750=0; \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-50, \\ y=75; \end{cases} \\ \begin{cases} x=15, \\ y=10. \end{cases} \end{array}\right.$$

По условию задачи $x>0$, следовательно, скорость велосипедиста по ровной дороге 15 *км/ч*.

Ответ: 15 *км/ч*.

1.4. Легковая машина за 2 *ч* проходит столько же километров, сколько грузовик за 3 *ч*. Но если скорость легковой машины уменьшить на 30 *км/ч*, то она за час пройдет на 10 *км* меньше, чем грузовик за это же время. Определите их скорости.

Решение:

x *км/ч* – скорость легковой машины, y *км/ч* – скорость грузовика.

$x>0$, $y>0$.

Составим таблицу.

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
Легковая	x	2	$2x$	равны
Грузовик	y	3	$3y$	
Если уменьшить скорость легковой машины:				
Легковая	$x-30$	1	$x-30$	на 10 *км* меньше
Грузовик	y	1	y	

По данным таблицы составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x = 3y, \\ y - (x - 30) = 10; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - 3y = 0, \\ -x + y = -20; \mid \cdot 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - 3y = 0, \\ -2x + 2y = -40; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 40, \\ x = 60. \end{cases}$$

Ответ: 60 *км/ч*, 40 *км/ч*.

1.5. Турист проплыл по реке на лодке 90 *км*, а затем прошел ешком 10 *км*. При этом на пеший путь было затрачено на 4 *ч* меньше ремени, чем на путь по реке. Если бы турист шел пешком столько ремени, сколько он плыл по реке, а плыл по реке столько времени, олько шел пешком, то эти расстояния были бы равны. Сколько времени н шел пешком и сколько плыл по реке?

Решение:

Пусть скорость движения туриста по реке x *км/ч*, а скорость движения пешком y *км/ч*, $x > 0$, $y > 0$.

Первое условие				
По реке	90	x	$\frac{90}{x}$	на 4 ч больше
Пешком	10	y	$\frac{10}{y}$	
Второе условие				
По реке	$\frac{10}{y}$	x	$x \cdot \frac{10}{y}$	равны
Пешком	$\frac{90}{x}$	y	$y \cdot \frac{90}{x}$	

По данным таблицы составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{90}{x} - \frac{10}{y} = 4, \\ \frac{10x}{y} = \frac{90y}{x}; \end{cases} \quad \begin{cases} 90y - 10x = 4xy, \\ x^2 = 9y^2; \end{cases} \quad \begin{cases} y^2 - 5y = 0, \\ x = 3y; \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 5, \\ x = 15; \end{cases} \\ \begin{cases} y = 0, \\ x = 0. \end{cases} \varnothing \end{array} \right.$$

Турист шел пешком $\frac{10}{5} = 2$ *ч*; плыл по реке $\frac{90}{15} = 6$ *ч*.

Ответ: 2 ч, 6 ч.

2 ситуация. Движение объекта из одного пункта в другой с остановкой в пути

1.6. Скорый поезд был задержан у семафора на 16 *мин* и нагнал опоздание на перегоне в 192 *км*, идя со скоростью, превышающей на 10 *км/ч* положенную по расписанию. Какова скорость поезда по расписанию?

***Решение*:**

Обозначим скорость поезда по расписанию через x (*км/ч*), $x > 0$.

Составим таблицу.

По расписанию	192	x	$\frac{192}{x}$	на 16 *мин* меньше
Фактически	192	$x+10$	$\frac{192}{x+10}$	

$$16 \text{ мин} = \frac{16}{60} = \frac{4}{15} \text{ ч}$$

Зная, что опоздание на 16 *мин* было ликвидировано за счет того, что поезд проехал 192 *км* со скоростью, увеличенной на 10 *км/ч*, составим уравнение:

$$\frac{192}{x} - \frac{192}{x+10} = \frac{4}{15}$$

$$\frac{48}{x} - \frac{48}{x+10} = \frac{1}{15}$$

$$x^2 + 10x - 7\,200 = 0$$

$x_1 = -90$ – не удовлетворяет условию задачи;

$x_2 = 80$.

Ответ: 80 *км/ч*.

1.7. Электропоезд вышел со станции A по направлению к станции B. Пройдя 450 *км*, что составило 75% всего пути AB, поезд должен был остановиться из-за снежного заноса. Через полчаса путь был расчищен, и машинист, увеличив скорость электропоезда на 15 *км/ч*, привел его на станцию B без опоздания. Найдите первоначальную скорость поезда.

Решение:

Расстояние между станциями A и B равно:

$450:0{,}75=600$ (*км*).

Путь, который осталось пройти поезду после остановки, равен:

$600-450=150$ *км*.

x *км/ч* -- скорость поезда по расписанию, $x>0$.

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
По расписанию	150	x	$\frac{150}{x}$	на 0,5 ч меньше
Фактически	150	$x+15$	$\frac{150}{x+15}$	

Зная, что задержка на 0,5 *ч* была ликвидирована за счет того, что поезд проехал оставшиеся 150 *км* со скоростью, увеличенной на 15 *км/ч*, составим уравнение:

$$\frac{150}{x}-\frac{150}{x+15}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{150(x+15-x)}{x^2+15x}=\frac{1}{2}$$

$$x^2+15x-4\,500=0$$

$x_1=-75$ – не удовлетворяет условию задачи;

$x_2=60$.

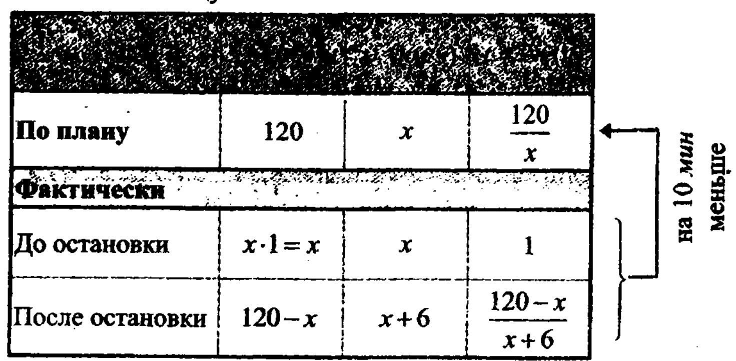
Ответ: 60 *км/ч*.

1.8. Автомобиль должен был пройти путь 120 *км* за намеченное время. Но через час после выезда он был вынужден остановиться на 10 минут. После этой остановки он продолжил путь, увеличив скорость на 6 *км/ч*. Какова была первоначальная скорость автомобиля, если в пункт назначения он успел в назначенное время?

Решение:

Пусть x *км/ч* – скорость, с которой по плану должен был ехать автомобиль, $x>0$.

Составим таблицу.



По плану	120	x	$\frac{120}{x}$
Фактически			
До остановки	$x\cdot 1 = x$	x	1
После остановки	$120-x$	$x+6$	$\frac{120-x}{x+6}$

Зная, что остановка длилась 10 *мин* $\left(\frac{1}{6}\text{ ч}\right)$, составим уравнение:

$$\frac{120}{x}-\left(1+\frac{120-x}{x+6}\right)=\frac{1}{6}$$

$$\frac{120}{x}-\frac{120-x}{x+6}=\frac{7}{6}$$

$$\frac{x^2+720}{x^2+6x}=\frac{7}{6}$$

$$x^2+42x-4\,320=0$$

$x_1=-90$ – не удовлетворяет условию задачи;

$x_2=48$.

Ответ: 48 *км/ч*.

Рассмотрим задачи на движение двух объектов.

<u>3 ситуация</u>. ***Движение двух объектов из разных пунктов навстречу друг другу (встречное движение)***

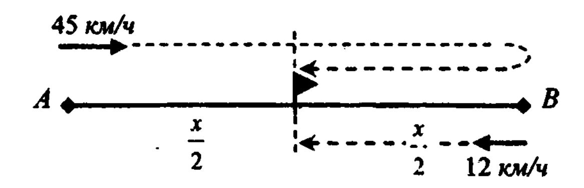
1.9. (Одновременное начало движения)

Из A и B одновременно выезжают автобус и велосипедист. Автобус, двигаясь со скоростью 45 *км/ч*, после 15-минутной стоянки в B отправляется в обратный рейс и встречает велосипедиста, движущегося со скоростью 12 *км/ч*, на середине пути AB. Найдите расстояние AB.

Решение:

Обозначим расстояние между пунктами A и B через x *км*, $x>0$.

Начнем решение задачи с рисунка, отображающего условие задачи.



Составим таблицу.

Автобус	$x+\frac{x}{2}=1,5x$	45	$\frac{1,5x}{45}=\frac{x}{30}$	на 15 *мин* больше
Велосипедист	$\frac{x}{2}$	12	$\frac{0,5x}{12}=\frac{x}{24}$	

Зная, что автобус останавливался на 15 *мин* $\left(\frac{1}{4}\text{ ч}\right)$, составим уравнение:

$$\frac{x}{24}-\frac{x}{30}=\frac{1}{4} \quad \Big|\cdot 120$$

$$5x-4x=30$$

$$x=30.$$

Ответ: 30 *км*.

1.10. (Неодновременное начало движения)

Из двух городов, расстояние между которыми 900 *км*, отправляются навстречу друг другу два поезда и встречаются на середине пути. Определите скорость каждого поезда, если первый вышел на 1 час позднее второго, и со скоростью на 5 *км/ч* большей, чем скорость второго поезда.

Решение:

Пусть скорость второго поезда x *км/ч*, $x > 0$.

Составим таблицу.

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
I поезд	$x+5$	450	$\frac{450}{x+5}$	на 1 ч больше
II поезд	x	450	$\frac{450}{x}$	

Зная, что первый поезд вышел на 1 час позднее второго, составим уравнение:

$$\frac{450}{x} - \frac{450}{x+5} = 1$$

$$450(x+5-x) = x^2 + 5x$$

$$x^2 + 5x - 2\,250 = 0$$

$x_1 = -50$ – не удовлетворяет условию задачи;

$x_2 = 45$.

Скорость первого поезда 50 *км/ч*; скорость второго поезда 45 *км/ч*.

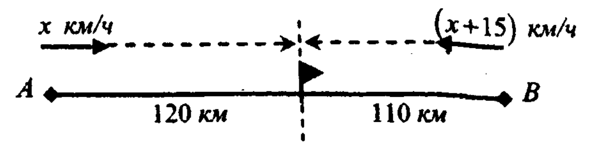
Ответ: 50 *км/*; 45 *км/ч*.

1.11. Поезд вышел из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 230 *км*. Через час навстречу ему из пункта B вышел второй поезд, скорость которого на 15 *км/ч* больше, чем у первого. Определите скорости поездов, если известно, что они встретились на расстоянии 120 *км* от пункта A.

Решение:

Пусть скорость первого поезда x *км/ч*, $x > 0$.

На рисунке ниже представлено встречное движение.



Составим таблицу.

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
I поезд	120	x	$\frac{120}{x}$	на 1 ч меньше
II поезд	110	$x+15$	$\frac{110}{x+15}$	

$$\frac{120}{x}-\frac{110}{x+15}=1$$

$$120x+1800-110x=x^2+15x$$

$$x^2+5x-1800=0$$

$x_1=-45$ – не удовлетворяет условию задачи;

$x_2=40$.

Скорость первого поезда 40 *км/ч*; скорость второго поезда 55 *км/ч*.

Ответ: 40 *км/*; 55 *км/ч*.

1.12. Два поезда выходят из двух городов, расстояние между которыми равно 360 *км*, и идут навстречу друг другу. Они могут встретиться на середине пути, если второй поезд выйдет со станции на 1,5 часа раньше первого. Если же они выйдут со станций одновременно, то через 5 часов расстояние между ними будет равно 90 *км*. Найдите скорость каждого поезда.

Решение:

Пусть x *км/ч* – скорость первого поезда; y *км/ч* – скорость второго поезда; $x>0$, $y>0$.

[illegible]				
Первое условие (неодновременное начало движения)				
I поезд	180	x	$\frac{180}{x}$	на 1,5 *ч* больше
II поезд	180	y	$\frac{180}{y}$	
[illegible]				
Второе условие (одновременное начало движения)				
I поезд	5	x	$5x$	$(360-90)$ *км*
II поезд	5	y	$5y$	

По данным таблицы составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases}\frac{180}{y}-\frac{180}{x}=1{,}5,\\ 5x+5y=360-90;\end{cases} \quad \begin{cases}\frac{60}{y}-\frac{60}{x}=0{,}5,\\ x+y=54;\end{cases} \quad \begin{cases}\frac{60}{54-x}-\frac{60}{x}=\frac{1}{2},\\ y=54-x;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^2+186x-6480=0,\\ y=54-x;\end{cases} \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=30,\\ y=24;\end{cases}\\ \begin{cases}x=-216,\\ y=270.\end{cases}\end{array}\right.$$

По условию задачи $x>0$, следовательно:

скорость первого поезда 30 *км/ч*; скорость второго поезда 24 *км/ч*.

Ответ: 30 *км/ч*; 24 *км/ч*.

1.13. Два самолета, вылетевшие одновременно из двух аэродромов A и B, расстояние между которыми равно 2 200 *км*, встретились через 2 часа. Первый прибыл в пункт B на 4 *ч* 35 *мин* раньше, чем второй в пункт A. Найдите скорости самолетов.

Решение:

Пусть x *км/ч* – скорость первого самолета; y *км/ч* – скорость второго самолета; $x>0$, $y>0$.

Составим таблицу.

[illegible]				
Первое условие (встреча)				
I самолет	2	x	$2x$	2 200 *км*
II самолет	2	y	$2y$	
[illegible]				
Второе условие (прибытие в пункт назначения)				
I самолет	2 200	x	$\frac{2\,200}{x}$	на 4 *ч* 35 *мин* меньше
II самолет	2 200	y	$\frac{2\,200}{y}$	

4 *ч* 35 *мин* $=4\frac{35}{60}$ *ч* $=4\frac{7}{12}$ *ч*

По данным таблицы составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases}2x+2y=2\,200,\\ \frac{2\,200}{y}-\frac{2\,200}{x}=4\frac{7}{12};\end{cases}\qquad \begin{cases}x+y=1100,\\ 480(x-y)=xy;\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=1100-x,\\ 480(2x-1100)=x(1100-x);\end{cases}\qquad \begin{cases}y=1100-x,\\ x^2-140x-480\cdot1100=0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=1100-x,\\ x^2-140x-800\cdot660=0;\end{cases}\qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=800,\\ y=300;\end{cases}\\ \begin{cases}x=-660,\\ y=1760.\end{cases}\ \varnothing\end{array}\right.$$

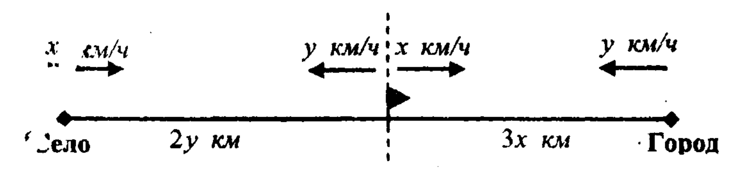
Скорость первого самолета 800 *км/ч*; скорость второго – 300 *км/ч*.

Ответ: 800 *км/ч*, 300 *км/ч*.

1.14. Из села в город, расстояние до которого 72 *км*, выехал велосипедист. Через час из города в село выехал другой велосипедист и прибыл в село через 2 *ч* после их встречи. Найдите скорость первого велосипедиста, если он прибыл в город через 3 *ч* после встречи.

***Решение*:**

Пусть скорость первого велосипедиста x *км/ч*,
скорость второго велосипедиста y *км/ч*.



Составим таблицу.

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	
Движение после встречи				
I велосипедист	3	x	$3x$	72 *км*
II велосипедист	2	y	$2y$	
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	
Движение до встречи				
I велосипедист	$2y$	x	$\frac{2y}{x}$	на 1 ч больше
II велосипедист	$3x$	y	$\frac{3x}{y}$	

По данным таблицы составим и решим систему уравнений.

$$\begin{cases} 3x+2y=72, \\ \dfrac{2y}{x}-\dfrac{3x}{y}=1. \end{cases}$$

Во втором уравнении системы сделаем замену: $a=\dfrac{y}{x}$.

Получим уравнение: $2a-\frac{3}{a}=1$.

$2a^2-a-3=0$

$a_1=1{,}5$; $a_2=-1$ – не подходит по условию задачи.

$\begin{cases}3x+2y=72,\\ \frac{y}{x}=1{,}5;\end{cases}$ $\begin{cases}3x+3x=72,\\ y=1{,}5x;\end{cases}$ $\begin{cases}x=12,\\ y=18.\end{cases}$

Ответ: 12 *км/ч*.

1.15. Два туриста вышли одновременно из пунктов A и B навстречу друг другу. Каждый, двигаясь с постоянной скоростью, придя в конечный пункт, немедленно поворачивал обратно. Первый раз они встретились в 12 *км* от B, второй раз – в 6 *км* от A через 6 часов после первой встречи. Найдите расстояние от A до B и скорости обоих туристов.

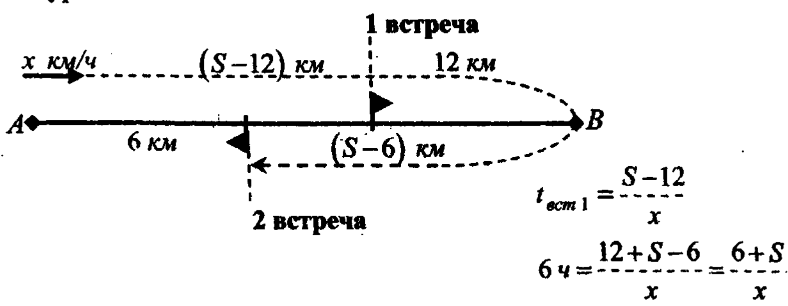
Решение:

Обозначим скорость первого туриста через x (*км/ч*), скорость второго туриста через y (*км/ч*), расстояние AB через S (*км*).

$S>0$; $x, y>0$.

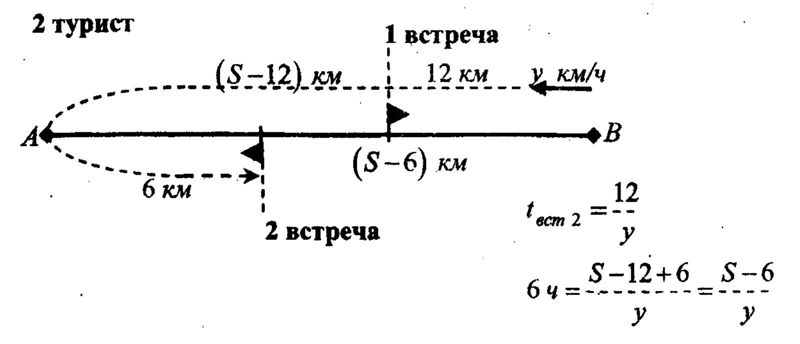
Рассмотрим движение, соответствующее условию задачи, для каждого туриста в отдельности.

1 турист



$t_{вст\,1}=\frac{S-12}{x}$

$6\text{ ч}=\frac{12+S-6}{x}=\frac{6+S}{x}$



Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{6+S}{x} = 6, \\ \dfrac{S-6}{y} = 6, \\ \dfrac{S-12}{x} = \dfrac{12}{y}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{6+S}{6}, \\ y = \dfrac{S-6}{6}, \\ \dfrac{S-12}{6+S} = \dfrac{12}{S-6}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{6+S}{6}, \\ y = \dfrac{S-6}{6}, \\ S^2 - 30S = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 6, \\ y = 4, \\ S = 30. \end{cases}$$

Ответ: 30 *км*; 6 *км/ч* и 4 *км/ч*.

1.16. Из A в B и из B в A одновременно вышли два пешехода. Когда первый прошел половину пути, второму до конца пути осталось пройти 24 *км*, а когда второй прошел половину пути, первому до конца пути осталось пройти 15 *км*. Сколько километров останется пройти второму пешеходу после того, как первый закончит переход?

Решение:

Обозначим скорость первого туриста через x (*км/ч*), скорость второго туриста через y (*км/ч*), расстояние AB через S (*км*).

$S > 24$; $x, y > 0$.

1 пешеход прошел половину пути

$$\frac{S}{2x} = \frac{S-24}{y}$$

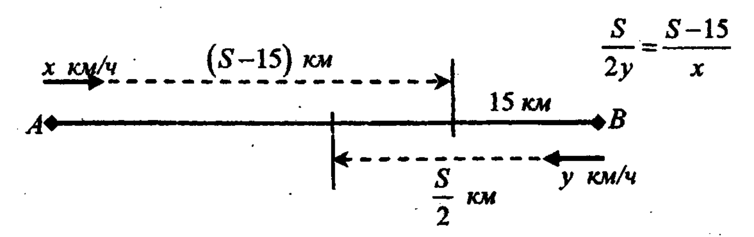
x км/ч — $\frac{S}{2}$ км

A — B

24 км

$(S-24)$ км — y км/ч

2 пешеход прошел половину пути



Составим систему уравнений:

$$\begin{cases}\frac{S}{2x}=\frac{S-24}{y},\\ \frac{S}{2y}=\frac{S-15}{x};\end{cases} \quad \begin{cases}\frac{S}{2x}\cdot y=S-24,\\ \frac{S}{2y}\cdot x=S-15;\end{cases} \quad \left| \begin{matrix}Замена:\\ t=\frac{y}{x}\end{matrix} \right| \quad \begin{cases}S\cdot t=2S-48,\\ \frac{S}{t}=2S-30.\end{cases}$$

Перемножив уравнения (правые и левые части соответственно), получим:

$S^2=(2S-48)(2S-30)$

$S^2-52S+480=0$

$S_1=12$ – не удовлетворяет условию задачи, так как $S>24$;

$S_2=40$.

Тогда $t=\frac{2S-48}{S}=\frac{2\cdot 40-48}{40}=\frac{32}{40}=\frac{4}{5}$.

Сделаем обратную замену: $\frac{y}{x}=\frac{4}{5}$. Следовательно, после того как первый пешеход закончит переход, второму останется пройти:

$S-\frac{S}{x}\cdot y=40-40\cdot\frac{4}{5}=8$ *км.*

Ответ: 8 *км.*

<u>4 ситуация</u>. Движение двух объектов в одном направлении из одного пункта в другой

1.17. **(Одновременное начало движения)**

Два мотоциклиста выезжают одновременно в город из пункта, отстоящего от него на 160 *км*. Скорость одного из них на 8 *км/ч* больше скорости другого, поэтому он приезжает к месту назначения на 40 минут раньше. Найдите меньшую из скоростей мотоциклистов.

Решение:

x *км/ч* – скорость первого мотоциклиста, $x > 0$.

Составим таблицу.

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
I мотоциклист	160	x	$\frac{160}{x}$	на 40 *мин* меньше
II мотоциклист	160	$x+8$	$\frac{160}{x+8}$	

Зная, что второй мотоциклист приезжает к месту назначения на 40 *мин* $\left(\frac{2}{3}\text{ ч}\right)$ раньше другого, составим уравнение:

$$\frac{160}{x} - \frac{160}{x+8} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{80}{x} - \frac{80}{x+8} = \frac{1}{3}$$

$$240(x+8-x) = x^2 + 8x$$

$$x^2 + 8x - 1920 = 0$$

$x_1 = -48$ – не удовлетворяет условию задачи;

$x_2 = 40$.

Ответ: 40 *км/ч*.

1.18. (Неодновременное начало движения)

Легковая машина выехала на 2 минуты позднее грузовой и догнала грузовую через 10 *км*. Определите скорости машин, если легковая проезжает в час на 15 *км* больше грузовой.

***Решение*:**

Пусть x *км/ч* – скорость грузовой машины, $x > 0$.

Если легковая машина в час проезжает на 15 *км* больше грузовой, значит ее скорость на 15 *км/ч* больше и равна $(x+15)$ *км/ч*.

Составим таблицу.

[illegible]	S (км)	υ (км/ч)	[illegible]	[illegible]
Легковая	10	$x+15$	$\frac{10}{x+15}$	на 2 *мин* больше
Грузовая	10	x	$\frac{10}{x}$	

Зная, что легковая машина выехала на 2 *мин* позднее грузовой, составим уравнение:

$$\frac{10}{x}-\frac{10}{x+15}=\frac{1}{30}$$

$$300(x+15-x)=x^2+15x$$

$$x^2+15x-4\,500=0$$

$x_1=-75$ – не удовлетворяет условию задачи;

$x_2=60$.

Скорость легковой машины 75 *км/ч*; скорость грузовой – 60 *км/ч*.

Ответ: 75 *км/ч*; 60 *км/ч*.

1.19. Из пункта A в пункт B вышел товарный поезд. Спустя 3 часа вслед за ним вышел пассажирский поезд, скорость которого на 30 *км/ч* больше скорости товарного. Через 15 часов после своего выхода пассажирский поезд оказался впереди товарного на 300 *км*. Определите скорость товарного поезда.

***Решение*:**

x *км/ч* – скорость товарного поезда, $x > 0$.

Составим таблицу.

Товарный поезд	$15+3=18$	x	$18x$	на 300 *км* больше
Пассажирский поезд	15	$x+30$	$15(x+30)$	

Зная, что через 15 *ч* пассажирский поезд обогнал товарный на 300 *км*, составим уравнение:

$$15(x+30)=18x+300$$

$$3x=150$$

$$x=50.$$

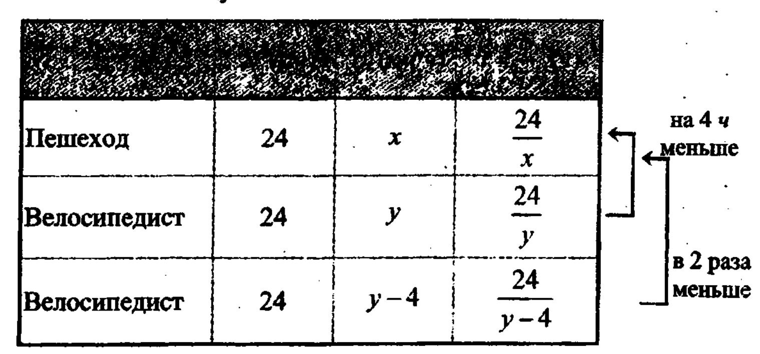
Ответ: 50 *км/ч*.

1.20. Из пункта A в пункт B, расположенный в 24 *км* от A, одновременно отправились велосипедист и пешеход. Велосипедист прибыл в пункт B на 4 *ч* раньше пешехода. Известно, что если бы велосипедист ехал со скоростью, меньшей на 4 *км/ч*, то на путь из A в B он затратил бы вдвое меньше времени, чем пешеход. Найдите скорость пешехода.

Решение:

Пусть x *км/ч* – скорость пешехода, y *км/ч* – скорость велосипедиста. $x > 0$, $y > 0$.

Составим таблицу.



Пешеход	24	x	$\frac{24}{x}$	на 4 *ч* меньше
Велосипедист	24	y	$\frac{24}{y}$	
Велосипедист	24	$y-4$	$\frac{24}{y-4}$	в 2 раза меньше

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases}\frac{24}{x}-\frac{24}{y}=4,\\ \frac{24}{y-4}\cdot 2=\frac{24}{x};\end{cases} \quad \begin{cases}\frac{6}{x}-\frac{6}{y}=1,\\ \frac{2}{y-4}=\frac{1}{x};\end{cases} \quad \begin{cases}\frac{6}{x}-\frac{6}{2x+4}=1,\\ y=2x+4;\end{cases} \quad \begin{cases}\frac{6}{x}-\frac{3}{x+2}=1,\\ y=2x+4;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^2-x-12=0,\\ y=2x+4;\end{cases} \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=4,\\ y=12;\end{cases}\\ \begin{cases}x=-3,\\ y=-2.\end{cases} \varnothing\end{array}\right.$$

Скорость пешехода равна 4 *км/ч*.

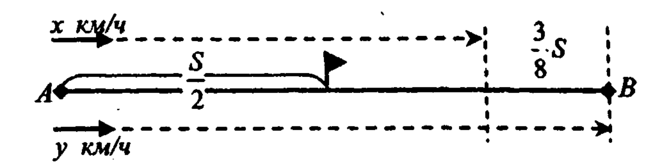
Ответ: 4 *км/ч*.

1.21. Из пункта A в пункт B вышел пешеход. Через $\frac{3}{4}$ *ч* вслед за ним выехал велосипедист. Когда велосипедист прибыл в пункт B, пешеходу оставалось пройти $\frac{3}{8}$ всего пути. Сколько времени потратил пешеход на весь путь, если известно, что велосипедист догнал пешехода на середине пути из A в B?

Решение:

Обозначим скорость пешехода через x (*км/ч*), скорость велосипедиста через y (*км/ч*), расстояние AB через S (*км*).

$S>0$; $x,y>0$.



	S (км)	v (км/ч)	$t=\frac{S}{v}$ (ч)	
Встреча на середине пути				
Пешеход	$\frac{S}{2}$	x	$\frac{S}{2x}$	на $\frac{3}{4}$ ч больше
Велосипедист	$\frac{S}{2}$	y	$\frac{S}{2y}$	
Велосипедист прибыл в пункт B				
Пешеход	$S-\frac{3S}{8}=\frac{5S}{8}$	x	$\frac{5S}{8x}$	на $\frac{3}{4}$ ч больше
Велосипедист	S	y	$\frac{S}{y}$	

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{S}{2x}-\dfrac{S}{2y}=\dfrac{3}{4},\\ \dfrac{5S}{8x}-\dfrac{S}{y}=\dfrac{3}{4}.\end{cases}$$

Вычтем из второго уравнения системы первое уравнение:

$$\begin{cases}\dfrac{S}{2x}-\dfrac{S}{2y}=\dfrac{3}{4},\\ \dfrac{S}{8x}-\dfrac{S}{2y}=0;\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{S}{2x}-\dfrac{S}{2\cdot 4x}=\dfrac{3}{4},\\ y=4x;\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{3S}{8x}=\dfrac{3}{4},\\ y=4x;\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{S}{x}=2,\\ y=4x.\end{cases}$$

На весь путь пешеход потратил времени $t=\dfrac{S}{x}$ ч.

Как видно из системы: $\dfrac{S}{x}=2$ ч.

Ответ: 2 ч.

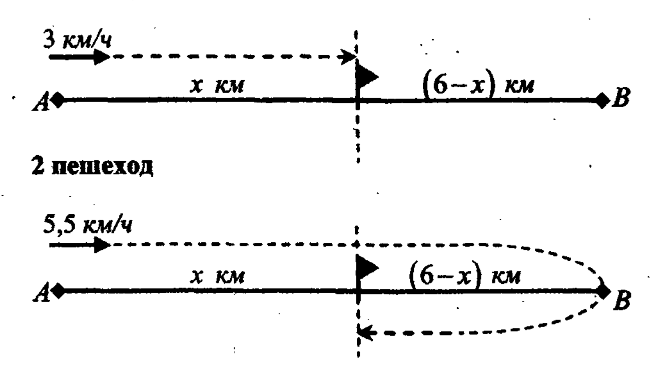
1.22. (Движение с возвратом)

Два человека отправляются из одного и того же места на шестикилометровую прогулку. Один идет со скоростью 3 *км/ч*, а другой – со скоростью 5,5 *км/ч*. Дойдя до места назначения, второй с той же скоростью возвращается обратно. На каком расстоянии от точки отправления произойдет их встреча?

***Решение*:**

Пусть x *км* – расстояние от точки отправления до места встречи.

1 пешеход



Составим таблицу.

I пешеход	x	3	$\frac{x}{3}$	равны
II пешеход	$6+6-x=12-x$	5,5	$\frac{12-x}{5,5}$	

$$\frac{x}{3}=\frac{12-x}{5,5}$$

$$5,5x=36-3x$$

$$8,5x=36$$

$$x=\frac{36}{8,5}=\frac{72}{17}.$$

Ответ: на расстоянии $\frac{72}{17}$ *км* от точки отправления.

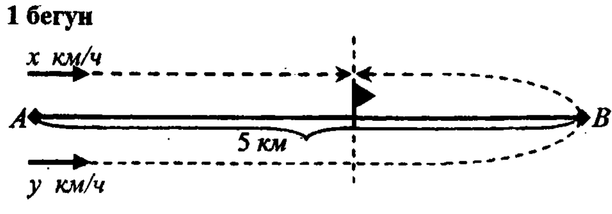
1.23. Два бегуна стартовали один за другим с интервалом в две минуты. Второй бегун догнал первого на расстоянии 1 *км* от точки старта, а пробежав от точки старта 5 *км*, он повернул обратно и встретился с первым бегуном. Эта встреча произошла через 20 *мин* после старта первого бегуна. Найдите скорость второго бегуна.

Решение:

x *км/ч* – скорость первого бегуна; y *км/ч* – скорость второго бегуна.

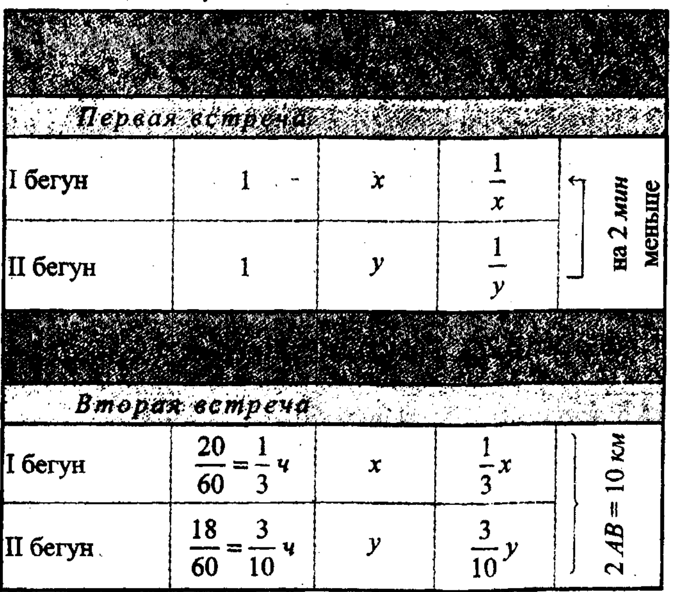
$y > x > 0$.

1 бегун



2 бегун

Составим таблицу.



Первая встреча				
I бегун	1	x	$\frac{1}{x}$	на 2 *мин* меньше
II бегун	1	y	$\frac{1}{y}$	
Вторая встреча				
I бегун	$\frac{20}{60}=\frac{1}{3}$ *ч*	x	$\frac{1}{3}x$	$2AB = 10$ *км*
II бегун	$\frac{18}{60}=\frac{3}{10}$ *ч*	y	$\frac{3}{10}y$	

По данным таблицы составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{30}, \\ \dfrac{1}{3}x + \dfrac{3}{10}y = 10; \end{cases} \qquad \begin{cases} 30(y-x) = xy, \\ 10x + 9y = 300; \end{cases} \qquad \begin{cases} x(y+30) = 30y, \\ 10x = 300 - 9y. \end{cases}$$

Разделим первое уравнение на второе:

$$\begin{cases} \dfrac{y+30}{10} = \dfrac{30y}{300-9y}, \\ 10x = 300 - 9y; \end{cases} \qquad \begin{cases} y^2 + 30y - 1\,000 = 0, \\ x = 30 - 0{,}9y; \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 20 \\ x = 12 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -50 \\ x = 75. \end{cases} \varnothing$$

Ответ: 20 *км/ч*

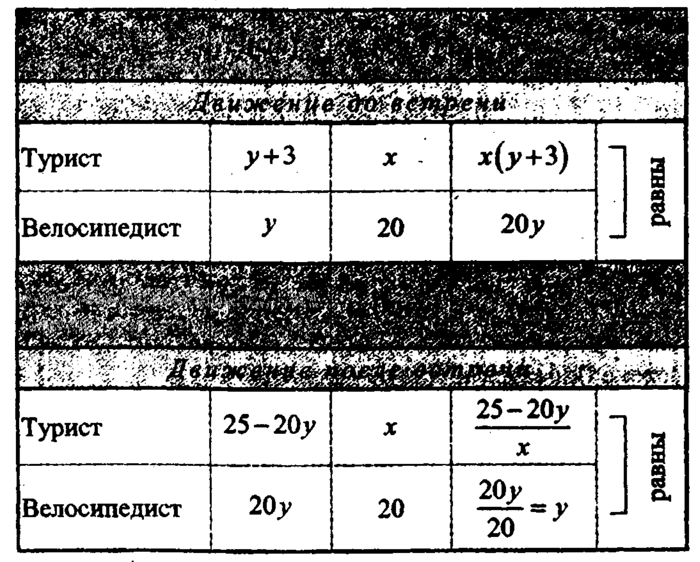
1.24. Расстояние между турбазами A и B равно 25 *км*. Из A в B вышел турист, а через три часа со скоростью 20 *км/ч* вслед за ним выехал велосипедист, который, догнав туриста, повернул назад и, двигаясь с той же скоростью, прибыл в пункт A одновременно с приходом туриста в B. Найдите скорость туриста.

Решение:

Пусть x *км/ч* – скорость туриста;

y *ч* – время, за которое велосипедист догнал туриста.

Составим таблицу.



[illegible]				
Движение до встречи				
Турист	$y+3$	x	$x(y+3)$	равны
Велосипедист	y	20	$20y$	
[illegible]				
Движение после встречи				
Турист	$25-20y$	x	$\dfrac{25-20y}{x}$	равны
Велосипедист	$20y$	20	$\dfrac{20y}{20} = y$	

По данным таблицы составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x(y+3)=20y, \\ \dfrac{25-20y}{x}=y; \end{cases} \quad \begin{cases} xy=20y-3x, \\ xy=25-20y; \end{cases} \quad \begin{cases} 25-20y=20y-3x, \\ xy=25-20y; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{40y-25}{3}, \\ \dfrac{(40y-25)y}{3}=25-20y; \end{cases} \quad \begin{cases} x=\dfrac{40y-25}{3}, \\ 8y^2+7y-15=0; \end{cases} \quad \begin{cases} x=5, \\ y=1. \end{cases}$$

Ответ: 5 *км/ч*.

<u>5 ситуация</u>. Движение двух объектов из одного пункта в перпендикулярных направлениях

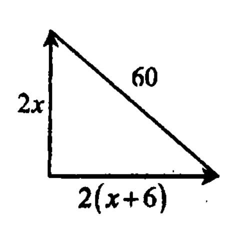
1.25. Из порта одновременно вышли два парохода: один на север, а второй на восток. Через два часа расстояние между ними оказалось равным 60 *км*. Найдите скорость каждого парохода, зная, что скорость одного из них на 6 *км/ч* больше скорости другого.

Решение:

x *км/ч* – скорость первого парохода, $x>0$.

$(x+6)$ *км/ч* – скорость второго парохода.

Составим таблицу.



[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
I пароход	2	x	$2x$
II пароход	2	$x+6$	$2(x+6)$

По теореме Пифагора составим уравнение:

$$(2x)^2+(2(x+6))^2=60^2$$

$$x^2+(x+6)^2=900$$

$$x^2+6x-432=0$$

$x_1 = 18$; $x_2 = -24$ – не удовлетворяет условию задачи.

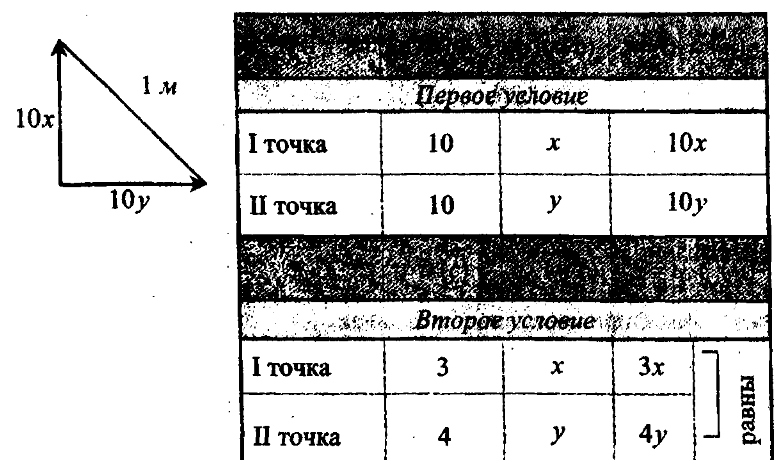
Ответ: 18 *км/ч*; 24 *км/ч*.

1.26. По двум взаимно перпендикулярным прямым движутся равномерно две точки. Сейчас они обе находятся в точке пересечения прямых, а через 10 *с* расстояние между ними будет 1 *м*. Найдите скорость каждой точки, если одна из них проходит за 3 *с* столько же, сколько другая – за 4 *с*.

Решение:

x *м/с* – скорость первой точки; y *м/с* – скорость второй точки.

$x, y > 0$.



Первое условие				
I точка	10	x	$10x$	
II точка	10	y	$10y$	
Второе условие				
I точка	3	x	$3x$	равны
II точка	4	y	$4y$	

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x = 4y, \\ 100x^2 + 100y^2 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{3}{4}x, \\ x^2 + y^2 = \frac{1}{100}; \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{3}{4}x, \\ \frac{25x^2}{16} = \frac{1}{100}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{3}{4}x, \\ \frac{5x}{4} = \frac{1}{10}; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0{,}06, \\ x = 0{,}08. \end{cases}$$

Ответ: 0,08 *м/с*; 0,06 *м/с*.

[illegible]

При решении задач на данную тему следует учитывать, что:

1) если при одновременном движении двух объектов по окружности из одной точки, один из них догоняет в первый раз другого, то разность пройденных ими к этому моменту расстояний равна длине окружности;

2) если два объекта движутся по окружности радиуса R с постоянными скоростями υ_1 и υ_2 в разных направлениях, то время между их встречами вычисляется по формуле $\dfrac{2\pi R}{\upsilon_1+\upsilon_2}$;

3) если два объекта движутся по окружности радиуса R с постоянными скоростями υ_1 и υ_2 в одном направлении, то время между их встречами равно $\dfrac{2\pi R}{\upsilon_1-\upsilon_2}$, $(\upsilon_1>\upsilon_2)$.

1.27. По окружности длиной 60 *м* равномерно и в одном направлении движутся две точки. Одна из них делает полный оборот на 5 *с* скорее другой. При этом совпадения точек происходят каждый раз через 1 *мин*. Определите скорости точек.

Решение:

Пусть первая точка проходит полный оборот за x c $(x>0)$,

тогда вторая точка – за $(x+5)$ c.

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
I точка	60	x	$\dfrac{60}{x}$
II точка	60	$x+5$	$\dfrac{60}{x+5}$

$$\frac{60}{x}>\frac{60}{x+5}$$

Зная, что совпадения точек происходят каждые 60 *с*, составим уравнение по формуле для расчета времени между встречами при движении точек по окружности в одном направлении $\frac{2\pi R}{\upsilon_1 - \upsilon_2}$:

$$\frac{60}{\frac{60}{x} - \frac{60}{x+5}} = 60$$

$$\frac{60}{x} - \frac{60}{x+5} = 1$$

$$x^2 + 5x - 300 = 0$$

$x_1 = -20$ – не удовлетворяет условию задачи;

$x_2 = 15$.

Скорость первой точки: $\upsilon_1 = \frac{60}{15} = 4$ *м/с*.

Скорость второй точки: $\upsilon_2 = \frac{60}{20} = 3$ *м/с*.

Ответ: 4 *м/с*; 3 *м/с*.

1.28. По окружности, имеющей длину 1 350 *м*, в одном направлении едут два велосипедиста. Первый обгонял второго каждые 27 *мин*. При движении в противоположных направлениях они встречаются каждые 3 *мин*. Найдите скорости велосипедистов.

Решение:

Пусть x *км/ч* – скорость первого велосипедиста;

y *км/ч* – скорость второго велосипедиста;

$x > y > 0$.

Составим систему уравнений согласно формулам для расчета времени между встречами при движении объектов по окружности:

$$\begin{cases} \frac{1,35}{x+y} = \frac{1}{20}, \\ \frac{1,35}{x-y} = \frac{9}{20}; \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=27, \\ x-y=3; \end{cases} \quad \begin{cases} x=15, \\ y=12. \end{cases}$$

Ответ: 15 *км/ч*; 12 *км/ч*.

1.29. Две точки A и B начинают движение по окружности с постоянными скоростями из диаметрально противоположных точек. Известно, что скорость точки A составляет 8 *м/с*. На сколько скорость точки B больше скорости точки A, если они в первый раз поравнялись в тот момент, когда A прошла четыре круга?

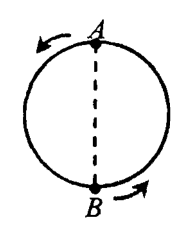
***Решение*:**

Пусть скорость точки B больше скорости точки A на x *м/с*;

Длину окружности обозначим L *м*.

По условию задачи точки в первый раз поравнялись в тот момент, когда точка A прошла 4 круга, а B – 4,5 круга.

Составим таблицу.



[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
Точка A	$4L$	8	$\frac{4L}{8}$
Точка B	$4{,}5L$	$x+8$	$\frac{4{,}5L}{x+8}$

Составим уравнение:

$$\frac{4L}{8}=\frac{4{,}5L}{x+8}$$

$$8+x=9$$

$$x=1.$$

Ответ: на 1 *м/с*.

1.30. Два тела движутся по окружности равномерно в одну сторону. Первое тело проходит окружность на 2 *с* быстрее второго и догоняет второе тело каждые 12 *с*. За какое время каждое тело проходит окружность?

***Решение*:**

Пусть первое тело проходит окружность длиной L за x *с*; тогда второе тело – за $(x+2)$ *с*.

1 тело	L	x	$\frac{L}{x}$
2 тело	L	$x+2$	$\frac{L}{x+2}$

$$\frac{L}{x} > \frac{L}{x+2}$$

Зная, что тела встречаются каждые 12 *с*, составим уравнение по формуле для расчета времени $\frac{2\pi R}{\upsilon_1 - \upsilon_2}$:

$$\frac{L}{\frac{L}{x} - \frac{L}{x+2}} = 12$$

$$\frac{x(x+2)}{x+2-x} = 12$$

$$x^2 + 2x - 24 = 0$$

$x_1 = -6$ – не удовлетворяет условию задачи;

$x_2 = 4$.

Ответ: 4 *с*; 6 *с*.

1.31. Из пункта *А* круговой трассы выехал велосипедист, а через 30 минут следом за ним отправился мотоциклист. Через 15 минут после отправления он догнал велосипедиста в первый раз, а еще через 30 минут после этого догнал его во второй раз. Найдите скорость мотоциклиста, если длина трассы равна 20 *км*. Ответ дайте в *км/ч*.

Решение:

Пусть x *км/ч* – скорость велосипедиста;

y *км/ч* – скорость мотоциклиста;

$y > x > 0$.

После первой встречи движение мотоциклиста и велосипедиста можно рассматривать как одновременное движение двух объектов

по окружности из одной точки в одном направлении, для которого выполнено соотношение $t_{вст.} = \dfrac{2\pi R}{\upsilon_1 - \upsilon_2}$.

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
Первая встреча				
Велосипедист	$\frac{30+15}{60} = \frac{3}{4}$	x	$\frac{3}{4}x$	равны
Мотоциклист	$\frac{15}{60} = \frac{1}{4}$	y	$\frac{1}{4}y$	

Зная, что вторая встреча прошла через 30 *мин* после первой, составим систему уравнений:

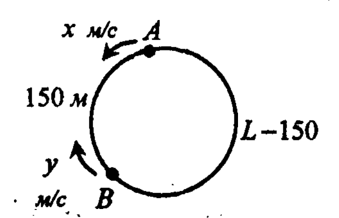
$$\begin{cases} \frac{3}{4}x = \frac{1}{4}y, \\ \frac{20}{y-x} = \frac{1}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3x, \\ y - x = 40; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 20, \\ y = 60. \end{cases}$$

Ответ: 60 *км/ч*.

1.32. Две точки A и B начинают одновременно сближаться по меньшей дуге окружности равной 150 *м* и встречаются через 10 *с*. Если же точки начнут двигаться по большей дуге, то они встретятся через 14 *с*. Найдите скорость точки A (*м/с*), если она может пройти всю окружность за время, за которое точка B пройдет 90 *м*.

Решение:

Пусть x *м/с* – скорость точки A;
y *м/с* – скорость точки B;
L *м* – длина окружности.



По условию задачи составим таблицу.

Сближение по меньшей дуге	150	$x+y$	10	
Сближение по большей дуге	$L-150$	$x+y$	14	
Третье условие				
Точка A	L	x	$\frac{L}{x}$	равны
Точка B	90	y	$\frac{90}{y}$	

По данным таблицы составим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{150}{x+y}=10, \\ \frac{L-150}{x+y}=14, \\ \frac{L}{x}=\frac{90}{y}; \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=15, \\ \frac{L-150}{15}=14, \\ \frac{L}{x}=\frac{90}{y}; \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=15, \\ L=360, \\ \frac{360}{x}=\frac{90}{y}; \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=15, \\ L=360, \\ x=4y; \end{cases}$$

$$\begin{cases} L=360, \\ x=12, \\ y=3. \end{cases}$$

Ответ: 12 *м/с*.

В задачах на движение по реке необходимо помнить:

$v_{\text{по теч.}} = v_{\text{соб.}} + v_{\text{теч.}}$

$v_{\text{против теч.}} = v_{\text{соб.}} - v_{\text{теч.}}$

$v_{\text{плота}} = v_{\text{теч.}}$

$$v_{\text{соб.}} = \frac{v_{\text{по теч.}} + v_{\text{против теч.}}}{2}$$

$$v_{\text{теч.}} = \frac{v_{\text{по теч.}} - v_{\text{против теч.}}}{2}$$

1. Простейшие задачи на вычисление компонентов движения по воде

1.33. Моторная лодка шла 40 *мин* по течению реки и 1 *ч* против течения и за это время прошла 37 *км*. Найдите скорость лодки в стоячей воде, если скорость течения реки равна 1,5 *км/ч*.

***Решение*:**

Пусть x *км/ч* – скорость лодки в стоячей воде, $x > 1{,}5$.

По течению	$\frac{40}{60} = \frac{2}{3}$	$x+1{,}5$	$\frac{2}{3}(x+1{,}5)$	} 37 *км*
Против течения	1	$x-1{,}5$	$(x-1{,}5)$	

Зная, что общий путь, пройденный лодкой по течению и против течения, составляет 37 *км*, составим уравнение:

$$\frac{2}{3}(x+1{,}5)+(x-1{,}5)=37$$

$$\frac{2}{3}x+1+x-1{,}5=37$$

$$\frac{5}{3}x=37{,}5$$

$$x=22{,}5.$$

Ответ: 22,5 *км/ч*.

1.34. Моторная лодка прошла 12 *км* против течения реки и 12 *км* по течению реки, затратив на весь путь против течения на 1 *ч* больше, чем на путь по течению. Найдите скорость течения реки, если скорость лодки в стоячей воде 9 *км/ч*.

Решение:

x *км/ч* – скорость течения реки, $0 < x < 9$.

Против течения	12	$9-x$	$\frac{12}{9-x}$	на 1 ч больше
По течению	12	$9+x$	$\frac{12}{9+x}$	

$$\frac{12}{9-x} - \frac{12}{9+x} = 1$$

$$x^2 + 24x - 81 = 0$$

$x_1 = 3$; $x_2 = -27$ – не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: 3 *км/ч*.

1.35. Моторная лодка прошла 28 *км* по течению реки и 25 *км* против течения реки, затратив на весь путь столько же времени, сколько ей понадобилось бы на прохождение 54 *км* в стоячей воде. Определите скорость лодки в стоячей воде, если скорость течения равна 2 *км/ч*.

Решение:

Пусть x *км/ч* – скорость лодки в стоячей воде, $x > 2$.

По течению	28	$x+2$	$\frac{28}{x+2}$	равны
Против течения	25	$x-2$	$\frac{25}{x-2}$	
В стоячей воде	54	x	$\frac{54}{x}$	

Составим и решим уравнение:

$$\frac{28}{x+2}+\frac{25}{x-2}=\frac{54}{x}$$

$$53x^2-6x=54\left(x^2-4\right)$$

$$x^2+6x-216=0$$

$x_1=-18$ – не удовлетворяет условию задачи;

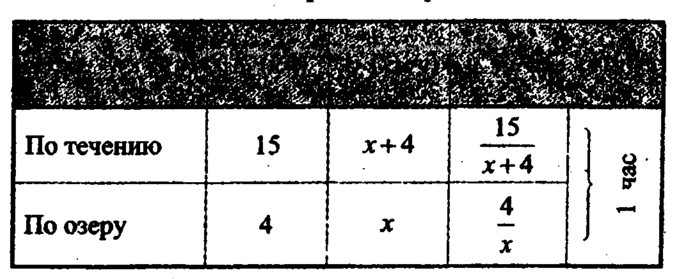
$x_2=12$.

Ответ: 12 *км/ч*.

1.36. Катер прошел 15 *км* по течению реки и 4 *км* по озеру, затратив на весь путь 1 час. Вычислите скорость катера по озеру, если скорость течения реки 4 *км/ч*.

Решение:

x *км/ч* – собственная скорость катера, $x>0$.



[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	
По течению	15	$x+4$	$\frac{15}{x+4}$	} 1 час
По озеру	4	x	$\frac{4}{x}$	

Зная, что на весь путь катер затратил 1 час, составим уравнение:

$$\frac{15}{x+4}+\frac{4}{x}=1$$

$$19x+16=x^2+4x$$

$$x^2-15x-16=0$$

$x_1=-1$ – не удовлетворяет условию задачи;

$x_2=16$.

Ответ: 16 *км/ч*.

1.37. Теплоход прошел по течению реки 96 *км* и столько же против течения. Некоторое время он стоял под погрузкой, затратив на весь путь 32 *ч*. Скорость течения реки равна 2 *км/ч*. Определите скорость теплохода в стоячей воде, если время погрузки составляет 37,5% от времени в пути.

Решение:

Время погрузки составляет: $32 \cdot 0{,}375 = 32 \cdot \frac{3}{8} = 12$ *ч*.

Тогда 20 *ч* теплоход находился в пути.

Пусть x *км/ч* – собственная скорость теплохода, $x > 2$.

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
По течению	96	$x+2$	$\frac{96}{x+2}$	} 20 часов
Против течения	96	$x-2$	$\frac{96}{x-2}$	

Зная, что на весь путь теплоход затратил 20 часов, составим уравнение:

$$\frac{96}{x+2} + \frac{96}{x-2} = 20$$

$$\frac{24}{x+2} + \frac{24}{x-2} = 5$$

$$\frac{48x}{x^2-4} = 5$$

$$5x^2 - 48x - 20 = 0$$

$x_1 = -\frac{2}{5}$ – не удовлетворяет условию задачи;

$x_2 = 10$.

Ответ: 10 *км/ч*.

1.38. Лодка шла из пункта A в пункт B по течению 30 минут, затем из пункта B в пункт A против течения 70 минут. Найдите время движения лодки из A в B в стоячей воде.

Решение:

Пусть x *км* – расстояние между пунктами A и B, $x>0$.

По формуле $\upsilon_{соб.}=\dfrac{\upsilon_{по\ теч.}+\upsilon_{против\ теч.}}{2}$ определим собственную скорость лодки.

[redacted]			
$A\to B$ (по течению)	$\frac{30}{60}=\frac{1}{2}$	x	$x:\frac{1}{2}=2x$
$B\to A$ (против течения)	$\frac{70}{60}=\frac{7}{6}$	x	$x:\frac{7}{6}=\frac{6}{7}x$

$$\upsilon_{соб.}=\frac{\upsilon_{по\ теч.}+\upsilon_{против\ теч.}}{2}=\frac{1}{2}\left(2x+\frac{6x}{7}\right)=\frac{10x}{7}$$

Тогда время движения лодки из A в B в стоячей воде:

$$t=\frac{x}{\upsilon_{соб.}}=x:\frac{10x}{7}=\frac{7}{10}=\frac{42}{60}=42\ мин.$$

Ответ: 42 *мин.*

1.39. Собственная скорость теплохода *a км/ч*, а скорость течения *b км/ч*. Теплоход проплыл некоторое расстояние по течению, потом против течения. Вычислите среднюю скорость движения на всем пути.

Решение:

Пусть x *км* – расстояние, пройденное теплоходом сначала по течению, потом против течения, $x>0$.

[redacted]			
По течению	x	$a+b$	$\frac{x}{a+b}$
Против течения	x	$a-b$	$\frac{x}{a-b}$

Среднюю скорость движения теплохода на всем пути найдем как отношение пройденного пути к затраченному времени:

$$\upsilon_{\text{ср.}}=\frac{x+x}{\frac{x}{a+b}+\frac{x}{a-b}}=\frac{2x\left(a^2-b^2\right)}{x(a-b+a+b)}=\frac{a^2-b^2}{a}\text{ км/ч.}$$

Ответ: $\frac{a^2-b^2}{a}$ *км/ч*.

1.40. В озеро впадают две реки. Лодка отплывает от пристани A на первой реке, плывет 36 *км* вниз по течению до озера, далее 19 *км* по озеру и 24 *км* по второй реке вверх против течения до пристани B, затратив 8 часов на весь путь от A до B. Из этих 8 часов 2 часа лодка плывет по озеру. Скорость течения первой реки на 1 *км/ч* больше, чем скорость течения второй реки. Найдите скорость течения каждой реки.

Решение:

Пусть x *км/ч* – скорость течения *второй* реки, $x>0$. Тогда $(x+1)$ *км/ч* скорость течения *первой* реки.

	S (км)	υ (км/ч)	$t=\frac{S}{\upsilon}$ (ч)	
По течению (первая река)	36	$9{,}5+(x+1)$	$\frac{36}{10{,}5+x}$	8 часов
По озеру	19	$\frac{19}{2}=9{,}5$	2	
Против течения (вторая река)	24	$9{,}5-x$	$\frac{24}{9{,}5-x}$	

Составим уравнение:

$$\frac{36}{10{,}5+x}+2+\frac{24}{9{,}5-x}=8$$

$$\frac{6}{10{,}5+x}+\frac{4}{9{,}5-x}=1$$

$$\frac{12}{21+2x}+\frac{8}{19-2x}=1$$

$$396-8x=399-4x-4x^2$$

$4x^2-4x-3=0$

$x_1=-\frac{1}{2}$ – не удовлетворяет условию задачи;

$x_2=\frac{3}{2}$.

Ответ: 2,5 *км/ч*; 1,5 *км/ч*.

1.41. Два приятеля в одной лодке прокатились по реке вдоль берега и вернулись по той же речной трассе через 5 *ч* после начала прогулки. Длина всего рейса составила 10 *км*. На каждые 2 *км* против течения уходило столько же времени, сколько на каждые 3 *км* по течению. Найдите время движения по течению.

Решение:

Пусть x *км/ч* – собственная скорость лодки, y *км/ч* – скорость течения реки, $x>y>0$.

Если весь рейс составил 10 *км*, значит, лодка прошла 5 *км* по течению и 5 *км* против течения.

Составим таблицу.

Первое условие				
По течению	5	$x+y$	$\frac{5}{x+y}$	5 часов
Против течения	5	$x-y$	$\frac{5}{x-y}$	
Второе условие				
По течению	3	$x+y$	$\frac{3}{x+y}$	равны
Против течения	2	$x-y$	$\frac{2}{x-y}$	

По данным таблицы составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{5}{x+y} + \dfrac{5}{x-y} = 5, \\ \dfrac{3}{x+y} = \dfrac{2}{x-y}; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{1}{x+y} + \dfrac{1}{x-y} = 1, \\ x = 5y; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{1}{6y} + \dfrac{1}{4y} = 1, \\ x = 5y; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{25}{12}, \\ y = \dfrac{5}{12}. \end{cases}$$

Время движения лодки по течению: $t = \dfrac{5}{\dfrac{25}{12} + \dfrac{5}{12}} = \dfrac{5 \cdot 12}{30} = 2$ *ч*.

Ответ: 2 *ч*.

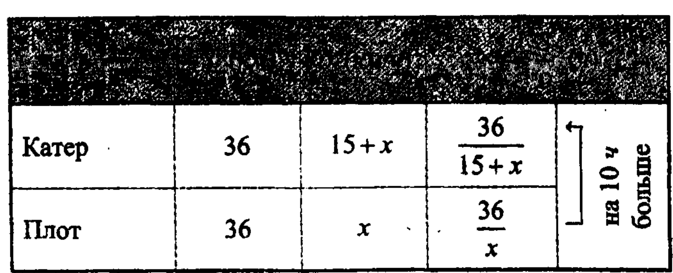
2. Задачи на совместное движение двух и более объектов по воде

1.42. Катер, скорость которого в стоячей воде 15 *км/ч*, отправился от речного причала вниз по течению реки и, пройдя 36 *км*, догнал плот, отправленный от того же причала за 10 *ч* до отправления катера. Найдите скорость течения реки.

Решение:

Пусть x *км/ч* – скорость течения реки, $x > 0$.

Плот плывет вниз по течению со скоростью течения реки.



[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
Катер	36	$15+x$	$\dfrac{36}{15+x}$	на 10 *ч* больше
Плот	36	x	$\dfrac{36}{x}$	

Зная, что плот был отправлен за 10 *ч* до отправления катера, составим уравнение:

$$\frac{36}{x} - \frac{36}{15+x} = 10$$

$$\frac{18}{x} - \frac{18}{15+x} = 5$$

$$270 = 5\left(x^2 + 15x\right)$$

$x^2+15x-54=0$

$x_1=-18$ – не удовлетворяет условию задачи;

$x_2=3$.

Ответ: 3 *км/ч*.

1.43. Расстояние между пристанями A и B по реке равно 36 *км*. Из A в B отплыл плот, а из B в A спустя 8 *ч* отошла лодка. В пункты назначения они прибыли одновременно. Какова скорость плота, если собственная скорость лодки 12 *км/ч*?

Решение:

Пусть x *км/ч* – скорость течения реки (скорость плота).

$0<x<12$

[illegible]	S (км)	[illegible]	[illegible]	
Плот (по течению)	36	x	$\frac{36}{x}$	на 8 *ч* больше
Лодка (против течения)	36	$12-x$	$\frac{36}{12-x}$	

Составим уравнение:

$$\frac{36}{x}-\frac{36}{12-x}=8$$

$$\frac{9}{x}-\frac{9}{12-x}=2$$

$$108-18x=24x-2x^2$$

$$x^2-21x+54=0$$

$x_1=18$ – не удовлетворяет условию задачи;

$x_2=3$.

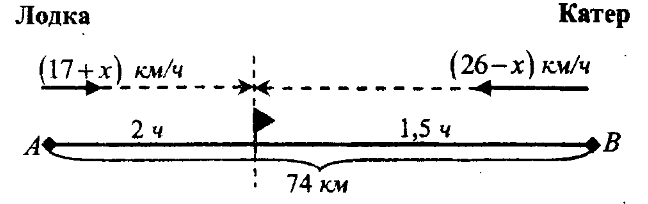
Ответ: 3 *км/ч*.

1.44. Из пункта A вниз по течению реки движется лодка с собственной скоростью 17 *км/ч*. Ей навстречу из пункта B движется катер с собственной скоростью 26 *км/ч*. Лодка до встречи шла 2 *ч*, катер – 1,5 *ч*. Какое расстояние проплывет плот за 3 *ч*, если расстояние между пунктами A и B равно 74 *км*?

Решение:

Пусть x *км/ч* – скорость течения реки (скорость плота).

$0 < x < 26$



[illegible]	t (ч)	v (км/ч)	$S = v \cdot t$ (км)	
Лодка (по течению)	2	$17+x$	$2(17+x)$	74 км
Катер (против течения)	1,5	$26-x$	$1{,}5(26-x)$	
Плот	3	x	$3x$	

Зная, что расстояние между пунктами A и B равно 74 *км*, составим уравнение:

$$2(17+x)+1{,}5(26-x)=74$$

$$34+2x+39-1{,}5x=74$$

$$0{,}5x=1$$

$$x=2$$

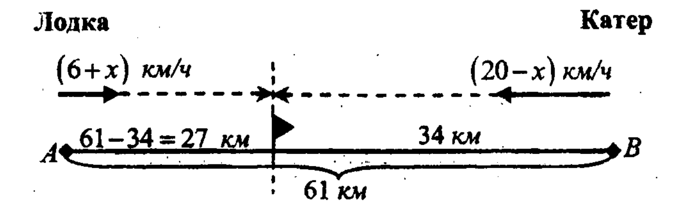
За 3 часа плот проплывет по течению реки расстояние в $2 \cdot 3 = 6$ *км*.

Ответ: 6 *км*.

1.45. От пристани A вниз по течению реки отошла лодка, скорость которой в стоячей воде равна 6 *км/ч*. Через час от пристани B, отстоящей от A на 61 *км*, вверх по течению отправился катер, развивающий в стоячей воде скорость 20 *км/ч*. Пройдя 34 *км*, катер встретился с лодкой. Найдите скорость течения реки.

Решение:

Пусть x *км/ч* – скорость течения реки, $0 < x < 20$.



[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
Лодка (по течению)	$61-34=27$	$6+x$	$\frac{27}{6+x}$	на 1 ч больше
Катер (против течения)	34	$20-x$	$\frac{34}{20-x}$	

$$\frac{27}{6+x}-\frac{34}{20-x}=1$$

$$540-27x-204-34x=120-6x+20x-x^2$$

$$x^2-75x+216=0$$

$x_1=72$ – не удовлетворяет условию задачи;

$x_2=3$.

Ответ: 3 *км/ч*.

1.46. Теплоход прошел расстояние от A до B по течению реки за 8 суток, а от B до A – за 12 суток. За сколько суток доплывет от A до B плот?

***Решение*:**

Пусть x *км* – расстояние между пунктами A и B, $x > 0$.

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
По течению	8	x	$\frac{x}{8}$
Против течения	12	x	$\frac{x}{12}$
Плот	$\frac{x}{\upsilon_{теч.}}$	x	$\upsilon_{теч.}$

По формуле $\upsilon_{теч.} = \dfrac{\upsilon_{по\ теч.} - \upsilon_{против\ теч.}}{2}$ найдем скорость течения реки.

$$\upsilon_{теч.} = \frac{\frac{x}{8} - \frac{x}{12}}{2} = \frac{x}{48}$$

Время, за которое плот проплывет расстояние от A до B:

$$\frac{x}{\upsilon_{теч.}} = \frac{x}{\frac{x}{48}} = 48 \text{ суток.}$$

Ответ: 48 суток.

1.47. Катер, собственная скорость которого 15 *км/ч*, прошел 60 *км* по реке от одной пристани до другой и вернулся обратно. За это же время спасательный круг, упавший за борт с катера, проплыл 25 *км*. Найдите время движения катера вверх по реке.

***Решение*:**

Пусть x *км/ч* – скорость течения реки, $0 < x < 15$.

	S (км)	υ (км/ч)	$t=\frac{S}{\upsilon}$ (ч)	
По течению	60	$15+x$	$\frac{60}{15+x}$	равны
Против течения	60	$15-x$	$\frac{60}{15-x}$	
Круг	25	x	$\frac{25}{x}$	

Составим и решим уравнение:

$$\frac{60}{15+x}+\frac{60}{15-x}=\frac{25}{x}$$

$$\frac{12}{15+x}+\frac{12}{15-x}=\frac{5}{x}$$

$$\frac{360}{225-x^2}=\frac{5}{x}$$

$$\frac{72}{225-x^2}=\frac{1}{x}$$

$$x^2+72x-225=0$$

$x_1=-75$ – не удовлетворяет условию задачи;

$x_2=3$.

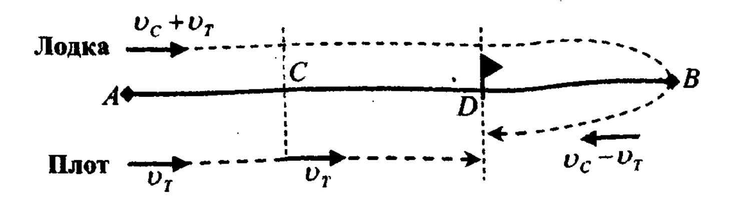
Скорость течения реки 3 *км/ч*.

Тогда время движения катера вверх по реке: $t=\frac{60}{15-3}=5$ *ч*.

Ответ: 5 *ч*.

Рассмотрим следующий случай движения катера и плота по воде

Пусть лодка, имевшая собственную скорость (υ_C), отошла от пристани A одновременно с плотом (υ_T). У пристани B лодка развернулась и на обратном пути встретила плот.



[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
Лодка (по течению)	$\upsilon_C + \upsilon_T$	t_1	$t_1(\upsilon_C + \upsilon_T)$	AB
Плот	υ_T	t_1	$t_1 \upsilon_T$	AC
Лодка (против течения)	$\upsilon_C - \upsilon_T$	t_2	$t_2(\upsilon_C - \upsilon_T)$	BD
Плот	υ_T	t_2	$t_2 \upsilon_T$	CD

$$t_1(\upsilon_C + \upsilon_T) = t_1 \upsilon_T + t_2(\upsilon_C - \upsilon_T) + t_2 \upsilon_T \quad (AB = AC + BD + CD)$$

$$t_1 \upsilon_C = t_2 \upsilon_C$$

$$t_1 = t_2$$

$$\frac{AB}{\upsilon_C + \upsilon_T} = \frac{BD}{\upsilon_C - \upsilon_T}$$

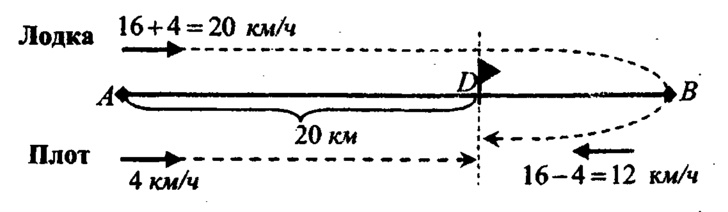
Вывод: Лодка удаляется от плота за то же время, что и приближается к нему, т.е. путь AB пройден за то же время, что и путь от B до встречи с плотом.

Сделанный вывод можно использовать при решении задач на следующую ситуацию.

1.48. Моторная лодка, имевшая собственную скорость 16 *км/ч*, отошла от пристани A одновременно с плотом вниз по течению реки. У пристани B лодка развернулась и на обратном пути встретила плот в 20 *км* от пристани A. Найдите расстояние между пристанями A и B, если известно, что скорость течения реки 4 *км/ч*.

Решение:

Пусть x *км* – расстояние между пристанями A и B, $x > 0$.



$$t_1 = t_2$$

$$\frac{AB}{v_{\text{по теч.}}} = \frac{BD}{v_{\text{против теч.}}}$$

$$\frac{x}{20} = \frac{x-20}{12}$$

$$12x = 20x - 400$$

$$x = 50.$$

Ответ: 50 *км*.

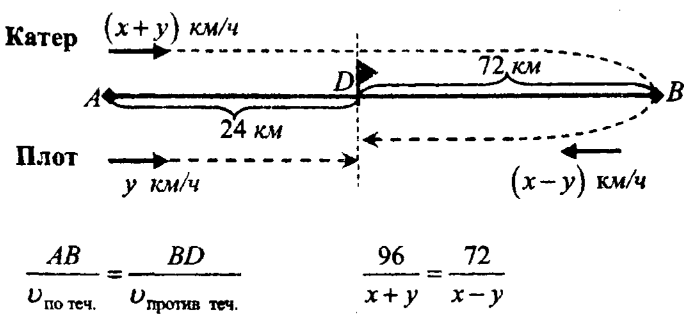
1.49. Катер проходит 96 *км* вниз по течению реки от A до B и обратно за 14 *ч*. Одновременно с катером из A отправился плот. На обратном пути катер встретил плот на расстоянии 24 *км* от A. Определите скорость катера в стоячей воде и скорость течения.

Решение:

Пусть x *км/ч* – скорость катера в стоячей воде;
y *км/ч* – скорость течения реки; $x, y > 0$.

[illegible]	[illegible]	v (км/ч)	[illegible]	
Первое условие				
По течению	96	$x+y$	$\frac{96}{x+y}$	14 часов
Против течения	96	$x-y$	$\frac{96}{x-y}$	

$$\frac{96}{x+y} + \frac{96}{x-y} = 14$$



$$\frac{AB}{\upsilon_{\text{по теч.}}}=\frac{BD}{\upsilon_{\text{против теч.}}} \qquad \frac{96}{x+y}=\frac{72}{x-y}$$

$$\frac{4}{x+y}=\frac{3}{x-y}$$

Объединим два полученных уравнения в систему:

$$\begin{cases}\dfrac{4}{x+y}=\dfrac{3}{x-y},\\ \dfrac{96}{x+y}+\dfrac{96}{x-y}=14;\end{cases} \quad \begin{cases}4x-4y=3x+3y,\\ \dfrac{48}{x+y}+\dfrac{48}{x-y}=7;\end{cases} \quad \begin{cases}x=7y,\\ \dfrac{48}{8y}+\dfrac{48}{6y}=7;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=7y,\\ \dfrac{14}{y}=7;\end{cases} \quad \begin{cases}x=14,\\ y=2.\end{cases}$$

Ответ: 14 *км/ч*; 2 *км/ч*.

1.50. Пароход и плот отплыли одновременно вниз по течению реки из пункта A в пункт B, в пункте B пароход повернул обратно и на пути из B в A встретил плот, который к этому моменту проплыл $\frac{3}{5}$ расстояния AB. Вычислите отношение скоростей парохода в стоячей воде и течения реки.

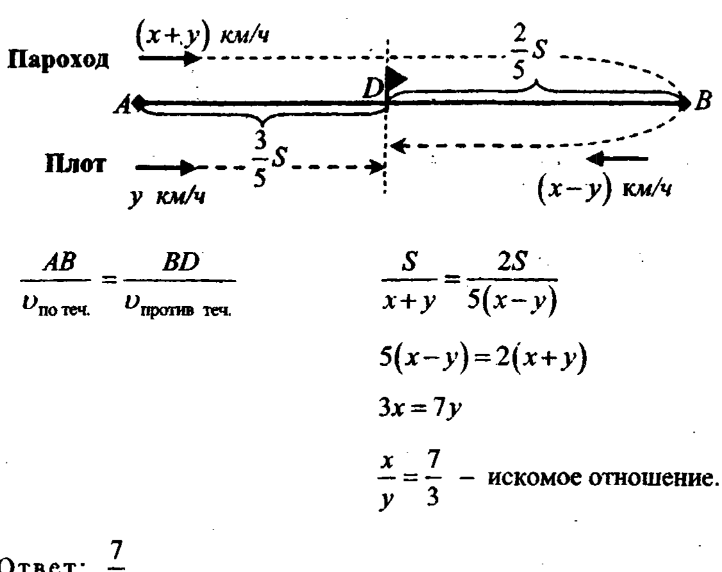
Решение:

Пусть x *км/ч* – скорость катера в стоячей воде;

y *км/ч* – скорость течения реки;

S *км* – расстояние AB.

$S>0$; $x, y>0$.



$$\frac{AB}{\upsilon_{\text{по теч.}}}=\frac{BD}{\upsilon_{\text{против теч.}}}$$

$$\frac{S}{x+y}=\frac{2S}{5(x-y)}$$

$$5(x-y)=2(x+y)$$

$$3x=7y$$

$\frac{x}{y}=\frac{7}{3}$ – искомое отношение.

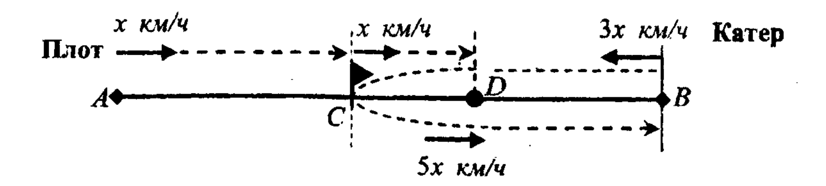
Ответ: $\frac{7}{3}$.

1.51. Из пункта A по реке отправляется плот. Одновременно на встречу к нему из пункта B, расположенного ниже по течению относительно пункта A, отправляется катер. Встретив плот, катер сразу поворачивает и идет вниз по течению. Какую часть пути от A до B пройдет плот к моменту возвращения катера в пункт B, если скорость катера в стоячей воде в 4 раза больше скорости течения реки?

Решение:

Пусть x *км/ч* – скорость течения реки, тогда скорость катера в стоячей воде $4x$ *км/ч*, $x>0$.

Обозначим расстояние AB через S (*км*), $S>0$.



Если катер и плот вышли одновременно навстречу друг другу, катер плывет против течения со скоростью $4x - x = 3x$ *км/ч*, плот плывет по течению со скоростью x км/ч, то их встреча произойдет через:

$$t = \frac{S}{3x + x} = \frac{S}{4x} \text{ ч.}$$

Составим таблицу.

[illegible]				
Движение до встречи:				
Плот (по течению)	x	$\frac{S}{4x}$	$x \cdot \frac{S}{4x} = \frac{S}{4}$	AC
Катер (против течения)	$4x - x = 3x$	$\frac{S}{4x}$	$3x \cdot \frac{S}{4x} = \frac{3S}{4}$	CB
Движение после встречи:				
Катер (по течению)	$4x + x = 5x$	$\frac{3S}{4} : 5x = \frac{3S}{20x}$	$\frac{3S}{4}$	CB
Плот (по течению)	x	$\frac{3S}{20x}$	$x \cdot \frac{3S}{20x} = \frac{3S}{20}$	CD

$$AD = AC + CD = \frac{S}{4} + \frac{3S}{20} = \frac{2}{5}S.$$

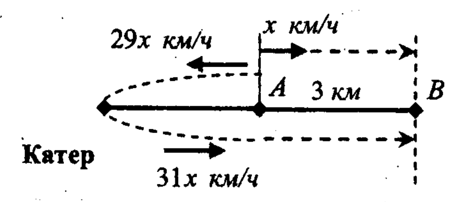
Ответ: $\frac{2}{5}$ пути.

1.52. Катер, плывущий против течения реки, в точке A встретил плот. Через 50 *мин* после встречи катер повернул обратно и догнал плот в точке, находящейся на расстоянии 3 *км* от точки A. Найдите скорость течения реки, если известно, что ее величина в 30 раз меньше, чем скорость катера в стоячей воде.

***Решение*:**

Пусть x *км/ч* – скорость течения реки, тогда скорость катера в стоячей воде $30x$ *км/ч*, $x > 0$.





[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
Плот (по течению)	x	3	$\frac{3}{x}$
Катер			
Против течения	$30x - x = 29x$	$29x \cdot \frac{5}{6} = \frac{145x}{6}$	$\frac{50}{60} = \frac{5}{6}$
По течению	$30x + x = 31x$	$\frac{145x}{6} + 3$	$\frac{\frac{145x}{6} + 3}{31x}$

Приравняв время движения плота и время движения катера, составим уравнение:

$$\frac{3}{x} = \frac{5}{6} + \frac{\frac{145x}{6} + 3}{31x}$$

$$\frac{3}{x} = \frac{5}{6} + \frac{145x + 18}{186x}$$

$$\frac{3}{x} = \frac{300x + 18}{186x}$$

$$\frac{3}{x} = \frac{50x + 3}{31x}$$

$$50x^2 + 3x = 93x$$

$$10x(5x - 9) = 0$$

$$x = 1{,}8.$$

Ответ: 1,8 *км/ч*.

1.53. От пристани A к пристани B вниз по течению реки отправились одновременно моторная лодка и байдарка. Скорость течения реки 2 *км/ч*. Последнюю 1/10 часть пути от A до B моторная лодка плыла с выключенным мотором. На той части пути, где моторная лодка шла с работающим мотором, ее скорость была на 8 *км/ч* больше скорости байдарки. К пристани B моторная лодка и байдарка прибыли одновременно. Найдите собственную скорость байдарки.

Решение:

Пусть x *км/ч* – собственная скорость байдарки, $x>0$.

Тогда собственная скорость лодки $(x+8)$ *км/ч*.

Обозначим расстояние AB через S (*км*), $S>0$.

По условию задачи $\frac{9}{10}S$ (*км*) лодка шла с работающим мотором, а $\frac{1}{10}S$ (*км*) лодка плыла с выключенным мотором.

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
Лодка с мотором (по течению)	$0{,}9S$	$x+8+2=$ $=x+10$	$\frac{0{,}9S}{x+10}$	равны
Лодка без мотора (по течению)	$0{,}1S$	2	$\frac{0{,}1S}{2}=\frac{S}{20}$	
Байдарка (по течению)	S	$x+2$	$\frac{S}{x+2}$	

Зная, что в пункт B байдарка и лодка прибыли одновременно, составим и решим уравнение:

$$\frac{9S}{10(x+10)}+\frac{S}{20}=\frac{S}{x+2}.$$

$$\frac{S}{10}\left(\frac{28+x}{2x+20}\right)=\frac{S}{x+2}$$

$$\frac{28+x}{20x+200}=\frac{1}{x+2}$$

$$28x+x^2+56+2x=20x+200$$

$x^2+10x-144=0$

$x_1=-18$ – не удовлетворяет условию задачи;

$x_2=8$.

Ответ: 8 *км/ч*.

Задачи на движение протяженных тел

В задачах на движение протяженных тел требуется определить длину одного из них. Наиболее типичные ситуации:

определение длины поезда проезжающего мимо:

– придорожного столба;

– идущего параллельно путям пешехода;

– лесополосы определенной длины;

– другого двигающегося поезда.

Если поезд движется мимо столба, то он проходит расстояние, равное его длине.

Если поезд движется мимо протяженной лесополосы, то он проходит расстояние, равное сумме длины самого поезда и лесополосы.

1.54. Поезд длиной 200 *м* прошел мимо неподвижного наблюдателя за 30 *с*. За сколько времени он проедет тоннель длиной 300 *м*?

Решение:

1) $200:30=\frac{20}{3}$ *м/с* – скорость поезда.

2) $200+300=500$ *м* длина поезда + длина тоннеля.

3) $500:\frac{20}{3}=75$ *с* – время, за которое поезд проедет тоннель.

Ответ: 75 *с*.

1.55. Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 60 *км/ч*, проезжает мимо рва, длина которого 200 *м*, за 0,3 минуты. Определите длину поезда.

Решение:

Переведем скорость из *км/ч* в *м/мин*:

$$60\ км/ч = \frac{60 \cdot 1\,000}{60} = 1\,000\ м/мин.$$

Пусть x *м* – длина поезда.

Проезжая мимо рва, поезд проходит расстояние в $(x+200)$ *м*.

По формуле $S = \upsilon \cdot t$ составим уравнение:

$x + 200 = 1000 \cdot 0{,}3$

$x + 200 = 300$

$x = 100$.

Ответ: 100 *м*.

При решении задач на движение двух тел часто очень удобно считать одно тело неподвижным, а другое – приближающимся к нему со скоростью, равной сумме скоростей этих тел (при движении навстречу) или разности скоростей (при движении вдогонку). Такая модель помогает разобраться с условием задачи.

1.56. Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 65 *км/ч*, проезжает мимо идущего в том же направлении параллельно путям со скоростью 5 *км/ч* пешехода за 30 *с*. Найдите длину поезда в метрах.

Решение:

1) $65 - 5 = 60$ *км/ч* – скорость поезда относительно пешехода.

2) $60\ км/ч = \frac{60 \cdot 1\,000}{3\,600} = \frac{50}{3}\ м/с$

3) $\frac{50}{3} \cdot 30 = 500$ *м* – длина поезда.

Ответ: 500 *м*.

1.57. Пассажир, ехавший в поезде со скоростью 40 *км/ч*, заметил, что встречный поезд прошел мимо него за 3 *с*. Определите скорость встречного поезда, если известно, что длина его 75 *м*.

Решение:

$$3\,c=\frac{3}{3\,600}=\frac{1}{1\,200}\,ч; \qquad 75\,м=0{,}075\,км.$$

Пусть x *км/ч* – скорость второго поезда, тогда относительная скорость сближения поездов $(x+40)$ *км/ч*.

По формуле $S=\upsilon\cdot t$ составим уравнение:

$$(40+x)\cdot\frac{1}{1\,200}=0{,}075$$

$$40+x=90$$

$$x=50.$$

Ответ: 50 *км/ч*.

1.58. По двум параллельным железнодорожным путям навстречу друг другу следуют пассажирский и товарный поезда, скорости которых равны соответственно 60 *км/ч* и 40 *км/ч*. Длина товарного поезда равна 700 *м*. Найдите длину пассажирского поезда, если время, за которое он прошел мимо товарного поезда, равно 36 *с*. Ответ дайте в метрах.

Решение:

Относительная скорость сближения поездов равна: $60+40=100$ *км/ч*.

$$100\,км/ч=\frac{100\cdot 1\,000}{3\,600}=\frac{250}{9}\,м/с$$

Пусть x *м* – длина пассажирского поезда. За 36 секунд один поезд проходит мимо другого, то есть поезда преодолевают расстояние, равное сумме их длин: $(x+700)$ *м*.

По формуле $S=\upsilon\cdot t$ составим уравнение:

$$x+700=\frac{250}{9}\cdot 36$$

$$x+700=1000$$

$$x=300.$$

Ответ: 300 *м*.

§2. ЗАДАЧИ НА РАБОТУ И ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТЬ ТРУДА

Основными компонентами данного типа задач являются:

– работа (A);

– время (t);

– производительность труда (N), то есть работа, выполненная в единицу времени.

Эти три величины связаны уравнением:

$$A = N \cdot t.$$

Задачи на работу делятся на два типа:

– задачи, в которых выполняется раздельная работа (эти задачи решаются аналогично задачам на движение);

– задачи на совместную работу.

Рассмотрим первый тип задач на работу.

2.1. Токарь должен был обточить 120 деталей. Применив новый резец, он стал обтачивать в час на 4 детали больше и благодаря этому выполнил задание на 2 *ч* 30 *мин* раньше срока. Сколько деталей в час обтачивал токарь, используя новый резец?

***Решение*:**

Обозначим производительность токаря с новым резцом x *дет/ч*, тогда до этого его производительность была $(x-4)$ *дет/ч*.

По условию задачи $x > 4$.

Составим таблицу выполнения работы.

	A (*дет*)	N (*дет/ч*)	$t = \frac{A}{N}$ (*ч*)	
Старый резец	120	$x-4$	$\frac{120}{x-4}$	на 2,5 *ч* больше
Новый резец	120	x	$\frac{120}{x}$	

Зная, что токарь закончил работу на 2 *ч* 30 *мин* (на 2,5 *ч*) раньше срока, составим и решим уравнение:

$$\frac{120}{x-4}-\frac{120}{x}=2,5$$

$$\frac{48}{x-4}-\frac{48}{x}=1$$

$$\frac{48(x-x+4)}{x^2-4x}=1$$

$$x^2-4x-192=0$$

$$x_1=-12,\ \ x_2=16$$

Так как $x>4$, производительность токаря с новым резцом 16 *дет/ч*.

Ответ: 16 деталей.

2.2. Завод по плану должен был изготовить 180 станков к определенному сроку. Перевыполняя дневную норму на 2 станка, завод выполнил задание на 1 день раньше срока. За сколько дней завод выполнил план?

Решение:

Пусть завод изготовил 180 станков за x дней, тогда по начальному плану завод должен был выполнить задание за $(x+1)$ день.

По условию задачи $x>0$.

Составим таблицу выполнения работы.

	A (станки)	*t* (дни)	$N=\frac{A}{t}$	
По плану	180	$x+1$	$\frac{180}{x+1}$	на 2 станка больше
Фактически	180	x	$\frac{180}{x}$	

Получаем уравнение:

$$\frac{180}{x}-\frac{180}{x+1}=2$$

$$\frac{90(x+1-x)}{x^2+x}=1$$

$x^2+x-90=0$

$x_1=-10,\ \ x_2=9$

Так как $x>0$, то $x=9$.

Ответ: 9 дней.

2.3. По плану бригада должна была убрать урожай с 540 *га* к определенному сроку. После того как убрали 30% урожая, бригада, получив дополнительный комбайн, стала ежедневно убирать на 9 *га* больше, чем первоначально, и закончила уборку на 1 день раньше срока. Сколько дней продолжалась уборка урожая?

Решение:

После того как убрали 30% урожая, бригаде оставалось убрать урожай с поля площадью $540\cdot 0{,}7=378$ *га*.

Пусть изначально (т.е. по плану) бригада ежедневно собирала урожай с x *га* поля, тогда после получения дополнительного комбайна (т.е. фактически) бригада стала ежедневно убирать урожай с $(x+9)$ *га*.

По условию задачи $x>0$.

Составим таблицу выполнения работы.

	A (*га*)	N (*га/день*)	$t=\frac{A}{N}$ (*дней*)	
По плану	378	x	$\frac{378}{x}$	на 1 день раньше
Фактически	378	$x+9$	$\frac{378}{x+9}$	

Получаем уравнение:

$$\frac{378}{x}-\frac{378}{x+9}=1$$

$$\frac{378(x+9-x)}{x^2+9x}=1$$

$x^2+9x-3402=0$

$x_1=-63,\ \ x_2=54$

Так как $x > 0$, по плану бригада должна была ежедневно убирать урожай с 54 га. При этом уборка урожая заняла бы $540:54=10$ дней, тогда фактически уборка урожая продолжалась 9 дней.

Ответ: 9 дней.

2.4. Бригада рабочих к определенному сроку должна была изготовить 360 деталей. Перевыполняя дневную норму на 9 деталей, бригада уже за 1 день до срока перевыполнила плановое задание на 5 %. Сколько деталей изготовит бригада к сроку, если будет продолжать работать с той же производительностью труда?

Решение:

По начальному плану бригада должна была изготовить 360 деталей. Фактически, перевыполняя дневную норму, бригада уже за один день до срока изготовила $360 \cdot 1{,}05 = 378$ деталей.

Пусть по плану бригада должна была изготовить 360 деталей за x дней, фактически же бригада изготовила 378 деталей за $(x-1)$ день. По условию задачи $x > 1$.

Составим таблицу выполнения работы.

	A (*дет*)	t (*дней*)	$N=\frac{A}{t}$ (*дет/день*)	
По плану	360	x	$\frac{360}{x}$	на 9 дет. больше
Фактически	378	$x-1$	$\frac{378}{x-1}$	

Получаем уравнение:

$$\frac{378}{x-1}-\frac{360}{x}=9 \quad |:9$$

$$\frac{42}{x-1}-\frac{40}{x}=1$$

$$\frac{42x-40x+40}{x^2-x}=1$$

$$x^2-3x-40=0$$

$$x_1=-5,\ x_2=8$$

Таким образом, по плану бригада должна была изготовить 360 деталей за 8 дней.

Тогда ежедневно бригаде необходимо было изготавливать:

$\frac{360}{8}=45$ деталей.

Фактически же бригада каждый день изготавливала $45+9=54$ детали. Следовательно, к сроку (т.е. проработав еще один день) бригада изготовила бы:

$378+54=432$ детали.

Ответ: 432 детали.

2.5. На обработку одной детали один рабочий затрачивает на 1 минуту меньше, чем другой. Сколько деталей обрабатывает каждый из них за 4 часа, если первый обрабатывает за это время на 8 деталей больше, чем второй?

Решение:

Пусть первый рабочий за 4 часа обрабатывает x деталей, тогда второй рабочий за это же время обрабатывает $(x+8)$ деталей.

По условию задачи $x>0$.

Составим таблицу выполнения работы.

	t (ч)	A (*дет*)	норма времени*	
I рабочий	4	$x+8$	$\frac{4}{x+8}$	на 1 *мин* меньше
II рабочий	4	x	$\frac{4}{x}$	

Составим уравнение:

$$\frac{4}{x}-\frac{4}{x+8}=\frac{1}{60}$$

$$\frac{32}{x^2+8x}=\frac{1}{60}$$

$$x^2+8x-1920=0$$

* время, необходимое рабочему на обработку одной детали

$x_1 = -48$, $x_2 = 40$

Так как $x > 0$, то количество деталей, обработанных первым рабочим за 4 часа, равно 48, вторым рабочим – 40.

Ответ: 48 деталей и 40 деталей.

2.6. Одному шоферу дан наряд перевезти 600 *т* груза, а второму – 540 *т*. Первый шофер выполнил задание за 4 дня до намеченного срока, а второй – за 2 дня. Сколько груза перевозил каждый шофер ежедневно, если первый перевозил на 4 *т* больше второго?

Решение:

Пусть второй шофер ежедневно перевозил x *т* груза, тогда первый ежедневно перевозил $(x+4)$ *т* груза. По условию задачи $x > 0$.

Составим таблицу выполнения работы.

	A (*т*)	N (*т/день*)	$t = \frac{A}{N}$ (*дней*)
I шофер	600	$x+4$	$\frac{600}{x+4}$
II шофер	540	x	$\frac{540}{x}$

Первому и второму шоферу был поставлен определенный срок выполнения задания (один и тот же).

Если первый шофер выполнил задание за 4 дня до намеченного срока, значит, по плану ему было дано $\left(\frac{600}{x+4}+4\right)$ дня на выполнение наряда. Второй шофер по плану должен был выполнить задание за $\left(\frac{540}{x}+2\right)$ дня. Составим уравнение:

$$\frac{600}{x+4}+4=\frac{540}{x}+2$$

$$\frac{540}{x}-\frac{600}{x+4}=2 \qquad |:2$$

$$\frac{270}{x}-\frac{300}{x+4}=1$$

$x^2+34x-1080=0$

$x_1=-54,\ \ x_2=20$

Так как $x>0$, то $x=20$.

Первый шофер ежедневно перевозил 24 *т*, второй – 20 *т*.

Ответ: 24 *т*, 20 *т*.

2.7. Рабочий изготовил в назначенный ему срок некоторое число деталей. Если бы он ежедневно изготовлял их на 10 больше, то выполнил бы эту работу на 4,5 дня раньше срока, а если бы он изготовлял в день на 5 деталей меньше, то опоздание составляло бы 3 дня. Сколько деталей и в какой срок изготовил рабочий?

Решение:

Пусть рабочий изготавливал ежедневно x деталей и выполнил задание за y дней. По условию задачи $x, y>0$.

Составим таблицу выполнения работы.

	N (*дет/день*)	t (*день*)	$A=N\cdot t$ (*дет*)
Фактически	x	y	xy
В случае перевыполнения	$x+10$	$y-4,5$	$(x+10)(y-4,5)$
В случае недоработки	$x-5$	$y+3$	$(x-5)(y+3)$

Поскольку выполненная работа в первом, втором и третьем случаях одинакова, составим систему уравнений:

$$\begin{cases} xy=(x+10)(y-4,5), \\ xy=(x-5)(y+3); \end{cases} \quad \begin{cases} xy=xy-4,5x+10y-45, \\ xy=xy+3x-5y-15; \end{cases} \quad \begin{cases} 4,5x-10y=-45, \\ 3x-5y=15; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1,5x=-75, \\ y=0,6x-3; \end{cases} \quad \begin{cases} x=50, \\ y=27. \end{cases}$$

Если рабочий ежедневно изготавливал по 50 деталей, то в намеченный срок 27 дней он изготовил $27\cdot 50=1\,350$ деталей.

Ответ: 1 350 *дет*, 27 дней.

План решения более сложных задач на совместную работу обычно сводится к следующему:

1) принимаем всю работу, которую необходимо выполнить за единицу (если объем выполненной работы конкретно не задан);

2) находим производительность труда каждого рабочего в отдельности как $\frac{1}{t}$, где t – время, за которое указанный рабочий может выполнить всю работу при условии, что он работает отдельно;

3) находим ту часть всей работы, которую выполняет каждый рабочий в отдельности за время своей работы;

4) составляем уравнение, приравнивая объем всей работы (т.е. единицу) к сумме слагаемых, каждое из которых есть часть той работы, которую выполнил отдельно каждый из рабочих (если в условии сказано, что при совместной работе выполнен весь объем).

2.8. Один плотник выполнит некоторую работу за 12 дней, другой выполнит эту работу за 6 дней. За сколько дней они выполнят эту работу, работая вместе?

Решение:

Всю работу примем за 1.

Тогда производительность первого плотника $\frac{1}{12}$, второго – $\frac{1}{6}$.

Совместная производительность двух плотников составит:

$$N=\frac{1}{12}+\frac{1}{6}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}.$$

Время, затраченное на выполнение всей работы, при условии, что первый и второй плотники работают вместе, равно:

$$t=\frac{A}{N}=1:\frac{1}{4}=4 \text{ дня.}$$

Ответ: 4 дня.

2.9. Две автомашины, работая вместе, перевезли груз за 6 дней. Сколько дней понадобилось бы каждой машине в отдельности на перевозку всего груза, если известно, что одна из них могла бы перевезти весь груз на 5 дней быстрее, чем вторая?

Решение:

Пусть первой машине на перевозку всего груза понадобится x дней, тогда второй машине понадобится $(x+5)$ дней. По условию задачи $x>0$.

Составим таблицу выполнения работы.

	A	t *(дней)*	$N=\frac{A}{t}$
Работая по отдельности			
I машина	1	x	$\frac{1}{x}$
II машина	1	$x+5$	$\frac{1}{x+5}$
Работая совместно			
Две машины	1	6	$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+5}$

Используя формулу $A=N\cdot t$, составим уравнение:

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+5}\right)\cdot 6=1$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+5}=\frac{1}{6}$$

$$\frac{2x+5}{x^2+5x}=\frac{1}{6}$$

$$x^2-7x-30=0$$

$$x_1=-3,\ x_2=10$$

Так как $x>0$, то $x=10$.

Первой машине на перевозку всего груза понадобилось бы 10 дней, второй – 15 дней.

Ответ: 10 дней, 15 дней.

2.10. Уборку урожая с участка начал один комбайн. Через 2 часа к нему присоединился второй комбайн, и после 8 часов совместной работы они убрали 80% урожая. За сколько часов мог бы убрать урожай с участка каждый комбайн, если известно, что первому на это понадобилось бы на 5 часов больше, чем второму?

Решение:

Пусть второму комбайну на уборку всего урожая понадобилось бы x часов $(x>0)$, тогда первому комбайну понадобилось бы $(x+5)$ часов.

Всю работу примем за 1. По условию задачи комбайнами было убрано 80% урожая, то есть комбайны выполнили 0,8 всей работы.

Составим таблицу выполнения работы.

	$N=\frac{A}{t}$	t (ч)	A	
Работая по отдельности				
I комбайн	$\frac{1}{x+5}$	$x+5$	1	
II комбайн	$\frac{1}{x}$	x	1	
Работая совместно				
I комбайн	$\frac{1}{x+5}$	2	$\frac{2}{x+5}$	} 0,8
I и II комбайны	$\frac{1}{x+5}+\frac{1}{x}$	8	$8\left(\frac{1}{x+5}+\frac{1}{x}\right)$	

Можно составить следующее уравнение:

$$\frac{2}{x+5}+8\left(\frac{1}{x+5}+\frac{1}{x}\right)=0,8$$

$$\frac{10}{x+5}+\frac{8}{x}=\frac{4}{5}$$

$$\frac{5}{x+5}+\frac{4}{x}=\frac{2}{5}$$

$$\frac{9x+20}{x^2+5x}=\frac{2}{5}$$

$$2x^2-35x-100=0$$

$$x_1=-2,5,\quad x_2=20$$

Так как $x>0$, первый комбайн может убрать весь урожай за 25 *ч*, второй – за 20 *ч*.

Ответ: 25 *ч*, 20 *ч*.

2.11. Пять человек выполняют некоторую работу. Первый, второй и третий, работая вместе, могут выполнить всю работу за 7,5 *ч*; первый, третий и пятый вместе – за 5 *ч*; первый, третий и четвертый вместе – за 6 *ч*; а второй, четвертый и пятый вместе – за 4 *ч*. За какой промежуток времени выполнят эту работу все 5 человек, работая вместе?

Решение:

Обозначим всю работу за 1.

Пусть производительность каждого из пяти рабочих равна соответственно x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.

Используя условия задачи, составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases}(x_1+x_2+x_3)\cdot 7{,}5=1,\\ (x_1+x_3+x_5)\cdot 5=1,\\ (x_1+x_3+x_4)\cdot 6=1,\\ (x_2+x_4+x_5)\cdot 4=1;\end{cases} \qquad \begin{cases}x_1+x_2+x_3=\dfrac{2}{15},\\ x_1+x_3+x_5=\dfrac{1}{5},\\ x_1+x_3+x_4=\dfrac{1}{6},\\ x_2+x_4+x_5=\dfrac{1}{4}.\end{cases}$$

Умножим последнее уравнение на 2 и сложим все четыре уравнения:

$$x_1+x_2+x_3+x_1+x_3+x_5+x_1+x_3+x_4+2(x_2+x_4+x_5)=\frac{2}{15}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{4};$$

$$3x_1+3x_2+3x_3+3x_4+3x_5=\frac{4+6+5+15}{30};$$

$$3(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)=1.$$

Из последнего соотношения можно сделать вывод о том, что пять человек, работая совместно, выполнят всю работу за 3 *ч*.

Ответ: 3 *ч*.

2.12. Две молотилки обмолачивают собранную пшеницу за 4 дня. Если бы одна из них обмолотила половину всей пшеницы, а затем вторая остальную часть, то вся работа была бы окончена за 9 дней. За сколько дней каждая молотилка в отдельности могла бы обмолотить всю пшеницу?

Решение:

Пусть первая молотилка перерабатывает всю пшеницу за x дней, вторая – за y дней. По условию задачи $x, y > 0$.

Принимая всю работу за 1, составим таблицу выполнения работы.

	A	t (*дней*)	$N=\dfrac{A}{t}$	
Работая по отдельности				
I молотилка	1	x	$\dfrac{1}{x}$	
II молотилка	1	y	$\dfrac{1}{y}$	
Работая совместно				
Две молотилки	1	4	$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$	
Выполнение работы по частям				
I молотилка	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{1}{2}:\dfrac{1}{x}=\dfrac{x}{2}$	9
II молотилка	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{y}$	$\dfrac{1}{2}:\dfrac{1}{y}=\dfrac{y}{2}$	

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)\cdot 4=1,\\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{2}=9;\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{4},\\ x+y=18;\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{y+x}{xy}=\dfrac{1}{4},\\ x+y=18;\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{18}{xy}=\dfrac{1}{4},\\ x+y=18;\end{cases}$$

$$\begin{cases}xy=72,\\ x+y=18;\end{cases}\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=12,\\ y=6;\end{cases}\\ \begin{cases}x=6,\\ y=12.\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: 12 дней, 6 дней.

2.13. Один трактор может вспахать поле на 1 день скорее, чем второй. Оба трактора совместно работали 2 дня, а затем оставшуюся часть поля второй трактор вспахал за 0,5 дня. За сколько дней может вспахать это поле каждый трактор, работая отдельно?

Решение:

Пусть первый трактор вспахивает все поле за x дней $(x>0)$, тогда второй вспахивает это же поле за $(x+1)$ день.

Составим таблицу выполнения работы.

	t (дней)	$N=\frac{A}{t}$	A	
Работая по отдельности				
I трактор	x	$\frac{1}{x}$	1	
II трактор	$x+1$	$\frac{1}{x+1}$	1	
Работая совместно				
I и II тракторы	2	$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}$	$2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}\right)$	} 1
II трактор	0,5	$\frac{1}{x+1}$	$\frac{0,5}{x+1}$	

Составим уравнение:

$$2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}\right)+\frac{0,5}{x+1}=1$$

$$\frac{2}{x}+\frac{2,5}{x+1}=1$$

$$\frac{4,5x+2}{x^2+x}=1$$

$$2x^2-7x-4=0$$

$$x_1=-0,5,\ \ x_2=4$$

Так как $x>0$, то первый трактор может вспахать все поле за 4 дня, второй – за 5 дней.

Ответ: 4 дня, 5 дней.

Задачи на бассейн и трубы аналогичны задачам на совместную работу. Математическая модель задачи сохраняется, только рабочим будут соответствовать насосы разной мощности, а объем работы будет представлять бассейн, наполняемый водой.

2.14. Бассейн наполняется двумя трубами, действующими одновременно, за 2 *ч*. За сколько часов может наполнить бассейн первая труба, если она, действуя одна, наполняет бассейн на 3 *ч* быстрее, чем вторая?

Решение:

Пусть первая труба наполняет бассейн за x *ч*, тогда вторая – за $(x+3)$ *ч*. По условию задачи $x>0$.

Приняв объем бассейна за 1, составим таблицу выполнения работы.

	A	t (ч)	$N=\frac{A}{t}$
Наполнение по отдельности			
I труба	1	x	$\frac{1}{x}$
II труба	1	$x+3$	$\frac{1}{x+3}$
Наполнение совместно			
Две трубы	1	2	$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+3}$

Используя формулу $A=N\cdot t$, составим уравнение:

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+3}\right)\cdot 2=1$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+3}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{2x+3}{x^2+3x}=\frac{1}{2}$$

$$x^2-x-6=0$$

$$x_1=-2,\ x_2=3$$

Так как $x > 0$, то $x = 3$ и первая труба наполняет бассейн за 3 ч.

Ответ: за 3 ч.

2.15. Две трубы вместе наполняют бассейн за 6 часов. Определите за сколько часов наполняет бассейн каждая труба в отдельности, если известно, что из первой трубы в час вытекает на 50% больше воды, чем из второй.

Решение:

Пусть вторая труба наполняет бассейн за x ч $(x > 0)$. Тогда, если считать, что объем бассейна равен 1, производительность второй трубы составляет $\frac{1}{x}$.

По условию задачи из первой трубы в час вытекает воды на 50% больше, чем из второй. Таким образом, мощность первой трубы в 1,5 раза больше мощности второй трубы, т.е. составляет $\left(1,5 \cdot \frac{1}{x}\right)$.

Перенесем вышеизложенное в таблицу выполнения работы.

	A	t (ч)	$N = \frac{A}{t}$
Наполнение по отдельности			
I труба	1		$\frac{1,5}{x}$
II труба	1	x	$\frac{1}{x}$
Наполнение совместно			
Две трубы	1	6	$\frac{1,5}{x} + \frac{1}{x}$

Используя формулу $A = N \cdot t$, составим уравнение:

$$\left(\frac{1,5}{x} + \frac{1}{x}\right) \cdot 6 = 1$$

$$\frac{2,5}{x} \cdot 6 = 1$$

$$x = 15$$

Вторая труба наполняет бассейн за 15 *ч*.

Тогда первая труба наполняет бассейн за $t=\dfrac{A}{N}=1:\dfrac{1,5}{15}=10$ *ч*.

Ответ: 10 часов, 15 часов.

2.16. Два насоса различной мощности, работая вместе, наполняют бассейн за 4 *ч*. Для наполнения бассейна наполовину первому насосу требуется времени на четыре часа больше, чем второму насосу для наполнения бассейна на три четверти. За какое время может наполнить бассейн каждый из насосов в отдельности?

***Решение*:**

Пусть первый насос наполняет бассейн за x *ч*, второй – за y *ч*.

По условию задачи $x, y > 0$.

Принимая объем бассейна за 1, составим таблицу выполнения работы.

	A	t (*ч*)	$N=\dfrac{A}{t}$	
Наполнение по отдельности				
I насос	1	x	$\dfrac{1}{x}$	
II насос	1	y	$\dfrac{1}{y}$	
Наполнение совместно				
Два насоса	1	4	$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$	
Частичное наполнение бассейна				
I насос	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{1}{2}:\dfrac{1}{x}=\dfrac{x}{2}$	на 4 ч больше
II насос	$\dfrac{3}{4}$	$\dfrac{1}{y}$	$\dfrac{3}{4}:\dfrac{1}{y}=\dfrac{3y}{4}$	

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\cdot 4=1,\\ \frac{x}{2}-\frac{3y}{4}=4;\end{cases}\quad \begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{4},\\ 2x-3y=16;\end{cases}\quad \begin{cases}\frac{y+x}{xy}=\frac{1}{4},\\ x=1{,}5y+8;\end{cases}\quad \begin{cases}\frac{2{,}5y+8}{1{,}5y^2+8y}=\frac{1}{4},\\ x=1{,}5y+8;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{5y+16}{3y^2+16y}=\frac{1}{4},\\ x=1{,}5y+8;\end{cases}\quad \begin{cases}3y^2-4y-64=0,\\ x=1{,}5y+8;\end{cases}\quad \left[\begin{aligned}&\begin{cases}y=\frac{16}{3},\\ x=16;\end{cases}\\ &\begin{cases}y=-4,\\ x=2.\end{cases}\end{aligned}\right.$$

Так как $x, y > 0$, то $x = 16$ – время, за которое первый насос наполняет бассейн; $y = \frac{16}{3}$ – время, за которое второй насос наполняет бассейн.

Ответ: 16 *ч*, $\frac{16}{3}$ *ч*.

2.17. Двумя насосами бассейн должны были заполнить за 9 часов, но за час до окончания работы один насос пришлось выключить, и заполнение продолжалось в общей сложности 12 часов. За сколько часов можно заполнить бассейн каждым из насосов в отдельности?

Решение:

Пусть первый насос наполняет бассейн за x *ч*, второй – за y *ч*.

По условию задачи $x, y > 0$.

По условию задачи два насоса, работая одновременно, наполняют бассейн за 9 *ч*, но за час до окончания работы один насос выключили, и заполнение продолжалось в общей сложности 12 *ч*.

Таким образом, чтобы наполнить бассейн, один насос работал в течение 8 *ч*, а другой в течение 12 *ч*. Перенесем вышеизложенное в таблицу выполнения работы.

	A	t (ч)	$N=\frac{A}{t}$	
Наполнение по отдельности				
I насос	1	x	$\frac{1}{x}$	
II насос	1	y	$\frac{1}{y}$	
Наполнение совместно				
Два насоса	1	9	$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$	
Фактическое наполнение				
I насос	8	$\frac{1}{x}$	$\frac{8}{x}$	} 1
II насос	12	$\frac{1}{y}$	$\frac{12}{y}$	

Составим систему уравнений.

$$\begin{cases}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\cdot 9=1,\\ \frac{8}{x}+\frac{12}{y}=1;\end{cases}\quad \begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{9},\\ 8\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\frac{4}{y}=1;\end{cases}\quad \begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{9},\\ 8\cdot\frac{1}{9}+\frac{4}{y}=1;\end{cases}\quad \begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{9},\\ \frac{4}{y}=\frac{1}{9};\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{1}{x}=\frac{1}{12},\\ y=36;\end{cases}\quad \begin{cases}x=12,\\ y=36.\end{cases}$$

Ответ: 12 *ч*, 36 *ч*.

§3. ЗАДАЧИ НА ПРОЦЕНТЫ

Решение задач на проценты составлением пропорции

Основные понятия.

Процентом данного числа a называется его сотая часть.

Следовательно, само число составляет 100 процентов.

Один процент обозначается символом 1 %.

Например, 45% от числа 100 есть 45;

30% от числа 120 есть $120\cdot\frac{30}{100}=36$;

42% от x есть $\frac{42}{100}\cdot x=0,42x$.

При решении задач на проценты некоторая величина b принимается за 100%, ее часть – величина a – принимается за x % и составляется пропорция:

$$\frac{b}{a}=\frac{100}{x}.$$

Из пропорции по двум известным величинам определяют искомую третью, пользуясь ***основным свойством пропорции***:

$$b\cdot x=100\cdot a; \quad x=\frac{a}{b}\cdot 100\%.$$

3.1. В магазин привезли 14 *т* капусты, 30% всей капусты продали. Сколько капусты осталось?

Решение:

Оставшаяся часть капусты составляет: $100\%-30\%=70\%$.

Привезли: 14 *т* – 100%

Осталось: x *т* – 70%

Составляем пропорцию: $\frac{14}{x}=\frac{100}{70}$; $x=\frac{14\cdot 70}{100}=9,8$.

Ответ: 9,8 *т*.

Замечание: Вычислить 30% от 14 *т* быстрее умножением $(0{,}3\cdot 14 = 4{,}2)$. Зато способ пропорции «унифицирует» решение задач на проценты, то есть является стандартным методом решения. Лучше знать оба способа, а каким воспользоваться при решении задач – пусть каждый выбирает сам.

3.2. На факультете учатся 360 девушек. Если парни составляют 52% всех студентов, то сколько студентов учатся на данном факультете?

Решение:

Девушки составляют: $100\% - 52\% = 48\%$ всех студентов.

Девушки: 360 *чел* – 48%

Всего студентов: *x чел* – 100%

Составляем пропорцию: $\dfrac{360}{x} = \dfrac{48}{100}$; $x = \dfrac{360\cdot 100}{48} = 750$.

Ответ: 750 студентов.

3.3. Самолет при перелете из Алматы в Ганновер теряет 8% своего предполетного веса. Каков был предполетный вес самолета, если в Ганновере он весил 11 040 *кг*?

Решение:

Предполетный вес: *x кг* – 100%

Вес после полета: 11 040 *кг* – 92%

Составляем пропорцию: $\dfrac{x}{11040} = \dfrac{100}{92}$; $x = \dfrac{11040\cdot 100}{92} = 12000$ *кг*.

12 000 *кг* = 12 *т*.

Ответ: 12 *т*.

3.4. При продаже товара за 1 386 тыс. тенге получено 10% прибыли. Определите себестоимость товара.

Решение:

Цена при продаже: 1 386 тыс. тенге – 110%

Себестоимость: *x* тыс. тенге – 100%

Составляем пропорцию: $\dfrac{1386}{x} = \dfrac{110}{100}$; $x = \dfrac{1386\cdot 100}{110} = 1260$.

Ответ: 1 260 тыс. тенге.

3.5. Банк обещает своим клиентам годовой рост вклада 4%. Если человек вложит в банк 1 200 тенге, то через год получит?

Решение:

Первоначальный вклад: 1 200 тенге – 100%

Вклад через год: x тенге – 104%

Составляем пропорцию: $\frac{1200}{x}=\frac{100}{104}$; $x=\frac{1200\cdot104}{100}=1248$.

Ответ: 1 248 тенге.

3.6. Перед новым годом магазин снизил цены на товары на 25%. На сколько тенге понизилась цена на плюшевого мишку, если до снижения цен он стоил 1 980 тенге?

Решение:

Первоначальная цена: 1 980 тенге – 100%

Цена была снижена на x тенге – 25%

Составляем пропорцию: $\frac{1980}{x}=\frac{100}{25}$; $x=\frac{1980\cdot25}{100}=495$.

Ответ: 495 тенге.

3.7. Сколько процентов составляет число 40 от своего квадрата?

Решение:

Квадрат числа 40 равен 1 600.

Число: 40 – x%

Квадрат числа: 1 600 – 100%

Составляем пропорцию: $\frac{40}{1600}=\frac{x}{100}$; $x=\frac{40\cdot100}{1600}=2{,}5$.

Ответ: 2,5%.

3.8. В середине года 1 *кг* масла стоил 80 тенге, через год оно стоило уже 360 тенге. На сколько процентов подорожало масло?

Решение:

Рост цены составил: $360-80=280$ тенге.

Первоначальная цена: 80 тенге – 100%

Масло подорожало на: 280 тенге – x%

Составляем пропорцию: $\frac{80}{280}=\frac{100}{x}$; $x=\frac{280\cdot100}{80}=350$.

Ответ: на 350%.

3.9. Виноград при сушке теряет 65% своей массы. Сколько изюма (сушеного винограда) получится из 40 *кг* свежего винограда?

Решение:

Свежий виноград: 40 *кг* – 100%

Изюм: *x кг* – 35%

Составляем пропорцию: $\frac{40}{x}=\frac{100}{35}$; $x=\frac{40\cdot35}{100}=14$.

Ответ: 14 *кг*.

3.10. Имеются два раствора соли массой 80 *г* и 120 *г*. В первом растворе содержится 12 *г* соли, а во втором – 15 *г* соли. Если смешать оба раствора, то концентрация (в %) полученной смеси составит?

Решение:

Если смешать два раствора, то получится новый раствор массой 200 *г*, при этом масса соли в смеси составит 27 *г*.

Раствор: 200 *г* – 100%

Соль: 27 *г* – *x* %

Составляем пропорцию: $\frac{200}{27}=\frac{100}{x}$; $x=\frac{27\cdot100}{200}=13,5$.

Ответ: 13,5%.

3.11. В классе мальчики составляют 25% от числа девочек. Сколько процентов числа всех учеников класса составляют мальчики?

Решение:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Число девочек:} & a\\ \text{Число мальчиков:} & 0,25a\end{array}\right\}1,25a$$

Всего учащихся: $1,25a$ – 100%

Число мальчиков: $0,25a$ – x%

Составляем пропорцию: $\frac{1,25a}{0,25a}=\frac{100}{x}$; $x=\frac{0,25a\cdot100}{1,25a}=20$.

Ответ: 20%.

3.12. Число девочек, выполнявших олимпиаду по математике, составило 80% от числа мальчиков. Сколько процентов составляет число мальчиков от числа девочек, выполнявших олимпиаду?

***Решение*:**

Пусть a – число мальчиков, тогда $0,8a$ – число девочек.

Число девочек: $0,8a$ – 100%

Число мальчиков: a – x%

Составляем пропорцию: $\frac{0,8a}{a}=\frac{100}{x}$; $x=\frac{a\cdot100}{0,8a}=125$.

Ответ: 125%.

Рассмотрим задачи на увеличение (уменьшение) величины на некоторое число процентов.

Пусть некоторая величина $S_{нач.}$ изменяется на p%. Тогда ее значение $S_{кон.}$ находится по формуле:

$$S_{кон.}=S_{нач.}\pm\frac{p}{100}\cdot S_{нач.}=S_{нач.}(1\pm0,01p).$$

Перед переменной p ставится знак «плюс», если величина возрастает, «минус» – если убывает.

Например,

величину a увеличить на 20% : $a+\frac{20}{100}a=a+0,2a=1,2a$;

величину b уменьшить на 70% : $b-\frac{70}{100}b=b-0,7b=0,3b$.

***Формула процентного сравнения*:**

$A>B$ на $\frac{A-B}{B}\cdot100\%$ (процентный прирост)

3.13. Каждую сторону прямоугольника увеличили на 50%. На сколько процентов увеличилась площадь прямоугольника?

Решение:

b, a, $S = ab$ $\quad$ $1{,}5b$, $1{,}5a$, $S = 2{,}25ab$

Первоначальная площадь: $\quad ab$ – 100%

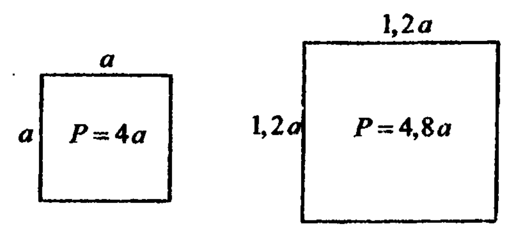
Площадь увеличилась на: $(2{,}25ab - ab)$ – $x\%$

$$x = \frac{2{,}25ab - ab}{ab} \cdot 100\% = 1{,}25 \cdot 100\% = 125\%.$$

Ответ: на 125%.

3.14. Сторону квадрата увеличили на 20%. На сколько процентов увеличился периметр?

Решение:



Первоначальный периметр: $\quad 4a$ – 100%

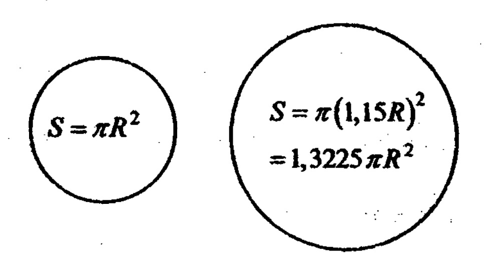
Периметр увеличился на: $(4{,}8a - 4a)$ – $x\%$

$$x = \frac{4{,}8a - 4a}{4a} \cdot 100\% = \frac{0{,}8}{4} \cdot 100\% = 20\%.$$

Ответ: на 20%.

3.15. Радиус круга увеличили на 15%. На сколько процентов увеличилась площадь круга?

Решение:



$$\pi R^2 \ - \ 100\%$$
$$\left(1,3225\pi R^2-\pi R^2\right) \ - \ x\%$$

$$x=\frac{1,3225\pi R^2-\pi R^2}{\pi R^2}\cdot 100\%=0,3225\cdot 100\%=32,25\%.$$

Ответ: на 32,25%.

3.16. Цена на товар была повышена на 25%. На сколько процентов надо теперь ее понизить, чтобы получить первоначальную цену товара?

Решение:

Пусть x – первоначальная цена товара.

Тогда $x+0,25x=1,25x$ – конечная цена товара.

Положим, новую цену товара $1,25x$ надо уменьшить на $p\%$, для того чтобы она стала равна первоначальной. Тог,. имеет место соотношение:

$x=1,25x(1-0,01p)$

$0,8=1-0,01p$

$0,01p=0,2$

$p=20\%$.

Ответ: на 20%.

3.17. Вчера цена моркови и картофеля была одинакова, сегодня морковь стала дороже на 110%, а картофель стал дороже на 50%. На сколько процентов теперь морковь дороже картофеля?

Решение:

a – первоначальная цена моркови и картофеля;

$a+1,1a=2,1a$ – конечная цена моркови;

$a+0,5a=1,5a$ – конечная цена картофеля.

Новая цена моркови: $1,5a$ – 100%

Морковь дороже картофеля на: $(2,1a-1,5a)$ – $x\%$

$$x=\frac{2,1a-1,5a}{1,5a}\cdot 100\%=\frac{0,6}{1,5}\cdot 100\%=40\%.$$

Ответ: на 40%.

3.18. Если затраты на покупку помидоров возросли на 82%, а цена килограмма помидоров увеличилась на 30%, то на сколько процентов возрастет вес купленных помидоров?

Решение:

Пусть a – первоначальные затраты на покупку помидоров;

b – первоначальная цена 1 *кг* помидоров.

$\frac{a}{b}$ – первоначальный вес купленных помидоров.

$a+0,82a=1,82a$ – конечные затраты на покупку помидоров;

$b+0,3b=1,3b$ – конечная цена 1 *кг* помидоров.

Вес купленных помидоров после увеличения равен: $\frac{1,82a}{1,3b}=1,4\frac{a}{b}$.

Составим следующую пропорцию:

Первоначальный вес: $\frac{a}{b}$ – 100%;

Вес увеличился на: $1,4\frac{a}{b}-\frac{a}{b}$ – $x\%$.

$$x=\frac{1,4\frac{a}{b}-\frac{a}{b}}{\frac{a}{b}}\cdot 100\%=0,4\cdot 100\%=40\%.$$

Ответ: на 40%.

3.19. Объем строительных работ увеличился на 80%. На сколько процентов надо увеличить число рабочих, чтобы выполнить работу за то же время, если производительность труда при этом увеличилась на 20%?

Решение:

Пусть A – первоначальный объем работ;

N – первоначальная производительность рабочего.

$\frac{A}{N}$ – первоначальная численность рабочих.

$A + 0,8A = 1,8A$ – конечный объем работ;

$N + 0,2N = 1,2N$ – конечная производительность рабочего.

Тогда конечная численность рабочих будет: $\frac{1,8A}{1,2N} = 1,5\frac{A}{N}$.

По формуле процентного прироста получаем, что численность рабочих надо увеличить на:

$$p = \frac{1,5\frac{A}{N} - \frac{A}{N}}{\frac{A}{N}} \cdot 100\% = 50\%.$$

Ответ: на 50%.

3.20. Магазин выставил на продажу товар с наценкой 60% от закупочной цены. После продажи 70% всего товара магазин снизил назначенную цену на 40% и распродал оставшийся товар. Сколько процентов от закупочной цены товара составила прибыль магазина?

Решение:

x – закупочная цена товара;

$x + 0,6x = 1,6x$ – цена товара после наценки;

$1,6x \cdot 0,7 = 1,12x$ – <u>стоимость 70% проданного товара</u>.

Цена товара после снижения на 40%:

$1,6x - 0,4 \cdot 1,6x = 1,6x(1 - 0,4) = 0,96x$.

$0,96x \cdot 0,3 = 0,288x$ – <u>стоимость 30% оставшегося товара</u>.

$1,12x + 0,288x = 1,408x$ – <u>*полная стоимость товара*</u>.

Следовательно, прибыль магазина составляет:

$$p = \frac{1{,}408x - x}{x} \cdot 100\% = 40{,}8\%.$$

Ответ: на 40,8%.

Сложный процентный рост

$$S_n = \left(1 \pm \frac{p}{100}\right)^n \cdot S$$ – формула сложных процентов.

Формула применима к любой ситуации, когда рассматриваемая величина за каждый заданный промежуток времени увеличивается или уменьшается на p процентов, считая от предыдущего ее значения.

3.21. К кая сумма будет на счете через 4 года, если на него положены 20 000 тенге под 30% годовых?

Решение:

$$S_n = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \cdot S$$

$$S_4 = \left(1 + \frac{30}{100}\right)^4 \cdot 20\,000 = \left(\frac{13}{10}\right)^4 \cdot 20\,000 = 13^4 \cdot 2 = 57\,122.$$

Ответ: 57 122 тенге.

3.22. После двух последовательных снижений цен на одно и то же число процентов цена фотоаппарата упала с 30 000 тенге до 19 200 тенге. На сколько процентов снижалась цена фотоаппарата каждый раз?

Решение:

Пусть цена фотоаппарата дважды была снижена на x %.

Тогда в соответствии с формулой сложных процентов $S_n = \left(1 - \frac{p}{100}\right)^n \cdot S$ составим уравнение:

$$\left(1 - \frac{x}{100}\right)^2 \cdot 30\,000 = 19\,200$$

$$\left(1-\frac{x}{100}\right)^2=0,64$$

Так как по условию задачи выражение $\left(1-\frac{x}{100}\right)$ не может быть отрицательным, получаем:

$$1-\frac{x}{100}=0,8; \qquad \frac{x}{100}=0,2; \qquad x=20.$$

Ответ: на 20%.

3.23. Каким должен быть начальный вклад, чтобы через два года вклад в банке, начисляющем 30% годовых, возрос до 845 000 тенге?

Решение:

Пусть первоначальный вклад составлял x тыс. тенге.

Тогда в соответствии с формулой сложных процентов $S_n=\left(1+\frac{p}{100}\right)^n\cdot S$ составим уравнение:

$$\left(1+\frac{30}{100}\right)^2\cdot x=845; \qquad \left(\frac{13}{10}\right)^2\cdot x=845; \qquad x=500.$$

Ответ: 500 тыс. тенге.

3.24. В городе в настоящее время 48 400 жителей. Известно, что население этого города увеличивалось ежегодно на 10%. Сколько жителей было в городе два года назад?

Решение:

Пусть два года назад в городе было x жителей.

Составим уравнение:

$$\left(1+\frac{10}{100}\right)^2\cdot x=48\,400; \qquad 1,21x=48\,400; \qquad x=40\,000.$$

Ответ: 40 000 человек.

3.25. Сколько процентов долга осталось после того, как должник первые три месяца выплачивал по 10% от остатка долга ежемесячно?

Решение:

Пусть первоначальный долг составлял S.

Тогда через три месяца выплат по 10% остаток долга будет равен:

$$S_3 = \left(1 - \frac{10}{100}\right)^3 \cdot S = (0,9)^3 \cdot S = 0,729S.$$

Составим пропорцию:

S – 100%;

$0,729S$ – x%.

$$x = \frac{0,729S}{S} \cdot 100\% = 72,9\%.$$

Ответ: 72,9%.

Если некоторая величина S увеличивается (уменьшается) n раз последовательно на p_1%, p_2%, ... p_n%, то ее окончательное значение S_n вычисляется по формуле:

$$S_n = S \cdot (1 \pm 0,01\, p_1)(1 \pm 0,01\, p_2)\dots(1 \pm 0,01\, p_n).$$

3.26. В течение января цена на яблоки выросла на 30%, а в течение февраля – на 20%. На сколько процентов поднялась цена за два месяца?

Решение:

Утверждать, что цена выросла на 50%, нельзя, так как «первые» 30% подсчитываются относительно цены в конце декабря, тогда как «вторые» 20% – относительно цены на конец января. Следовательно, за 100% в первом и во втором расчетах принимаются разные величины.

$$S_2 = S \cdot (1 + 0,01\, p_1)(1 + 0,01\, p_2)$$

Пусть первоначальная цена на яблоки была a.

Тогда после двух повышений цена на яблоки составила:

$$S_2 = a \cdot (1 + 0,3)(1 + 0,2) = a \cdot 1,3 \cdot 1,2 = 1,56a.$$

Процентный прирост равен:

$$x = \frac{1,56a - a}{a} \cdot 100\% = \frac{0,56a}{a} \cdot 100\% = 56\%.$$

Ответ: на 56%.

3.27. Один килограмм груш стоит на 20% меньше 1 *кг* персиков, а 1 *кг* яблок – на 10% меньше 1 *кг* груш; 1 *кг* слив стоит на 15% меньше 1 *кг* яблок. На сколько процентов 1 *кг* слив стоит меньше 1 *кг* персиков?

Решение:

Пусть a – цена 1 *кг* персиков.

Тогда цена 1 *кг* груш: $a\cdot(1-0,2)=0,8a$;

цена 1 *кг* яблок: $0,8a\cdot(1-0,1)=0,8a\cdot 0,9=0,72a$;

цена 1 *кг* слив: $0,72a\cdot(1-0,15)=0,72a\cdot 0,85=0,612a$.

Разница в цене между 1 *кг* персиков и 1 *кг* слив составляет:

$a-0,612a=0,388a$.

Составим пропорцию:

a – 100%;

$0,388a$ – x%.

$$x=\frac{0,388a\cdot 100\%}{a}=38,8\%.$$

Ответ: на 38,8%.

3.28. После двух повышений зарплата увеличилась в 1,43 раза. При этом число процентов, на которое повысилась зарплата во второй раз, была в 3 раза больше, чем в первый раз. На сколько процентов повысилась зарплата во второй раз?

Решение:

S – первоначальная зарплата;

$1,43S$ – конечная зарплата.

Положим, что в первый раз зарплата повысилась на p%, тогда во второй раз зарплата повысилась на $3p$% и выполнено равенство:

$$1,43S=S\cdot(1+0,01p)(1+0,01\cdot 3p)$$

$$1,43=(1+0,01p)(1+3\cdot 0,01p)$$

Замена: $t=0,01p$.

$$1,43=(1+t)(1+3t)$$

$$3t^2+4t-0{,}43=0$$

$$t_1=0{,}1; \qquad t_2=-\frac{43}{30}$$

По условию задачи $t>0$, следовательно $t=0{,}1$.

Тогда $0{,}01p=0{,}1$ или $p=10\%$.

Значит, во второй раз зарплата повысилась на 30%.

Ответ: на 30%.

Решение задач на проценты алгебраическим методом

3.29. Токарь и его ученик должны по плану изготовить за смену 65 деталей. Благодаря тому что токарь перевыполнил свой план на 10%, а ученик – на 20%, они изготовили за смену 74 детали. Сколько деталей по плану должны были изготовить в отдельности токарь и его ученик?

Решение:

Пусть x – плановое количество деталей, сделанных токарем;

$(65-x)$ – плановое количество деталей, сделанных учеником.

$x(1+0{,}1)=1{,}1x$ - фактическое количество деталей, сделанных токарем;

$(65-x)(1+0{,}2)=1{,}2(65-x)$ – фактическое количество деталей, сделанных учеником.

Составим и решим уравнение:

$$1{,}1x+1{,}2(65-x)=74$$

$$1{,}1x+78-1{,}2x=74$$

$$0{,}1x=4$$

$$x=40$$

40 *дет* по плану должен был изготовить токарь;
25 *дет* по плану должен был изготовить его ученик.

Ответ: 40 *дет*; 25 *дет*.

3.30. Турист прошел в первый день 40% маршрута, во второй день 45% оставшегося пути, после чего ему осталось пройти на 6 *км* больше, чем он прошел во второй день. Весь маршрут составляет?

Решение:

Пусть весь маршрут составляет x *км*.

Тогда турист прошел:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{в первый день:} & 0,4x \text{ км;} \\ \text{во второй день:} & 0,45\cdot(x-0,4x)=0,45\cdot 0,6x=0,27x \text{ км;} \\ \text{в третий день:} & (0,27x+6) \text{ км.} \end{array}\right\} x$$

Составим и решим уравнение:

$0,4x+0,27x+0,27x+6=x$

$0,06x=6$

$x=100$.

Ответ: 100 *км*.

3.31. Поле вспахивали в течение трех дней. В первый день вспахали 56% всей площади, во второй – 75% оставшегося участка, а в третий – 330 *га*. Какова площадь поля?

Решение:

Пусть площадь всего поля x *га*.

Тогда вспахали:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{в первый день:} & 0,56x \text{ га;} \\ \text{во второй день:} & 0,75\cdot(x-0,56x)=0,75\cdot 0,44x=0,33x \text{ га;} \\ \text{в третий день:} & 330 \text{ га.} \end{array}\right\} x$$

Составим и решим уравнение:

$0,56x+0,33x+330=x$

$0,11x=330$

$x=3\,000$.

Ответ: 3 000 *га*.

3.32. Из молока получается 21% сливок, а из сливок – 24% масла. Сколько нужно взять молока, чтобы получить 630 *кг* масла?

Решение:

Пусть x *кг* – количество молока, которое необходимо для получения 630 *кг* масла.

Из x *кг* молока получится $0,21x$ *кг* сливок, а из $0,21x$ *кг* сливок, в свою очередь, получится $0,24\cdot(0,21x)=0,0504x$ *кг* масла.

Составим и решим уравнение:

$0,0504x=630$

$x=12\,500.$

Ответ: 12 500 *кг*.

3.33. Сумма двух чисел равна 120. Найдите эти числа, если 40% одного числа равны 60% другого.

Решение:

Пусть x – первое число, тогда $(120-x)$ – второе число.

По условию:

$0,4x=0,6(120-x)$

$0,4x=72-0,6x$

$x=72.$

Ответ: 72; 48.

3.34. Две шкурки ценного меха стоимостью 225 тыс. тенге были проданы на международном аукционе с прибылью в 40%. Какова стоимость каждой шкурки, если от первой было получено 25% прибыли, а от второй – 50%?

Решение:

Пусть x тыс. тенге – стоимость первой шкурки;

y тыс. тенге – стоимость второй шкурки.

Зная, что стоимость двух шкурок 225 тыс. тенге, а проданы они были за $225\cdot1,4=315$ тыс. тенге, составим систему уравнений:

$$\begin{cases}x+y=225,\\1,25x+1,5y=315.\end{cases}$$

Умножим первое уравнение на $(-1,5)$ и сложим со вторым:

$$\begin{cases}-1,5x-1,5y=-337,5,\\ 1,25x+1,5y=315;\end{cases}\quad \begin{cases}-0,25x=-22,5,\\ x+y=225;\end{cases}\quad \begin{cases}x=90,\\ y=135.\end{cases}$$

Ответ: 90 тыс. тенге, 135 тыс. тенге.

3.35. Стоимость 60 экземпляров первого тома и 75 экземпляров второго тома составляет 270 тыс. тенге. В действительности за все книги уплачено только 237 тыс. тенге, так как проводилась скидка на первый том в размере 15%, а на второй том – 10%. Найдите первоначальную цену книг.

Решение:

Пусть x тыс. тенге – стоимость первого тома;

y тыс. тенге – стоимость второго тома.

Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases}60x+75y=270,\\ 60\cdot 0,85x+75\cdot 0,9y=237;\end{cases}\quad \begin{cases}60x+75y=270,\\ 51x+67,5y=237;\end{cases}\quad \begin{cases}4x+5y=18,\\ 17x+22,5y=79.\end{cases}$$

Умножим первое уравнение на $(-4,5)$ и сложим со вторым:

$$\begin{cases}-18x-22,5y=-81\\ 17x+22,5y=79\end{cases}\quad \begin{cases}-x=-2,\\ 4x+5y=18;\end{cases}\quad \begin{cases}x=2,\\ y=2.\end{cases}$$

Ответ: 2 000 тенге; 2 000 тенге.

§4. ЗАДАЧИ НА СПЛАВЫ, РАСТВОРЫ И СМЕСИ

Задачи этого раздела вызывают наибольшие затруднения. В данном случае очень важно разобраться в условиях задачи и попытаться разбить задачу на простейшие.

Введем основные понятия.

Даны три различных вещества A, B и C с массами m_A, m_B и m_C.

Масса смеси, составленной из этих веществ, равна:

$M = m_A + m_B + m_C$.

Массовой концентрацией вещества A в смеси (доля чистого вещества в смеси) называют величину C_A, которая определяется по формуле:

$$C_A = \frac{m_A}{M} = \frac{m_A}{m_A + m_B + m_C}.$$

Массовые концентрации C_A, C_B и C_C связаны соотношением:

$$C_A + C_B + C_C = 1.$$

Процентным содержанием вещества A в данной смеси называется величина P_A %, вычисляемая по формуле:

$$P_A = C_A \cdot 100\,\%.$$

План решения задач

1. **Выбор неизвестных.**

В качестве неизвестных чаще всего выбирают те величины, которые требуется найти.

2. **Выбор чистого вещества.**

Из веществ, фигурирующих в условии задачи, выбирается одно в качестве чистого вещества. Чаще всего это то вещество, о котором идет речь в требовании задачи, или вещество, о доле которого в условии содержится больше всего информации. При этом, если C_A – доля чистого вещества, то $(1 - C_A)$ – доля примеси.

3. **Переход к долям.**

Если в задаче имеются процентные содержания, их следует перевести в доли и в дальнейшем работать только с долями.

4. Отслеживание состояния смеси.

На каждом этапе изменения смеси (добавление, изъятие) необходимо описывать состояние смеси.

5. Составление уравнения.

В результате преобразований смесь приходит к итоговому состоянию. Оно характеризуется величинами m_A, M, C_A, содержащими неизвестные. Уравнением, связывающим эти неизвестные, будет:

$$m_A = C_A \cdot M.$$

6. Формирование ответа.

Если в задаче требовалось найти то или иное процентное содержание, то следует полученные доли перевести в процентное содержание.

При решении задач следует руководствоваться тем, что при соединении (разъединении) смесей с одним и тем же чистым веществом количества чистого вещества и общие количества смесей складываются (вычитаются). Складывать и вычитать доли и процентные содержания - НЕЛЬЗЯ.

Очень удобно в задачах на сплавы, смеси, концентрации составлять таблицу по условию задачи, а затем заполнять пустые клетки, руководствуясь *законом сохранения массы.*

К задачам на сплавы и смеси относятся следующие задачи

– на добавление (удаление) одного вещества из смеси;

– на смешивание двух растворов (сплавов);

– на выливание смеси.

Рассмотрим каждый тип задачи в отдельности.

Задачи на добавление (удаление) одного вещества из смеси

Специфика данного типа задач – количество одного вещества меняется, а другого сохраняется.

4.1. Морская вода содержит 5% соли. Сколько пресной воды нужно добавить к 80 *кг* морской воды, чтобы концентрация соли составляла 4%?

Решение:

Пусть масса пресной воды, которую необходимо добавить к морской воде, равна x *кг* $(x>0)$.

Запишем условие задачи в виде таблицы, за чистое вещество при этом принимается соль.

соль

	Общее количество смеси M (*кг*)	Массовая концентрация C_A	Количество чистого вещества $m_A = C_A \cdot M$ (*кг*)
Морская вода	80	0,05	$0,05 \cdot 80 = 4$
Пресная вода	x	–	–
Новый раствор	$80+x$	0,04	4

По данным третьей строки таблицы в соответствии с формулой $m_A = C_A \cdot M$ составим уравнение:

$0,04 \cdot (80+x) = 4$

$80+x=100$

$x=20$.

Ответ: 20 *кг*.

4.2. В растворе содержится 40% соли. Если добавить 120 *г* соли, то в растворе будет содержаться 70% соли. Найдите массу соли в первоначальном растворе.

Решение:

Запишем условие задачи в виде таблицы, считая, что масса соли в первоначальном растворе x *г* $(x>0)$.

соль

	m_A (*г*)	C_A	$M = \frac{m_A}{C_A}$ (*г*)
Раствор	x	0,4	$\frac{x}{0,4} = 2,5x$
Соль	120	1	120
Новый раствор	$x+120$	0,7	$2,5x+120$

Используя формулу $m_A = C_A \cdot M$ и последнюю строку таблицы, составим уравнение:

$$0{,}7 \cdot (2{,}5x + 120) = x + 120$$

$$1{,}75x + 84 = x + 120$$

$$0{,}75x = 36$$

$$x = 48.$$

Ответ: 48 *г*.

4.3. Имеется 0,5 *т* целлюлозной массы, содержащей 85% воды. Сколько килограммов воды надо выпарить, чтобы оставшаяся масса содержала 25% целлюлозы?

Решение:

Изначально доля воды в целлюлозной массе была 0,85, следовательно, доля целлюлозы была: $1 - 0{,}85 = 0{,}15$.

Пусть масса воды, которую необходимо выпарить, равна x *кг* $(x > 0)$. Приняв за чистое вещество целлюлозу, запишем условие задачи в виде таблицы.

целлюлоза

	M (*кг*)	C_A	$m_A = C_A \cdot M$ (*кг*)
До испарения	500	0,15	$0{,}15 \cdot 500 = 75$
После испарения	$500 - x$	0,25	75

Составим уравнение по данным второй строки из таблицы:

$$0{,}25 \cdot (500 - x) = 75$$

$$500 - x = 300$$

$$x = 200.$$

Ответ: 200 *кг*.

4.4. Кусок сплава меди и цинка массой в 36 *кг* содержит 45% меди. Какую массу меди нужно добавить к этому куску, чтобы полученный сплав содержал 60% меди?

Решение:

В качестве чистого вещества выбираем медь. Пусть x *кг* – масса меди, которую нужно добавить к сплаву, тогда таблица примет вид:

медь

	M (*кг*)	C_A	$m_A = C_A \cdot M$ (*кг*)
Сплав	36	0,45	$0{,}45 \cdot 36 = 16{,}2$
Медь	x	1	x
Новый сплав	$36 + x$	0,6	$16{,}2 + x$

Используя последнюю строку таблицы, составим уравнение:

$0{,}6 \cdot (36 + x) = 16{,}2 + x$

$21{,}6 + 0{,}6x = 16{,}2 + x$

$0{,}4x = 5{,}4$

$x = 13{,}5$.

Ответ: 13,5 *кг*.

4.5. Сплав алюминия и цинка содержит 82% алюминия. После добавления 18 *кг* цинка содержание алюминия в сплаве понизилось до 70%. Вычислите, сколько алюминия и цинка в отдельности стало содержаться в сплаве?

Решение:

Пусть ервоначальная масса сплава равна x *кг* $(x > 0)$.

За чистое вещество принимаем алюминий. Запишем условие задачи в виде таблицы.

алюминий

	M (*кг*)	C_A	$m_A = C_A \cdot M$ (*кг*)
Сплав	x	0,82	$0{,}82x$
Цинк	18	–	–
Новый сплав	$x + 18$	0,7	$0{,}82x$

Составим уравнение:

$0,7\cdot(x+18)=0,82x$

$0,12x=12,6$

$x=105$

Первоначальная масса сплава 105 *кг*,

тогда в новом сплаве масса алюминия: $105\cdot 0,82=86,1$ *кг*;

масса цинка: $105-86,1+18=36,9$ *кг*.

Ответ: 86,1 *кг*; 36,9 *кг*.

4.6. Сплав золота с серебром, содержащий 80 *г* золота, сплавлен со 100 *г* чистого золота. В результате содержание золота в сплаве повысилось по сравнению с первоначальным содержанием на 20%. Сколько серебра в сплаве?

Решение:

Пусть первоначальная масса сплава равна x *г* $(x>0)$.

За чистое вещество принимаем золото. Запишем условие задачи в виде таблицы.

	m_A (*г*)	M (*г*)	*золото* $C_A=\frac{m_A}{M}$
Сплав	80	x	$\frac{80}{x}$
Золото	100	100	1
Новый сплав	180	$x+100$	$\frac{180}{x+100}$

Зная, что содержание золота в сплаве повысилось на 20%, составим уравнение:

$$\frac{180}{x+100}-\frac{80}{x}=0,2$$

$$\frac{100x-8\,000}{x^2+100x}=0,2$$

$$0,2x^2-80x+8\,000=0$$

$$x^2-400x+40\,000=0$$

$x=200$

Масса первоначального сплава 200 *г*,

тогда масса серебра в сплаве: $200-80=120$ *г*.

Ответ: 120 *г*.

4.7. В одной тонне руды содержится определенное количество железа. После удаления из руды 400 *кг* примесей, содержащих 12,5% железа, в оставшейся руде содержание железа повысилось на 20%. Какое количество железа еще осталось в руде?

***Решение*:**

За чистое вещество принимаем железо.

Пусть первоначальная масса железа в руде была x *кг* $(x>0)$.

По условию задачи из руды удалили $400\cdot 0,125=50$ *кг* железа, тогда таблица примет вид:

железо

	m_A (*кг*)	M (*кг*)	$C_A=\frac{m_A}{M}$
Руда	x	1 000	$\frac{x}{1000}$
Примеси	50	400	0,125
Руда после удаления примесей	$x-50$	600	$\frac{x-50}{600}$

Зная, что содержание железа в руде повысилось на 20%, составим уравнение:

$$\frac{x-50}{600}-\frac{x}{1000}=0,2$$

$$10(x-50)-6x=1200$$

$$4x=1700$$

$$x=425$$

Первоначальная масса железа в руде 425 *кг*, тогда после удаления примесей масса железа в руде составила $425-50=375$ *кг*.

Ответ: 375 *кг*.

4.8. Сплав меди и олова массой 10 *кг* содержит 70% олова. К этому сплаву добавили 8 *кг* меди. Сколько нужно добавить килограммов олова, чтобы его концентрация стала в 3 раза больше, чем концентрация меди?

Решение:

Пусть масса олова, которую необходимо добавить, равна x *кг* $(x>0)$. Запишем условие задачи в виде таблицы.

	m_A (*кг*)	M (*кг*)	$C_A=\frac{m_A}{M}$
1 сплав			
Медь	3	10	0,3
Олово	7		0,7
2 сплав (после добавления 8 кг меди)			
Медь	11	18	
Олово	7		
3 сплав (после добавления x кг олова)			
Медь	11	$18+x$	$\frac{11}{18+x}$
Олово	$7+x$		$\frac{7+x}{18+x}$

Зная, что концентрация олова в 3 раза больше концентрации меди, составим уравнение:

$$\frac{7+x}{18+x}=3\cdot\frac{11}{18+x}$$

$$7+x=33$$

$$x=26.$$

Ответ: 26 *кг*.

4.9. Для приготовления рассола требуется получить солевой раствор. По рецепту раствор нужной концентрации получается, если на 400 *г* воды добавить 100 *г* соли. Сколько граммов соли потребуется, чтобы получить солевой раствор нужной концентрации из 1 литра 10% солевого раствора?

Решение:

Необходимая концентрация солевого раствора согласно рецепту равна:

$$C_A = \frac{100}{400+100} = \frac{100}{500} = 0,2\,.$$

Запишем условие задачи в виде таблицы, считая, что в первоначальный раствор нужно добавить x *г* соли для получения необходимой концентрации $(x > 0)$.

соль

	m_A (*г*)	M (*г*)	C_A
Раствор	100	1 000	0,1
Соль	x	x	1
Нужный раствор	$100+x$	$1000+x$	0,2

Используя формулу $m_A = C_A \cdot M$ и последнюю строку таблицы, составим уравнение:

$$0,2(1000+x) = 100+x$$

$$200+0,2x = 100+x$$

$$0,8x = 100$$

$$x = 125\,.$$

Ответ: 125 *г*.

Задачи на принцип «сухого вещества»

4.10. Трава имеет влажность 85%, сено – 10%. Сколько тонн сена получится из 15 *т* травы?

Решение:

В данной задаче траву и сено надо рассматривать как смесь некоторого «сухого вещества» и воды. При этом при хранении и сушке масса «сухого вещества» не меняется.

Пусть из 15 *т* травы получается x *т* сена $(x > 0)$. Запишем условие задачи в виде таблицы.

	M (m)	C_A	$m_A = C_A \cdot M$ (m)
Трава			
Вода	15	0,85	
«Сухое вещество»		0,15	$15 \cdot 0{,}15 = 2{,}25$
Сено			
Вода	x	0,1	
«Сухое вещество»		0,9	$0{,}9x$

Зная, что масса «сухого вещества» в свежей и сухой траве остается неизменной, составим уравнение:

$0{,}9x = 2{,}25$

$x = 2{,}5$.

Ответ: 2,5 *т*.

4.11. Влажность сухой цементной смеси на складе составляет 18%. Во время перевозки из-за дождей влажность смеси повысилась на 2%. Найдите массу привезенной смеси, если со склада было отправлено 400 *кг*.

Решение:

x *кг* – масса привезенной смеси $(x > 0)$. Запишем условие задачи в виде таблицы.

	M (*кг*)	C_A	$m_A = C_A \cdot M$ (*кг*)
Цементная смесь на складе			
Вода	400	0,18	
«Сухое вещество»		0,82	$400 \cdot 0{,}82 = 328$
Цементная смесь после перевозки			
Вода	x	0,2	
«Сухое вещество»		0,8	$0{,}8x$

Зная, что масса «сухого вещества» в первоначальной и привезенной смеси остается неизменной, составим уравнение:

$0,8x=328$

$x=410$.

Ответ: 410 *кг*.

4.12. **Свежие грибы содержат по массе 90% воды, а сухие – 20%. Сколько надо собрать свежих грибов, чтобы из них получить 4,5 *кг* сухих грибов?**

Решение:

Положим, что для получения 4,5 *кг* сухих грибов требуется x *кг* свежих. Запишем условие задачи в виде таблицы.

	M (*кг*)	C_A	$m_A = C_A \cdot M$ (*кг*)
Свежие грибы			
Вода	x	0,9	
«Сухое вещество»		0,1	$0,1x$
Сухие грибы			
Вода	4,5	0,2	
«Сухое вещество»		0,8	$4,5\cdot 0,8=3,6$

Зная, что масса «сухого вещества» в сухих и свежих грибах остается неизменной, составим уравнение:

$0,1x=3,6$

$x=36$.

Ответ: 36 *кг*.

Задачи на смешивание двух растворов (сплавов)

Специфика данного типа задач заключается в выполнении закона сохранения объема или массы.

4.13. Имеются два раствора соли массой 80 *г* и 120 *г*. В первом растворе содержится 12 *г* соли, во втором 15 *г* соли. Если оба раствора смешать, то концентрация полученной смеси составит?

Решение:

По условию задачи составим таблицу.

	m_A (г)	M (г)	соль $C_A = \frac{m_A}{M}$
1 раствор	12	80	$\frac{12}{80} = 0,15$
2 раствор	15	120	$\frac{15}{120} = 0,125$
Полученный раствор	27	200	x

По определению $P_A = \frac{27}{200} \cdot 100\% = 13,5\%$.

Ответ: 13,5%.

4.14. Имеется лом стали двух сортов с содержанием никеля 5% и 40%. Сколько нужно взять каждого из этих сортов, чтобы получить 140 т стали с содержанием никеля 30%?

Решение:

Пусть взяли x *т* стали первого сорта и $(140-x)$ *т* стали второго сорта.

Составим таблицу.

	M (т)	никель C_A	$m_A = C_A \cdot M$ (т)
Сталь 1 сорта	x	0,05	$0,05x$
Сталь 2 сорта	$140-x$	0,4	$0,4(140-x)$
Полученная сталь	140	0,3	$0,05x+0,4(140-x)$

По данным третьей строки таблицы составим уравнение:

$0,05x+0,4(140-x)=0,3\cdot 140$

$0,05x+56-0,4x=42$

$0,35x=14$

$x=40$.

Ответ: 40 *т*, 100 *т*.

4.15. Чтобы получить 50%-ый раствор кислоты, надо к 30 *г* 15%-го раствора кислоты добавить 75%-ый раствор этой же кислоты. Найдите количество 75%-го раствора кислоты, которое надо добавить.

Решение:

x *г* – масса 75%-го раствора кислоты $(x>0)$.

кислота

	M (*г*)	C_A	$m_A = C_A \cdot M$ (*г*)
1 раствор	30	0,15	$0{,}15 \cdot 30 = 4{,}5$
2 раствор	x	0,75	$0{,}75x$
Полученный раствор	$30+x$	0,5	$4{,}5+0{,}75x$

По данным третьей строки таблицы составим уравнение:

$$4{,}5+0{,}75x=0{,}5(30+x)$$

$$4{,}5+0{,}75x=15+0{,}5x$$

$$0{,}25x=10{,}5$$

$$x=42.$$

Ответ: 42 *г*.

4.16. Имеется два сплава. Один содержит 2,8 *кг* золота и 1,2 *кг* примесей, другой – 2,7 *кг* золота и 0,3 *кг* примесей. Отрезав по куску от каждого сплава и сплавив их, получили 2 *кг* сплава с процентным содержанием золота 85%. Сколько килограммов металла отрезали от второго сплава?

Решение:

Определим концентрацию золота в каждом из взятых сплавов в отдельности.

1 сплав: $C_A = \dfrac{2{,}8}{2{,}8+1{,}2} = \dfrac{2{,}8}{4} = 0{,}7$.

2 сплав: $C_A = \dfrac{2{,}7}{2{,}7+0{,}3} = \dfrac{2{,}7}{3} = 0{,}9$.

Пусть от второго куска сплава отрезали x *кг* металла $(x>0)$, тогда от первого куска сплава отрезали $(2-x)$ *кг* металла. Запишем условие задачи в виде таблицы.

золото

	M (*кг*)	C_A	$m_A = C_A \cdot M$ (*кг*)
1 сплав	$2-x$	0,7	$0,7(2-x)$
2 сплав	x	0,9	$0,9x$
Полученный сплав	2	0,85	$0,7(2-x)+0,9x$

По данным третьей строки таблицы составим уравнение:

$0,7(2-x)+0,9x=0,85\cdot 2$

$1,4-0,7x+0,9x=1,7$

$0,2x=0,3$

$x=1,5$.

Ответ: 1,5 *кг*.

4.17. Два сплава золота и меди 950-ой пробы и 800-ой пробы сплавляют с 2 *кг* чистого золота. Получают новый сплав 906-ой пробы массой 25 *кг*. Вычислите массу первых двух сплавов.

Решение:

Проба показывает содержание золота в тысячных долях.

950-ая проба: $C_A = \dfrac{950}{1000} = 0,95$.

800-ая проба: $C_A = \dfrac{800}{1000} = 0,8$.

Пусть масса сплава золота 950-ой пробы равна x *кг* $(x>0)$, тогда масса сплава золота 800-ой пробы равна $(23-x)$ *кг*. Запишем условие задачи в виде таблицы.

золото

	M (*кг*)	C_A	$m_A = C_A \cdot M$ (*кг*)
1 сплав	x	0,95	$0,95x$
2 сплав	$23-x$	0,8	$0,8(23-x)$
Золото	2	1	2
Полученный сплав	25	0,906	$0,95x+0,8(23-x)+2$

По данным четвертой строки таблицы составим уравнение:

$0,95x+0,8(23-x)+2=0,906\cdot 25$

$0,95x+18,4-0,8x+2=22,65$

$0,15x=2,25$

$x=15$.

Ответ: 15 *кг*, 8 *кг*.

4.18. Имелось два сплава серебра. Процент содержания серебра в первом сплаве был на 25% выше, чем во втором. Когда их сплавили вместе, то получили сплав, содержащий 30% серебра. Найдите вес сплавов, если известно, что серебра в первом сплаве было 4 *кг*, а во втором – 8 *кг*.

Решение:

Пусть масса первого сплава x *кг*, масса второго сплава y *кг* $(x, y > 0)$. Запишем условие задачи в виде таблицы.

серебро

	m_A (*кг*)	M (*кг*)	$C_A = \frac{m_A}{M}$	
1 сплав	4	x	$\frac{4}{x}$	на 25% больше
2 сплав	8	y	$\frac{8}{y}$	
Полученный сплав	12	$x+y$	0,3	

Зная, что процентное содержание серебра в первом сплаве на 25% выше, чем во втором, а так же, используя данные третьей строки таблицы, составим систему уравнений:

$$\begin{cases}\frac{4}{x}-\frac{8}{y}=0,25,\\ 0,3(x+y)=12;\end{cases}\quad \begin{cases}\frac{4}{x}-\frac{8}{y}=\frac{1}{4},\\ x+y=40;\end{cases}\quad \begin{cases}\frac{4}{40-y}-\frac{8}{y}=\frac{1}{4},\\ x=40-y;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{12y-320}{40y-y^2}=\frac{1}{4},\\ x=40-y;\end{cases}\quad \begin{cases}y^2+8y-1280=0,\\ x=40-y;\end{cases}\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=32,\\ x=8;\end{cases}\\ \begin{cases}y=-40,\\ x=80.\end{cases}\end{array}\right.$$

По условию задачи $y>0$. Следовательно, масса первого сплава 8 *кг*, масса второго сплава 32 *кг*.

Ответ: 8 *кг*, 32 *кг*.

В задачах на сплавы часто вместо концентрации одного из металлов задают отношение масс всех входящих в этот сплав металлов.

4.19. Имеются два сплава золота и серебра. В первом сплаве количество этих металлов находится в отношении $2:3$, а во втором – в отношении $3:7$. Сколько граммов первого сплава нужно взять, чтобы вместе со вторым получилось 12 *г* нового сплава, в котором золото и серебро находятся в отношении $3:5$?

Решение:

За чистое вещество принимаем золото. В первом сплаве масса золота относится к массе серебра как $2:3$, следовательно, массовая концентрация золота в этом сплаве равна: $\frac{2}{2+3}=\frac{2}{5}=0,4$.

Аналогично, массовая концентрация золота во втором сплаве составляет $\frac{3}{3+7}=0,3$, а в полученном сплаве – $\frac{3}{3+5}=\frac{3}{8}$.

Пусть масса первого сплава равна x *г* $(x>0)$, тогда масса второго равна $(12-x)$ *г*. Запишем условие задачи в виде таблицы.

золото

	M (г)	C_A	$m_A = C_A \cdot M$ (г)
1 сплав	x	0,4	$0,4x$
2 сплав	$12-x$	0,3	$0,3(12-x)$
Полученный сплав	12	$\frac{3}{8}$	$0,4x+0,3(12-x)$

По данным третьей строки таблицы составим уравнение:

$$0,4x+0,3(12-x)=\frac{3}{8}\cdot 12$$

$$0,4x+3,6-0,3x=4,5$$

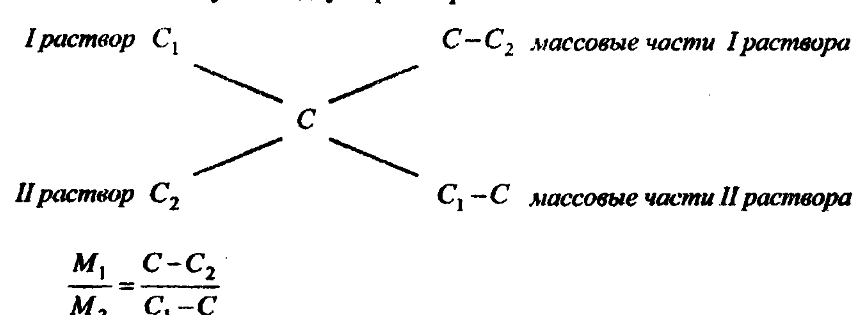
$$0,1x=0,9$$

$$x=9.$$

Ответ: 9 *г.*

При решении задач на смешивание растворов разных концентраций можно так же использовать «*правило креста*».

«Правилом креста» называют диагональную схему правила смешивания для случаев с двумя растворами.



$$\frac{M_1}{M_2}=\frac{C-C_2}{C_1-C}$$

Таким образом, отношение массы первого раствора к массе второго равно отношению разности массовых долей смеси и второго раствора к разности массовых долей первого раствора и смеси.

Составление схемы

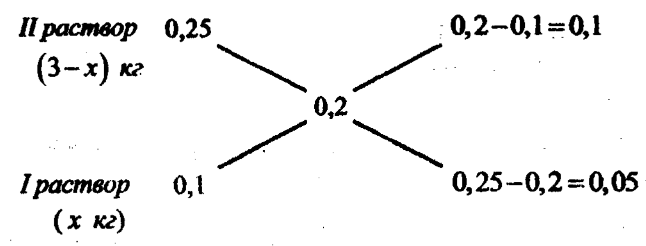
Слева на концах отрезков записывают исходные массовые доли растворов (обычно слева вверху – большая), на пересечении отрезков – заданная, а справа на их концах записываются разности между исходными и заданной массовыми долями. Получаемые массовые части показывают, в каком отношении надо слить исходные растворы.

4.20. Смешали 10%-ый и 25%-ый растворы соли и получили 3 *кг* 20%-го раствора. Какое количество каждого раствора в килограммах было использовано?

Решение:

Пусть масса 10%-го раствора соли равна x *кг* $(x>0)$, тогда масса 25%-го раствора равна $(3-x)$ *кг*.

Составим диагональную схему.



По формуле: $\frac{x}{3-x}=\frac{0,05}{0,1}$

$$\frac{x}{3-x}=\frac{1}{2}$$

$$3-x=2x$$

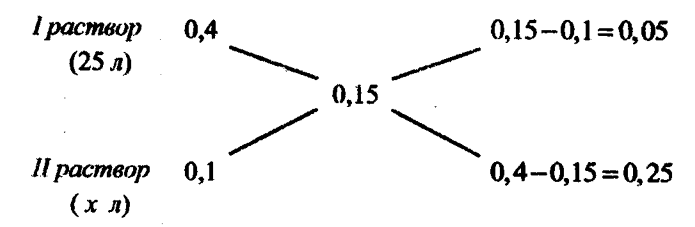
$$x=1.$$

Ответ: 1 *кг*; 2 *кг*.

4.21. К 25 литрам 40%-го раствора соляной кислоты добавили x литров 10%-го раствора такой же кислоты и получили 15%-ый раствор. Найдите значение x?

Решение:

Составим диагональную схему.



По формуле получаем: $\frac{25}{x}=\frac{0,05}{0,25}$

$$\frac{25}{x}=\frac{1}{5}$$

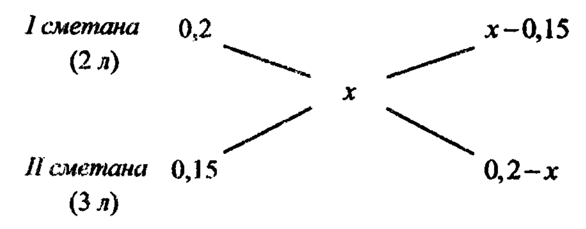
$$x=125.$$

Ответ: 125 *л*.

4.22. Смешали 2 *л* 20%-ой сметаны с 3 *л* 15%-ой. Определите жирность смешанной сметаны.

Решение:

Пусть x – жирность полученной сметаны. Составим диагональную схему.



По формуле получаем: $\frac{2}{3}=\frac{x-0,15}{0,2-x}$

$$0,4-2x=3x-0,45$$

$$5x=0,85$$

$$x=0,17.$$

Ответ: 17%.

Спецификой данного типа задач является сохранение процентного соотношения между компонентами.

4.23. 40 *кг* раствора соли разлили в два сосуда так, что во втором сосуде чистой соли оказалось на 2 *кг* больше, чем в первом сосуде. Если во второй сосуд добавить 1 *кг* соли, то количество соли в нем будет в 2 раза больше, чем в первом сосуде. Найдите массу раствора, находящегося в первом сосуде.

Решение:

Пусть в первый сосуд налили x *кг* раствора соли, тогда во второй сосуд влили $(40-x)$ *кг* раствора.

Обозначим массу чистой соли в первом сосуде через y *кг*, тогда масса чистой соли во втором сосуде составляет $(y+2)$ *кг*.

соль

	m_A (*кг*)	M (*кг*)	$C_A = \frac{m_A}{M}$
I сосуд	y	x	$\frac{y}{x}$
II сосуд	$y+2$	$40-x$	$\frac{y+2}{40-x}$

По условию задачи, если во второй сосуд добавить 1 *кг* соли, то количества соли в нем станет в 2 раза больше, чем в первом, то есть:

$y+2+1=2y$ или $y=3$ *кг*.

Учитывая, что концентрация соли в сосудах одинаковая, составим уравнение:

$$\frac{y}{x}=\frac{y+2}{40-x}$$

$$\frac{3}{x}=\frac{5}{40-x}$$

$x=15$.

Ответ: 15 *кг*.

4.24. В колбе было 800 *г* 80%-го спирта. Провизор вылил из колбы 200 *г* этого спирта и добавил в нее 200 *г* воды. Определите концентрацию полученного спирта.

Решение:

По условию задачи составим таблицу.

спирт

	M (*г*)	C_A	$m_A = C_A \cdot M$ (*г*)
Было	800	0,8	$0{,}8 \cdot 800 = 640$
Вылили	200	0,8	$0{,}8 \cdot 200 = 160$
Осталось	600	0,8	480
Добавили воды	200	–	–
Стало	800	x	480

Из последней строки таблицы определим концентрацию полученного спирта как:

$$x = \frac{480}{800} = \frac{48}{80} = 0{,}6.$$

Ответ: 60%.

4.25. Из емкости, содержащей 25%-ый раствор соли отлили 3 литра раствора и добавили 2 литра воды. В результате в емкости оказался 20%-ый раствор соли. Какое количество раствора находилось в емкости первоначально?

Решение:

Первоначальное количество раствора в емкости обозначим за x *л*. По условию задачи составим таблицу.

соль

	M (*л*)	C_A	$m_A = C_A \cdot M$ (*л*)
Было	x	0,25	$0{,}25x$
Вылили	3	0,25	$0{,}25 \cdot 3 = 0{,}75$
Осталось	$x-3$	0,25	$0{,}25x - 0{,}75$
Добавили воды	2	–	–
Стало	$x-1$	0,2	$0{,}25x - 0{,}75$

По данным последней строки таблицы составим уравнение:

$0,25x-0,75=0,2(x-1)$

$0,25x-0,75=0,2x-0,2$

$0,05x=0,55$

$x=11$.

Ответ: 11 *л*.

4.26. В сосуде находится 10%-ый раствор спирта. Из сосуда отлили $\frac{1}{3}$ содержимого, а оставшуюся часть долили водой так, что сосуд оказался заполненным на $\frac{5}{6}$ первоначального объема. Какое процентное содержание спирта оказалось в сосуде?

Решение:

Первоначальное количество раствора в сосуде обозначим за x. По условию задачи составим таблицу.

спирт

	M	C_A	$m_A=C_A\cdot M$
Было	x	0,1	$\frac{1}{10}x$
Вылили	$\frac{1}{3}x$	0,1	$\frac{1}{30}x$
Осталось	$\frac{2}{3}x$	0,1	$\frac{1}{10}x-\frac{1}{30}x=\frac{1}{15}x$
Добавили воды	$\frac{1}{6}x$	–	–
Стало	$\frac{5}{6}x$	y	$\frac{1}{15}x$

Из последней строки таблицы определим процентное содержание спирта как:

$$y=\frac{1}{15}x:\frac{5}{6}x=\frac{1}{15}\cdot\frac{6}{5}=\frac{2}{25}=0,08.$$

Ответ: 8%.

4.27. В одном сосуде 20%-ая уксусная кислота, в другом 50%-ая. Если из первого сосуда перелить во второй $\frac{1}{6}$ часть имеющейся в нем кислоты, то концентрация кислоты во втором сосуде понизится до 44%. Если же всю кислоту из второго сосуда перелить в первый и добавить 50 *г* воды, то получится кислота с концентрацией 25,6%. Сколько кислоты в каждом сосуде?

Решение:

Пусть в первом сосуде находится x *г* уксусной кислоты, а во втором сосуде – y *г*. По условию задачи составим таблицу.

уксус

	M (*г*)	C_A	$m_A = C_A \cdot M$ (*г*)
I раствор	x	0,2	$0,2x$
II раствор	y	0,5	$0,5y$
$I \to II$	$y+\frac{1}{6}x$	0,44	$0,5y+0,2\cdot\frac{1}{6}x$
$II \to I$	$x+y+50$	0,256	$0,2x+0,5y$

По данным двух последних строк таблицы составим систему уравнений:

$$\begin{cases} 0,44\left(y+\frac{1}{6}x\right)=0,5y+0,2\cdot\frac{1}{6}x, & |\cdot 30 \\ 0,256(x+y+50)=0,2x+0,5y; & |\cdot 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 13,2y+2,2x=15y+x, \\ 1,28x+1,28y+64=2,5y+x; \end{cases} \qquad \begin{cases} 1,2x=1,8y, \\ -0,28x+1,22y=64; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=1,5y, \\ 0,8y=64; \end{cases} \qquad \begin{cases} x=120, \\ y=80. \end{cases}$$

Ответ: 120 *г*; 80 *г*.

§5. ЗАДАЧИ НА ПРОПОРЦИОНАЛЬНОЕ ДЕЛЕНИЕ И ЧИСЛОВЫЕ ЗАВИСИМОСТИ

Задачи на пропорциональное деление

5.1. При делении числа 190 на части, обратно пропорциональные числам 3, $\frac{1}{2}$ и 5, получаются числа?

Решение:

Разделить число 190 на три части, обратно пропорциональные числам 3, $\frac{1}{2}$ и 5, равносильно тому же, что и разбить число 190 на три слагаемых, прямо пропорциональных числам $\frac{1}{3}$; 2 и $\frac{1}{5}$.

Пусть x – коэффициент пропорциональности. Тогда:

$$\frac{1}{3}x+2x+\frac{1}{5}x=190$$

$$\frac{38x}{15}=190$$

$$x=75.$$

Ответ: 25; 150; 15.

5.2. Найдите три числа, если первое составляет 80 % второго, второе относится к третьему как $0,5:\frac{9}{20}$, а сумма первого и третьего на 70 больше второго числа.

Решение:

Пусть x, y и z – искомые числа.

По условию:

$$\begin{cases} x=0,8y, \\ \frac{y}{z}=0,5:\frac{9}{20}, \\ x+z=y+70; \end{cases} \quad \begin{cases} x=0,8y, \\ \frac{y}{z}=\frac{10}{9}, \\ x+z=y+70; \end{cases} \quad \begin{cases} x=0,8y, \\ z=0,9y, \\ 0,8y+0,9y=y+70; \end{cases} \quad \begin{cases} y=100, \\ x=80, \\ z=90. \end{cases}$$

Ответ: 80; 100; 90.

5.3. Склад отпустил 40 % имевшейся в запасе муки хлебозаводу, а остальную муку распределил между тремя магазинами в соотношении $0,3:2,5:0,8$. Сколько муки было на складе в запасе, если известно, что первый магазин получил на 40 *т* меньше, чем третий.

Решение:

Пусть x *т* – количество муки в запасе.

Тогда $0,4x$ *т* муки было отпущено хлебозаводу, а оставшиеся $x-0,4x=0,6x$ *т* муки распределили между магазинами.

Введем для оставшейся муки коэффициент пропорциональности – y.

Тогда магазины получили по $0,3y$; $2,5y$ и $0,8y$ *т* муки соответственно.

Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases}0,8y-0,3y=40,\\0,3y+2,5y+0,8y=0,6x;\end{cases}\quad\begin{cases}0,5y=40,\\3,6y=0,6x;\end{cases}\quad\begin{cases}y=80,\\x=480.\end{cases}$$

Ответ: 480 *т*.

5.4. Числители трех дробей пропорциональны числам 1; 2; 5, а знаменатели соответственно пропорциональны числам 1; 3; 7. Среднее арифметическое этих дробей равно $\frac{200}{441}$. Найдите эти дроби.

Решение:

Пусть x – коэффициент пропорциональности для числителей дробей;

y – коэффициент пропорциональности для знаменателей дробей.

Тогда первую дробь можно представить как $\frac{x}{y}$;

вторую дробь – $\frac{2x}{3y}$; третью дробь – $\frac{5x}{7y}$.

По условию задачи:

$$\left(\frac{x}{y}+\frac{2x}{3y}+\frac{5x}{7y}\right):3=\frac{200}{441}$$

$$\frac{x}{y}\left(1+\frac{2}{3}+\frac{5}{7}\right)=\frac{200}{147}$$

$$\frac{x}{y}\cdot\frac{50}{21}=\frac{200}{147}$$

$$\frac{x}{y}=\frac{4}{7}$$

Первая дробь: $\frac{4}{7}$; вторая дробь: $\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{7}=\frac{8}{21}$; третья дробь: $\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{7}=\frac{20}{49}$.

Ответ: $\frac{4}{7}$; $\frac{8}{21}$; $\frac{20}{49}$.

Задачи, где неизвестные являются членами пропорции

5.5. За 2,5 *кг* баранины заплатили 475 тенге. Сколько баранины можно купить по той же цене на 665 тенге?

***Решение*:**

Количество товара и его стоимость находятся в прямой пропорциональной зависимости.

↓ 2,5 *кг*	–	475 тенге ↓	
x	–	665 тенге	

Составим пропорцию: $\frac{2,5}{x}=\frac{475}{665}$.

$$x=\frac{2,5\cdot665}{475}=\frac{2,5\cdot133}{95}=\frac{0,5\cdot133}{19}=0,5\cdot7=3,5.$$

Ответ: 3,5 *кг*.

5.6. Пешеход прошел путь за 2,5 *ч*, двигаясь со скоростью 3,6 *км/ч*. Сколько времени потратит пешеход, чтобы пройти этот же путь со скоростью 4,5 *км/ч*?

***Решение*:**

Время и скорость – обратно пропорциональные величины.

↓ 2,5 *ч*	–	3,6 *км/ч* ↑
x	–	4,5 *км/ч*

Составим пропорцию: $\frac{2,5}{x}=\frac{4,5}{3,6}$.

$x=\frac{2,5\cdot 3,6}{4,5}=\frac{2,5\cdot 4}{5}=0,5\cdot 4=2$.

Ответ: 2 ч.

5.7. Сумма первых трех членов пропорции равна 58. Третий член составляет $\frac{2}{3}$, а второй – $\frac{3}{4}$ первого члена. Найдите четвертый член пропорции

Решение:

Пусть x – первый член пропорции, тогда $\frac{3}{4}x$, $\frac{2}{3}x$ – второй и третий члены пропорции соответственно.

По условию: $x+\frac{3}{4}x+\frac{2}{3}x=58$; $\frac{29x}{12}=58$; $x=24$.

Следовательно, первые три члена пропорции равны: 24, 18, 16.

Обозначим четвертый член пропорции за a и составим соотношение:

$\frac{24}{18}=\frac{16}{a}$.

$a=\frac{18\cdot 16}{24}=\frac{18\cdot 2}{3}=12$.

Ответ: 12.

5.8. Найдите четыре числа, образующих пропорцию, если известно, что сумма крайних членов равна 14, сумма средних членов равна – 11, а сумма квадратов таких четырех чисел равна – 221.

Решение:

Пусть a, b, c, d – члены пропорции.

По условию:

$$\begin{cases} a+d=14, \\ b+c=11, \\ a^2+b^2+c^2+d^2=221, \\ \dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}; \end{cases} \qquad \begin{cases} a+d=14, \\ b+c=11, \\ a^2+b^2+c^2+d^2=221, \\ ad=bc. \end{cases}$$

Возведем левые и правые части первых двух уравнений в квадрат и сложим полученные результаты:

$$+\begin{cases} a^2+2ad+d^2=196, \\ b^2+2bc+c^2=121; \end{cases}$$

$$\underbrace{a^2+b^2+c^2+d^2}_{=221}+2(ad+bc)=317;$$

$$ad+bc=48;$$

$$ad=bc=24.$$

Получаем: $\begin{cases} a+d=14, \\ ad=24, \\ b+c=11, \\ bc=24. \end{cases}$

Решением первых двух уравнений системы $\begin{cases} a+d=14, \\ ad=24 \end{cases}$ являются пары чисел $(2;12)$ и $(12;2)$.

Решением других двух уравнений системы $\begin{cases} b+c=11, \\ bc=24 \end{cases}$ являются пары чисел $(3;\ 8)$ и $(8;\ 3)$.

Ответ: 2, 3, 8, 12.

Задачи, в которых используется десятичная форма записи числа

Основные понятия.

1. Если натуральное число A имеет n знаков, то

$$A = a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + ... + a_1 \cdot 10 + a_0,$$

где a_0, a_1, a_2, … a_{n-1} – соответственно цифры единиц, десятков, сотен, тысяч и т.д. в числе A.

2. Если при делении натурального числа A на натуральное число B в частном получается q, а в остатке r, то $A = B \cdot q + r$ $(r < B)$.

3. Если к натуральному числу A справа приписать n-значное число B, то получим число – $A \cdot 10^n + B$.

4. Если к n-значному числу A слева приписать число B, то получим число – $B \cdot 10^n + A$.

5.9. Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то получится в частном 4 и в остатке – 3. Если же число разделить на произведение его цифр, то получится в частном 3 и в остатке – 5. Найдите это число.

Решение:

Пусть a – первая цифра (число десятков),

b – вторая цифра (число единиц) искомого двузначного числа.

$a, b \in \{0,\ 1,\ 2 ... 9\}$

Тогда искомое число можно представить в виде: $\overline{ab} = 10a + b$.

По условию:

$$\begin{cases} 10a + b = (a+b) \cdot 4 + 3, \\ 10a + b = ab \cdot 3 + 5; \end{cases} \quad \begin{cases} 2a - b = 1, \\ 10a + b = 3ab + 5; \end{cases} \quad \begin{cases} b = 2a - 1, \\ 2a^2 - 5a + 2 = 0; \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 2, \\ b = 3; \end{cases} \\ \begin{cases} a = \dfrac{1}{2}, \\ b = 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Пара чисел $a=\frac{1}{2}$, $b=0$ не подходит по смыслу задачи, следовательно, искомое число – 23.

Ответ: 23.

5.10. Трехзначное число оканчивается цифрой 3. Если эту цифру поместить вначале, то полученное трехзначное число будет на единицу больше утроенного первоначального числа. Найдите это число.

***Решение*:**

Пусть a – первая цифра (число сотен),

b – вторая цифра (число десятков) искомого трехзначного числа.

$a, b \in \{0, 1, 2 ... 9\}$

Тогда искомое число можно представить как: $\overline{ab3}=100a+10b+3$.

Если цифру 3 поместить в начале, то получим число:

$\overline{3ab}=300+10a+b$.

По условию:

$300+10a+b-3(100a+10b+3)=1$

$290a+29b=290$

$10a+b=10$

Так как a и b могут принимать только значения от 0 до 9, то единственно возможная пара чисел, удовлетворяющая последнему соотношению: $a=1$, $b=0$. Тогда искомое число 103.

Ответ: 103.

5.11. Сумма цифр двузначного числа равна 12. От перестановки цифр число увеличивается на 75%. Найдите это число.

***Решение*:**

Пусть a – первая цифра,

b – вторая цифра искомого двузначного числа.

$a, b \in \{0, 1, 2 ... 9\}$

Тогда искомое число можно представить как: $\overline{ab}=10a+b$.

После перестановки цифр получаем число: $\overline{ba} = 10b + a$.

По условию задачи:

$\begin{cases} a+b=12, \\ 10b+a=1{,}75(10a+b); \end{cases}$ $\begin{cases} a+b=12, \\ 8{,}25b=16{,}5a; \end{cases}$ $\begin{cases} a+b=12, \\ b=2a; \end{cases}$

$\begin{cases} a=4, \\ b=8. \end{cases}$

Искомое число – 48.

Ответ: 48.

5.12. Дано двузначное число с одинаковыми цифрами. Если в старший разряд добавить одну единицу, а в младший две и полученное число умножить на данное, то произведение будет равно 2464. Найдите данное число.

Решение:

Пусть a – первая и вторая цифры искомого числа.

$a \in \{0,\ 1,\ 2 \ldots 9\}$

Тогда искомое число: $\overline{aa} = 10a + a = 11a$.

Если в старший разряд числа $\overline{aa}$ добавить одну единицу, а в младший две, то получим число:

$$\overline{(a+1)(a+2)} = 10(a+1) + a + 2 = 11a + 12.$$

По условию задачи:

$(11a+12)\cdot 11a = 2464$

$(11a+12)\cdot a = 224$

$11a^2 + 12a - 224 = 0$

$a_1 = 4, \quad a_2 = -\frac{56}{11}$

$a = -\frac{56}{11}$ не подходит по смыслу задачи,

поэтому $a = 4$ и искомое число равно 44.

Ответ: 44.

5.13. Двузначное число на 19 больше суммы квадратов своих цифр и на 9 больше числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите это число.

Решение:

Пусть a – первая цифра,

b – вторая цифра искомого двузначного числа.

$a, b \in \{0,\ 1,\ 2 \ldots 9\}$

Тогда искомое число: $\overline{ab} = 10a + b$, а число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке: $\overline{ba} = 10b + a$.

По условию задачи:

$\begin{cases} 10a + b = 19 + a^2 + b^2, \\ (10a + b) - (10b + a) = 9; \end{cases}$ $\begin{cases} 10a + b = 19 + a^2 + b^2, \\ 9a - 9b = 9; \end{cases}$

$\begin{cases} 10(b+1) + b = 19 + (b+1)^2 + b^2, \\ a = 1 + b; \end{cases}$ $\begin{cases} 2b^2 - 9b + 10 = 0, \\ a = 1 + b; \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} b = 2, \\ a = 3; \end{cases} \\ \begin{cases} b = 2{,}5, \\ a = 3{,}5. \end{cases} \varnothing \end{array} \right.$

$\begin{cases} a = 3, \\ b = 2. \end{cases}$

Ответ: 32.

5.14. Сумма цифр трехзначного числа, у которого в середине стоит нуль, равна 9. Если поменять местами первую и последнюю цифры, то новое число будет на 99 больше данного. Найдите данное число.

Решение:

Пусть a – первая цифра,

b – третья цифра искомого числа.

$a, b \in \{0,\ 1,\ 2 \ldots 9\}$

Тогда искомое число: $\overline{a0b} = 100a + b$.

Если поменять местами первую и последнюю цифры, то новое число будет $\overline{b0a} = 100b + a$.

По условию задачи:

$$\begin{cases} a+b=9, \\ (100b+a)-(100a+b)=99; \end{cases} \quad \begin{cases} a+b=9, \\ 99b-99a=99; \end{cases} \quad \begin{cases} a+b=9, \\ b-a=1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=4, \\ b=5. \end{cases}$$

Искомое число 405.

Ответ: 405.

5.15. Дано натуральное двузначное число. Разность квадратов этого числа и числа, записанного в обратном порядке, равна 495. Найдите сумму этих чисел.

Решение:

Пусть a – первая цифра,

b – вторая цифра искомого двузначного числа.

$a, b \in \{0,\ 1,\ 2 \ldots 9\}$

Тогда искомое число: $\overline{ab}=10a+b$, число, записанное в обратном порядке: $\overline{ba}=10b+a$.

По условию задачи:

$$(10a+b)^2-(10b+a)^2=495$$

$$(10a+b-10b-a)(10a+b+10b+a)=495$$

$$(9a-9b)(11a+11b)=495$$

$$(a-b)(a+b)=5$$

Так как $a, b \in \{0,\ 1,\ 2 \ldots 9\}$, то возможны следующие два варианта:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a-b=1, \\ a+b=5; \end{cases} \\ \begin{cases} a-b=5, \\ a+b=1; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=3, \\ b=2; \end{cases} \\ \begin{cases} a=3, \\ b=-2. \end{cases} \varnothing \end{array}\right.$$

Сумма чисел: $32+23=55$.

Ответ: 55.

СОДЕРЖАНИЕ

ИРИНА ПАВЛОВНА РУСТЮМОВА
СВЕТЛАНА ТЮЛЮГОНОВНА РУСТЮМОВА

Пособие для подготовки к единому национальному тестированию (ЕНТ) по математике
(Учебно-методическое пособие)
Издание первое

По вопросам оптового приобретения книг можно обращаться по телефонам:

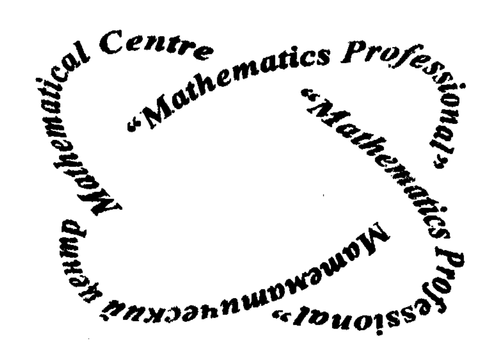
+7 (727) 375 - 56 - 12

+7 - 777 - 496 - 25 - 14

+7 - 707 - 315 - 56 - 05

+7 (727) 248 - 24 - 23

+7 - 777 - 319 - 25 - 61



МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЦЕНТР

Mathematics Professional

В основу книги положена эффективная методика обучения математике, практически опробованная авторами в учебных аудиториях **математического центра "Mathematics Professional".**

Наш математический центр предлагает Вам:

- помощь в восстановлении, систематизации и закреплении знаний по математике;
- устранение пробелов в знаниях;
- наиболее эффективную систему дополнительного обучения, которая ориентирована на успешную сдачу ЕНТ в 11 классе и ПГК в 9 классе;
- различные программы подготовки для поступления в университет и колледж;
- методы решения задач повышенной сложности по математике.

Наши телефоны: 8 (727) 270 68 35
+7 777 805 26 35
+7 777 824 13 13

Web-сайт: rustyumova.kz